F 1130

KA

37

# BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XVIII — FASCICULA 1—2

IANUARIE—IUNIE 1956

TIPOGRAFIA MINISTERULUI ÎNVĂŢĂMÎNTULUI — BUCUREŞTI

## BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicule pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» şi «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. In limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări de cercetare ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se face pe adresa:

**INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI**
**CALEA GRIVIŢEI 132**
**(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")**

## BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся четырьмя годовыми выпусками продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составлен на новых основах, он отражает во-первых научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетена производится по адрессу:

**INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI**
**CALEA GRIVIŢEI 132**
**(*с указанием* „pentru Buletinul Institutului")**

## BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» et «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On y poura ajouter les traveaux d'autres collaborateurs, dans la limite des possibilités.

L'adrese pour la correspondence et les échanges est:

**INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI**
**CALEA GRIVIŢEI 132**
**(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")**

TOMUL XVIII FASCICULA 1—2

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

# BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

1956

TIPOGRAFIA MINISTERULUI ÎNVĂŢĂMÎNTULUI – BUCUREŞTI

COMITETUL DE REDACȚIE:

Prof. *Antoniu S. Ion*; Prof. *Ausländer Iosif*, Prof. *Buzdugan Gh.*, Conf. *Călin Sergiu*; Prof. *Ionescu Tudor*; Acad. Prof. *Negrescu Traian*; Acad. Prof. *Nenițescu Costin*; Prof. *Nicolau Edmond*; Conf. *Pollinger Adolf*; Prof. *Rădulet Remus*, membru corespodent al Academiei R. P. R.; Prof. *Săveanu Lucius*; Prof. *Tănăsescu Tudor*, membru corespondent al Academiei R. P. R.

Redactor responsabil: Prof. *Parteni Cesar*

# SUMAR

## *MATEMATICA*


Pag.

N. CIORĂNESCU — Asupra unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea și o nouă generalizare a funcțiilor Bessel . . . . . 1

M. ROȘCULEȚ. — Asupra unor ecuații cu derivate parțiale . . . . 5

M. ROȘCULEȚ. — Definirea monogeneității cu ajutorul derivatelor polidimensionale orientate . . . . . 11


## *CHIMIE*


EM. BRATU — Echilibrul lichid-vapori al sistemelor binare. Ecuație pentru coeficienții de activitate . . . . . 17

E. RUCKENȘTEIN — Ecuații pentru coeficienții de activitate . . . . . 35

E. RUCKENȘTEIN, O. SMIGELSCHI — Ecuații pentru coeficienții de activitate având o proprietate de simetrie a ecuațiilor lui van Laar. . . . . 39

P. SPACU, GR. TEODORESCU — Metodă volumetrică de dozare a hidrazidei acidului izonicotinic . . . . . 47

P. SPACU, GR. TEODORESCU, D. GĂVĂNESCU — O nouă metodă volumerică de dozare a hidrazidei acidului izonicotinic . . . . 51

P. SPACU, A. OVANESIAN, D. GĂVĂNESCU — Metodă volumetrică pentru dozarea cadmiului . . . . . 55

T. IONESCU, C. FOSTIROPOL, M. GORUNEANU, V. CRISTOLOVEANU — Limpezirea apei cu ajutorul coagulanților activați cu soluri de silice . . . . . 59


## *ELECTROTEHNICA*


A. AVRAMESCU, F. STANCIULESCU — Reprezentarea analitică a undelor de impuls . . . . . 65

V. NEDELCU — Elementele fundamentale ale teoriei celor două reacții a mașinii sincrone . . . . . 117

C. APETREI — Viteza de răspuns a mașinilor de curent continuu funcționînd în scheme de excitație a generatoarelor sincrone . . 149

## *ELECTRONICĂ*

Pag.

V. POPESCU-MĂLĂIEŞTI, E. ROGAY — Impedante electronice simetrice. Verificări experimentale . . . . . 171

E. NICOLAU, AL. POPESCU — Oscilator electronic de mare stabilitate 179

R. PIRINGER — O metodă rapidă pentru predeterminarea caracteristicii de modulaţie anodică a unui amplificator Clasa C . . . . . 193

GH. STANCU — Amplificator stabil la variaţii de sarcină . . . . . 205

CHR. VAZACA — Dimensionarea optimă a transformatorilor de putere de înaltă frecvenţă pentru generatorii electronici industriali . 213

M. DRĂGĂNESCU — Asupra tratării idealizate a circuitelor relaxat-oscilante . . . . . 231

V. PAUKER — Gama dinamică a amplificatorilor de impulsuri cu reacţiune negativă . . . . . 245

D. BERNŞTEIN — Proiectarea oscilatorilor de putere (Clasa C) pentru aplicaţiile industriale şi de laborator . . . . . 253

M. BERLADSCHI — Analiza funcţionării amplificatorilor Clasa C dezacordaţi . . . . . 269

## *TELECOMUNICAŢII*

S. CONDREA — Limitarea spectrului de frecvenţe al semnalelor de comunicaţii . . . . . 285

CR. VASILIU — Sinteza funcţiilor de transfer R.C. . . . . 299

GH. CARTIANU, M. SĂVESCU — Calculul distorsiunilor la discriminatorul de fază . . . . . 315

E. KATZ — Cu privire la problema diafoniei în radioreleele cu dublă modulaţie: de impulsuri (în poziţie) şi de frecvenţă . . . 331

## *PETROGRAFIA CĂRBUNELUI*

IONESCU-SISEŞTI — Influenţa metamorfismului de contact asupra structurii cărbunilor. Cazul cărbunilor de la Baia Nouă . . . . . 353

## *METALURGIE*

AL. LUPU, A. MOSCOVICI, M. DINESCU, S. INGHEL — Studiul influenţei diferiţilor factori asupra procesului de aglomerare a concentratelor bogate în plumb . . . . . 363

## *N O T E*

L. SĂVEANU — Periodice şi publicaţii ştiinţifice editate de Institutul Politehnic Bucureşti. 383

*INFORMAŢII* . . . . . 391

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика


Стр.

ЧЁРАНЕСКУ Н.—Об уравнении с частными производными второго порядка и о новом обобщений функций Бесселя . 1

РОШКУЛЕЦ М.—О некоторых уравнениях с кастными производными . . . . . 5

РОШКУЛЕЦ М.—Частные ногомерные производные и моногенные функции . . . . . 11


### Химия


БРАТУ Е.—Равновесие жидкость–пар для бинарных систем . 17

РУКЕНШТЕЙН Е.—Уравнения для коеффициентов активности 35

РУКЕНШТЕЙН Е., СМИЖЕЛЬСКИЙ О.—Уравнения для коэффициентов активности, имеющих свойства симметричности уравнений ван Лаара . . . . . 39

СПАКУ П., ТЕОДОРЕСКУ Г.—Объёмный метод дозировки гидразида изоникотиновой кислоты . . . . . 47

СПАКУ П., ТЕОДОРЕСКУ Г., ГАВАНЕСКУ Д.—Новыи объёмныи метод дозировки гидразида изоникотиновой кислоты 51

СПАКУ П., ОВАНЕЗИЯН А., ГАВАНЕСКУ Д.—Объёмный метод дозировки кадмия . . . . . 55

ИОНЕСКУ Т., ФОСТИРОПОЛ К., ГОРУНЕАНУ М., КРИСТОЛОВЯНУ В.—Очистка воды при помощи коагулянтов, активированных кремнезёмнистыми почвами . . . . . 59


### Электротехника


АВРАМЕСКУ А., СТАНЧУЛЕСКУ Ф.—Аналитическое представление импульсных волн . . . . . 65

НЕДЕЛКУ В.—Основные элементы теории двух реакций синхронной машины . . . . . 117

АПЕТРЕЙ К.—Быстроотзывчивость машин постоянного тока, работающих в схемах возбуждения синхронных генераторов 149

Стр.

## Электроника

ПОПЕСКУ В.. РОГАЙ Е.—Симметричные электронные импедансы . . . . . 171
НИКОЛАУ Е., ПОРЕСКУ А.—Электронный осциллятор большой устойчивости . . . . . 179
ПИРИНГЕР Р.—Скоростный метод предопределения характеристик анодной модуляции усилителя класса С . . . . . 193
СТАНКУ Г.—Устойчивный усилитель к изменениям нагрузки . 205
ВАЗАКА КР. — Оптимальный расчёт высокочастотных силовых трансформаторов . . . . . 213
ДРАГАНЕСКУ М.—Об идеализированной трактовке цепей . . 231
ПАУКЕР В.—Динамический диапазон импульсных усилителей с отрицательной обратной связью . . . . . 245
БЕРНШТЕЙН Д.—Проектирование силовых осцилляторов класса С для промышленных и лабораторных применений 253
БЕРЛАДСКИЙ М.—Анализ работы расстроенных усилителей класса С. . . . . 269

## Телепередача

КОНДРЯ С.—Ограничение частотного спектра сигналов сообщения . . . . . 285
ВАСИЛИУ КР.—Синтез передаточных функций . . . . . 299
КАРТИАНУ-САВЕСКУ—Расчёт искажения у фазового дискриминатора . . . . . 315
КАЦ Е.—О задаче диафонии в радиорелеях с двойной модуляцией . . . . . 331

## Петрография угля

ИОНЕСКУ-СИСЕШТЬ Б.—Влияние контактного метаморфизма на структуру угля . . . . . 353

## Металлургия

ЛУПУ А., МОСКОВИЧЬ А., ДИНЕСКУ М., ИНГЕЛ С.—Влъяние различных факторов на процесс агломерации концентратов с большим содержанием свинца . . . . . 363

## Отметки

СЭВЕАНУ Л.—Периодические журналы и научные опубликования изданы в прошлом бухарестским политехническим институтом . . . . . 383

Сообщений . . . . . 391

# SOMMAIRE

## *MATHÉMATIQUES*


Pag.

CIORĂNESCU N. — Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre et une nouvelle généralisation des fonctions de Bessel 1

ROŞCULEŢ M. — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles . 5

ROŞCULEŢ M. — Sur les dérivées partielles polydimensionnelles et les fonctions monogènes . . . . . 11


## *CHIMIE*


BRATU E. — L'équilibre liquide-vapeur des systèmes binaires . . . . . 17

RUCKENSTEIN E. — Equations pour les coefficients d'activité . . . . 35

RUCKENSTEIN E., SMIGELSCHI O. — Equations pour les coefficients d'activité ayant une des propriétés de symétrie des équations de van Laar . . . . . 39

SPACU, TEODORESCU — Méthode volumétrique pour le dosage de l'hydrazide de l'acide isonicotinique . . . . . 47

SPACU, TEODORESCU, GĂVĂNESCU — Nouvelle méthode volumétrique pour le dosage de l'hydrazide de l'acide isonicotinique . . . 51

SPACU, OVANESIAN, GĂVĂNESCU — Méthode volumétrique pour le dosage du cadmium . . . . . 55

IONESCU T., FOSTIROPOL, GORUNEANU, CRISTOLOVEANU — Méthode pour rendre limpide l'eau à l'aide des coagulants activés avec des sois de silicium . . . . . 59


## *ELECTROTECHNIQUE*


AVRAMESCU A. — Les expressions analytiques des ondes de choc 65

NEDELCU V. N. — Eléments fondamentaux de la théorie des deux réactions dans la machine synchrone . . . . . 117

APETREI C. — La vitesse de réponse des machines à courant continu qui fonctionnent dans le circuit d'excitation des générateurs synchrones . . . . . 149

## *ÉLECTRONIQUE*

Pag.

POPESCU-MĂLĂIEŞTI V., ROGAI E. — Impédances électroniques symétriques . . . . . 171

NICOLAU EDM., POPESCU A. — Oscillateur électronique de grande stabilité . . . . . 179

PIRINGER R. — Méthode rapide pour prédéterminer la caractéristique de modulation anodique d'un amplificateur classe C . . . . . 193

STANCU GH. — Amplificateur stable aux variations des tensions et à la puissance débitée . . . . . 205

VAZACA CHR. — Méthode pour déterminer les dimensions optima des transformateurs de puissance de haute fréquence . . . . 213

DRĂGĂNESCU M. — Sur les circuits qui produisent des oscillations relaxées . . . . . 231

PAUKER V. — Game dynamique des amplificateurs d'impulsion qui ont une réaction négative . . . . . 245

BERNSTEIN D. — Méthode pour calculer les oscillateurs de puissance — classe C — destinés aux applications industrielles et de laboratoire . . . . . 253

BERLADSCHI M. — Analyse du fonctionnement des amplificateurs classe C désaccordés . . . . . 269

## *TÉLÉCOMMUNICATIONS*

CONDREA S. — Limitation du spectre de fréquences des signaux de communications . . . . . 285

VASILIU CR. — La synthèse des fonctions de transfert R.C. . . . . 299

CARTIANU GH., SĂVESCU M. — Le calcul des distorsions introduites par le discriminateur de phase . . . . . 315

KATZ E. — Sur le problème des diaphonies dans les radiorelais à double modulation . . . . . 331

## *PÉTROGRAPHIE DU CHARBON*

IONESCU-SIŞEŞTI B. — L'influence du métamorphisme de contact sur la structure des charbons . . . . . 353

## *MÉTALLURGIE*

LUPU A., MOSCOVICI, DINESCU, INGHEL — L'influence des divers facteurs sur le processus d'gglomération des concentrés riches en plomb . . . . . 363

## *NOTES*

SĂVEANU L. — Périodiques et publications scientifiques édités par l'Institut Polytechnique de Bucarest . . . . . 383

*INFORMATIONS* . . . . . 391

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1-2

# MATEMATICĂ

5.12.9

## ASUPRA UNEI ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL DOILEA ȘI O NOUĂ GENERALIZARE A FUNCȚIILOR LUI BESSEL

de N. CIORĂNESCU

1). Soluțiile ecuației lineare cu derivate parțiale de ordinul al doilea:

$$\triangle U + \omega^2 U = O \tag{1}$$

unde $\triangle$ este operatorul lui Laplace, iar $\omega$ o constantă, definește funcțiile metaarmonice, care intervin în multe probleme de Fizică-Matematică. Dacă în această ecuație se caută soluțiile de forma:

$$U = e^{in\theta} \varphi\ (r) \tag{2}$$

găsim pentru $\varphi$ (r) funția lui Bessel de ordinul $n$. In cele ce urmează îmi propun să consider o ecuație mai generală decît (1), cu coeficienți variabili, anume ecuația:

$$(ar_2 + 1) \triangle U + 4\lambda U = O \tag{3}$$

cu $a$ și $\lambda$ constanți, care se reduce la (1) pentru $a = o$. De aceea putem spune că soluțiile ei de forma (2) constituesc o generalizare a funcțiilor lui Bessel, deși după cum vom vedea au un caracter cu totul deosebit.

2). Pentru integrarea ecuației (3) voi folosi o dezvoltare în serie simplă a funcțiilor analitice de două sau mai multe variabile reale, pe care am dat-o într-o lucrare mai veche. Anume, dacă $u\ (r)\ \theta$ este o funcție analitică, regulată în furul originei, de variabilele polare $r$ și $\theta$, ea admite o dezvoltare unică de forma următoare:

$$U(r, \theta) = \sum_{k=o}^{\infty} U_k(r, \theta)\ r^{2k} \tag{4}$$

unde $U_k\ (r, \theta)$ sînt funcțiuni armonice regulate în jurul originei, fie de ex.:

$$U_k(r, \theta) = \sum_{k=o}^{\infty} (A_n^k \cos\ n\theta + B_n^k \sin\ n\theta)\ r^n \tag{5}$$

Dacă substituim expresiile (5) în (4) găsim dezvoltarea dată de Serge Bernştein pentru funcţiile analitice de două variabile reale :

$$U(r,\theta)=\sum_{n=o}^{\infty}[A_n(r^2)\cos n\theta+B_n(r^2)\sin n\theta]r^n \qquad (4')$$

unde :

$$A_n(r^2)=\sum_{k=o}^{\infty}A_n^k r^{2k};\ B_n(r^2)=\sum_{k=o}^{\infty}B_n^k r^{2k} \qquad (6)$$

Din (4) deducem uşor că :

$$\triangle U=\sum_{k=o}^{\infty}V_k(r,\theta)\,r^{2k} \qquad (7)$$

unde $V_k(r,\theta)$ sînt funcţii armonice, legate de funcţiile (5) prin relaţiile:

$$V_k(r\theta)=4(k+1)\left[(k+1)U_{k+1}+r\frac{\partial U_{k+1}}{\partial r}\right] \qquad (8)$$

Aceste date sînt suficiente pentru integrarea ecuaţiei (3).

3). Ecuaţia (3) fiind de tip eliptic, integrara ei generală este o funcţie analitică, deci o putem căuta sub forma (4). Substituind în (3) şi ţinînd seama de (7) şi (8), precum şi de unicitatea dezvoltării (4), obţinem relaţiile următoare :

$$V_o(r,\theta)+4\lambda U_o(r,\theta)=o$$
$$V_k(r,\theta)+a\,V_{k-1}(r,\theta)+4\lambda U_k(r,\theta)=o \qquad (9)$$
$$(k=1,2,3,\ldots)$$

care definesc din aproape în aproape coeficienţii armonici $U_k(r,\theta)$, dacă vom considera pe $U_o(r,\theta)$ ca arbitrar. In felul acesta obţinem integrala generală a ecuaţiei (3), depinzînd linear de coeficienţii :

$$A_n^o \text{ şi } B_n^o \text{ ai lui } U_o(r,\theta).$$

Dacă în (9) înlocuim pe $V_k(r,\theta)$ prin expresiile (8), obţinem relaţiile de recurentă diferenţială ce definesc pe $U_1, U_2,\ldots$

$$U_1(r,\theta)+\gamma\frac{\partial U_1}{\partial r}=-\lambda U_o(r_1\theta) \qquad (9')$$

$$(k+1)\left[(k+1)U_k+\gamma\frac{\partial U_{k+1}}{\partial r}\right]=-(ak^2+\lambda)U_k-akr\frac{\partial U_k}{\partial r}$$

Ţinînd seama de dezvoltările (5) care se înlocuiesc cu (9) obţinem din prima relaţie :

$$A_n^1=-\frac{\lambda}{n+1}A_n^o,\ B_n^1=-\frac{\lambda}{n+1}B_n^o \qquad (10)$$

iar pentru $k \geq 1$ celelalte relații ne dau:

$$(k+1)\ (k+n+1)A_n^{k+1} = -[ak\,(k+n)+\lambda]A_n^k \qquad (11)$$

$$(k+1)\ (k+n+1)B_n^{k+1} = -[ak\,(k+n)+\lambda]B_n^k$$

din care deducem:

$$A_n^k = (-1)\frac{k\lambda[(n+1)a+\lambda][2(n+2)a+\lambda]\ldots[(k-1)(n+k-1)a+\lambda]}{k!\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+k)}A_n^o \qquad (12)$$

$$(k=1, 2, 3, \ldots)$$

și o expresie analogă pentru $B_n^k$. Și cum $A_n^o$ și $B_n^k$ sînt arbitrari, mai putem scrie și:

$$A_n^k = (-1)\frac{\lambda[(n+1)a+\lambda][2(n+2)a+\lambda]\ldots[(k-1)(n+k-1)a+\lambda]}{k!\,(n+k)!}A_n^o \qquad (12')$$

Inlocuind în (5) găsim expresia coeficienților armonici ai integralei generale scrisă sub forma (4):

$$U_k(\gamma, \theta) =$$

$$= (-1)^k\frac{\lambda}{k!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(n+1)a+\lambda]\ldots.[(k-1)(n+k-1)a+\lambda)]}{(n+k)!}[A_n^o\cos\theta + B_n^o\sin\theta]r^n \qquad (13)$$

Integrala generală va fi deci dată de (4) unde funcțiile armonice $u_k$ au expresia (13) cu $u_o$ arbitrară.

Dacă vom scrie integrala generală sub forma (4'), funcțiile transcendente ce se introduc vor fi:

$$A_n(r) = r^n\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\lambda[(n+1)a+\lambda]\ldots[(k-1)(n+k-1)a+\lambda]}{(n+k)!}r^{2k}\right\} \qquad (14)$$

sau dacă punem: $a = \alpha\,\lambda$

$$A_n(r) = r^n\left\{1 + \right. \qquad (14')$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{[(n+1)\alpha+1]\ldots.[(k-1)(n+k-1)\alpha+1]}{(n+k)!}(\sqrt{\lambda}\,r)^{2k}\right\}$$

Acestea sînt funcțiile transcedente ce generalizează functiile lui Bessel. In adevăr, cînd $a = o$, $\lambda = \omega^2$ ele se reduc la:

$J_n(\omega r)$ cum se vede ușor.

Dar, spre deosebire de functiile lui Bessel care sînt funcţii întregi, raza de convergenţă a seriilor (14) este finită. In adevăr:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{A_n^{k+1}}{A_n^k}\right| = \lim_{k\to\infty} r^2\,\frac{[a(k+n)+\lambda]}{(k+1)(k+n+1)} = |a|r^2$$

şi deci raza de convergenţă este $|a|^{-1/2}$.

Avem deci în aceste transcedente o generalizare, de o altă natură, a funcţiilor lui Bessel de ordin întreg.

Putem găsi uşor ecuaţia diferenţială, la care satisfac aceste funcţii, dacă în ecuatia (3) punem:

$$u = w(r)e^{in\theta}$$

Separînd variabilele, găsim că $w\ (r)$ verifică ecuaţia:

$$r^2(ar^2+1)w^{1\prime}+r(ar^2+1)w^1+[4\lambda r^2-n^2(ar^2+1)]w=o \qquad (15)$$

care este ecuaţia diferenţială pe care o satisfac funcţiile (14), şi care se reduce în cazul $a = o$, la ecuaţia clasică a lui Bessel.

Primit la redacţie la 10 II 1956.

## ОБ УРАВНЕНИИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И О НОВОМ ОБОБЩЕНИИ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

(Краткое содержание)

Автор задаётся целью интегрировать уравнение (3) без предельных условий, где △ оператор Лапласа, стараясь найти в виде (4), действительной для любой аналитической функции, если являются гармоническими функциями. Он находит гармонические коеффициенты в виде (13) где A и B произвольные и если поставить в виде (4′) то $A_n$ $(r)$ и $B_n$ $(r)$ получают форму (14). Эти функции можно рассмаривать как обобщение функций Бесселя, к которым они сводятся, когда $a=o$. Они удовлетворяют уравнению (15).

## SUR UN ÉQUATION AUX DÉRIVÉET PARTIELLES DU SECOND ORDRE ET UNE NOUVELLE GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS DE BESSEL

(Résumé)

L'auteur se propose d'intégrer sans conditions aux limites, l'équation (3) où △ est l'opérateur de Laplace, en cherchant ce $u\ (r, \theta)$, sous la forme (4), valable pour toute fonctions analytique, si $U_k\ (V, \theta)$ sont des functions harmoniques. Il trouve les coefficients harmoniques sous la forme (13), avec $A_n^o$ et $B_n^o$ arbitraires, et si l'on met $u\ (V_1\ \theta)$ sous la forme (4′) alors $A_n\ (r)$ et $B_n\ (r)$ ont la forme (14). Ces fonctions peuvent-être considérées comme une généralisation des fonctions de Bessel auxquelles elles se déduisent lorsque $a = o$. Elles vérifient l'équation (15).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII — 1956 ; Fascicola 1-2

512.9

# ASUPRA UNOR ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

do MARCEL N. ROŞCULEŢ

In lucrarea de faţă ne propunem să stabilim o teoremă de tip E. Almansi [1] pentru o clasă de ecuaţii cu derivate parţiale, care pot fi aduse printr-o transformare oarecare la forma

$$N(U) = \frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}} \cdot \frac{\partial^{p_2}}{\partial x_2^{p_2}} \cdots \frac{\partial^{p_\alpha}}{\partial x_\alpha^{p_\alpha}} \cdot \Delta_{1, s_1}^{q_1} \Delta_{2\, s_2}^{q_2} \cdots \Delta_{\beta, s_\beta}^{q_\beta} (U) = 0 \tag{1}$$

unde $\Delta_{i, s_i}^{q_i}$ sînt operatorii lui Laplace

$$\Delta_{i, s_i}^{q_i} = \left( \frac{\partial^2}{\partial y_{1, i}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_{2, i}^2} + \cdots \frac{\partial^2}{\partial y_{s_i, i}} \right)^{q_i} \tag{2}$$

iteraţi de $q_i$ ori, şi astfel ca mulţimile de $s_i$ elemente

$$m_{s_i} = \left\{ y_{k, i} \right\} \qquad k = 1, 2, \ldots, s_i \tag{3}$$

să fie disjuncte între ele, cît şi cu mulţimile de un singur element

$$M_\alpha = x_\alpha. \tag{3'}$$

Pentru început vom arăta că ecuaţia $N(U)$ iterata de $p$ ori admite o soluţie de forma

$$\Phi = \Phi_o + \varrho^n \Phi_1 + \ldots + \varrho^{(p-1)_n} \Phi_{p-1} \tag{4}$$

$\Phi_i$ fiind solutii ale ecuaţiei $N(U)$ iar $\varrho^n$ fiind funcţia elementară de $x_j$ şi $y_{ik}$ avînd expresia

$$\varrho^n = \prod_{j=1}^{\alpha} x_j^{p_j} \prod_{i=1}^{\beta} (y_{1, i}^2 + y_{1, i}^2 + \ldots + y_{s_i, i}^2)^{q_i} \tag{5}$$

cu

$$\sum_{i=1}^{\alpha} p_j + 2 \sum_{i=1}^{\beta} q_i = n$$

Intrucît mulţimile $M_{s_i}$ şi $M_\alpha$ sînt disjuncte, operatorul (1) se compune dintr-o succesiune de $\alpha + \beta$ operatori disjuncţi, pe care îi vom aplica succesiv. Din acelaş motiv funcţia elementară $\varrho^n$ este produsul

a $\alpha + \beta$ expresii algebrice de variabile separate. Astfel dacă aplicăm operatorul

$$\triangle^{q}_{i,\,s_i}$$

lui $\varrho^n$, acest operator nu influenţează decît pe

$$r^{2q_i}_{s_i} = \left(y^2_{1,\,i} + y^2_{2,\,i} + \ldots + y^2_{s_i,\;i}\right)^{q_i}$$

celelalte produse comportîndu-se ca nişte constante, deoarece mulţimile $M_{s_i}$ şi $M_\alpha$ sînt disjuncte.

Să aplicăm operatorul (2) funcţiei

$$\Phi = \varrho^n \cdot \psi \tag{6}$$

şi să notăm pentru simplificare

$$\triangle^{q_i}_{i,\,s_i} = \triangle^{q}_{s}$$

$$r^{2q_i}_{s_i} = r^{2q}_{s}$$

Avem

$$\triangle_s\,(\varrho^n\,\psi) = \frac{\varrho^n}{r^{2q}_s}\;\triangle_s\,(r^{2q}_s \cdot \psi)$$

şi

$$\triangle_s\,(r^{2q}_s \cdot \psi) = r^{2q}_s \cdot\; \triangle_s\,(\psi) + 4\,qr^{2q-1}\frac{\partial\,\psi}{\partial\,r_s} + 2q\left[2\,(q-1)+s\right]\,r^{2q-2}\,\psi$$

$$\triangle^{q}_{s}\,(r^{2q}_s \cdot \psi) = r^{2q}_s\;\triangle^{q}_{s}\,(\psi) + A_1\,r^{2q-1}_s\frac{\partial}{\partial\,r_s}\left[\triangle^{q-1}\,(\psi)\right] + \ldots \tag{7}$$

$$+ A_{2m}\,r^{2q-2m}\;\triangle^{q-m}\,(\psi) + A_{2m+1}\,r^{2q-2m-1}\frac{\partial}{\partial\,r_s}\left[\triangle^{q-m}\,(\psi)\right] + \ldots$$

$$+ A_{2q-1}\cdot\,r_s\cdot\frac{\partial\,\psi}{\partial\,r_s} + A_{2q}\cdot\,\psi$$

unde $A_i$ sînt constante reale, bine determinate.

Tot astfel dacă aplicăm operatorul

$$\frac{\partial^{p_j}}{\partial x^{p_j}_j} \tag{8}$$

funcţiei (6), avem, suprimînd şi de astă dată indicele $j$,

$$\frac{\partial\,p}{\partial\,x^p}(\varrho^n\,\psi) = \frac{\varrho^n}{x^p}\;\cdot\;\frac{\partial^p}{\partial\,x^p}\;(x^p\,.\,\psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^p \cdot \psi) = x^p \frac{\partial \psi}{\partial x} + p\, x^{p-1} \psi \tag{9}$$

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}(x^p \psi) = x^p \frac{\partial^p \psi}{\partial x^p} + B_1 x^{p-1} \frac{\partial^{p-1} \psi}{\partial x^{p-1}} + \ldots + B_{p-1} x. \frac{\partial \psi}{\partial x} + B^p \psi$$

$B_i$ fiind numere reale ce se pot obţine cu uşurinţă.

Aplicînd succesiv operatorii care compun pe $N$, din (7) şi (9) obţinem astfel pe $N(\Phi)$. Rămîne acum să arătăm că dacă aplicăm încă odată operatorul $N$, fiecare termen al lui $N(\Phi)$ conţine cel puţin operatorul $N$ aplicat funcţiei $\psi$. Aceasta este echivalent cu a arăta că aplicînd încă odată operatorul $\triangle_s^q$ lui (7) sau operatorul (8) lui (9) fiecare termen va conţine funcţia $\psi$, asupra căreia operează cel puţin operatorul (2) sau (9), respectiv.

Intr-adevăr, aplicînd operatorul $\triangle_s^q$ termenului general din (7)

$$A_{2m} r_s^{2q-2m} \triangle^{q-m}(\psi) + A_{2m+1} r^{2q-2m-1} \frac{\partial}{\partial r_s}\left[\triangle^{q-m}(\psi)\right]$$

şi ţinînd seamă de faptul că $r_s$ are exponentul maxim $2q-2m$ operatorul de ordinul cel mai mic care operează asupra lui $\psi$ este

$$\triangle_s^q$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial r_s}(\triangle_s^q).$$

şi obţinem astfel următorul rezultat:

Dacă $\Phi_0$ şi $\Phi_1$ sînt două soluţii oarecare ale ecuaţiei $N(U)$, funcţiunea

$$\Phi = \Phi_0 + \varrho^n \Phi_1$$

este o soluţie a ecuaţiei (1) iterate. Tot astfel dacă

$$\Phi_0, \Phi_1 \ldots \Phi_{p-1}$$

sînt $p$ soluţii ale ecuaţiei (1), funcţiunea

$$\Phi = \Phi_0 + \varrho^n \Phi_1 + \ldots + \varrho^{(p-1)n} \Phi_{p-1} \tag{10}$$

este o soluţie a ecuaţiei (1) iterată de $p$-ori.

2. Vom arăta acum că o soluţie $\Phi$ a ecuaţiei (1) iterată de $p$ ori —în anumite condiţii restrictive asupra funcţiilor $\Phi_i$ cît şi asupra domeniului în care sînt definite—se poate totdeauna pune sub forma (10).

Fie $\Phi$ o solutie a ecuaţiei

$$N^{(p)}(U) = 0$$

urmează că trebuie să găsim o funcţie $\varphi$ care să îndeplinească următoarele conditii

$$N^{(p-1)}(\varphi)=0 \tag{11}$$

$$N^{(p-1)}(\varrho^n \varphi - \Phi)=0 \tag{12}$$

cu

$$N^{(p)}(\Phi)=0 \tag{13}$$

Din (7) şi (9) se vede imediat că dacă aplicăm operatorul $N^{p-1}$ produsului

$$\varrho^n \varphi$$

un termen general va conţine totdeauna funcţia $\varphi$ asupra căreia operează $N$ iterat de $p$-2 ori. Luînd pe

$$N^{(p-2)}(\varphi)=\varphi^*$$

sa funcţie necunoscută, şi scriind pe $N$ ca un produs de $\alpha+\beta$ operatori

$$N=\delta_1^{p_1}\cdot\ \delta_2^{p}\ \dots\ \delta_{\alpha}^{p\alpha}\cdot\ \theta_1^{q_1}\ \theta_2^{q_2}\dots\ \theta_{\beta}^{q}\beta \tag{14}$$

urmează că ecuaţia (12) se scrie în modul următor:

$$A\alpha_1 \dots \alpha_s, \beta_1 \dots \beta_u \quad \sum_r^{-\frac{\varrho n}{s+u}} \frac{N(\varphi^*)}{\delta_{\alpha_1}^{p\alpha_1}\cdot\ \delta_{\alpha_2}^{p\alpha_2}\dots\ \delta_{\alpha s}^{p\alpha_s}\ \theta_{\beta_1}^{q\beta_1}\ \theta_{\beta_2}^{q\beta_2}\dots\ \theta_{\beta u}^{q\beta_u}} =$$

$$= N^{(p-1)}(\Phi) \tag{15}$$

unde s-a notat $r^{s+u}$, produsul funcţiilor elementare din $\varrho^n$, corespunzătoare operatorilor de la numitor. Deoarece $\psi$ conform ecuaţiei (11), este o soluţie a ecuaţiei

$$N(\varphi^*)=0$$

urmează că suma $\sum$ din (15) se întinde la toate combinaţiile posibile, făcute la numitor, cu condiţia ca cel puţin un operator $\delta$ sau $\theta$ să figureze la numitor, adică ecuaţia (15) este de ordinul *n-1*.

Acestea fiind spuse să observăm că avem:

$$\Delta_s^{-}(\varrho^n.\ \varphi)=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{\partial}{\partial y_i}\ (\varrho^n.\ \varphi)\ \right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\varrho^n\ \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial r_s}\cdot\frac{\partial r_s}{\partial y_i}+\right.$$

$$\left.+\varphi\frac{\partial\varrho_n}{\varrho y_i}\right)=\frac{4\varrho^n}{n^2}\cdot\frac{\varrho^2}{r_s^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2}+\frac{4\varrho^n}{n}\cdot\frac{\varrho}{r_s^2}\ (3+s)\ \frac{\partial\varphi}{\partial r}+s\ \frac{\varrho^n}{r_s^2}\cdot\varphi \tag{16}$$

unde am notat cu $\Delta_s$ operatorul laplacian cu $s$ variabile. In mod analog avem şi pentru operatorii liniari

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\ (\varrho^n\ \varphi)=\varrho^n\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\cdot\frac{\varrho}{x_k}+\varphi\ \frac{\varrho^n}{x_k} \tag{17}$$

Introducînd (16) și (17) în (15) obținem următoarea ecuație diferențială în $\varphi^*$

$$A_1\varrho^{n-1}\frac{\partial^{n-1}\varphi^*}{\partial\varrho^{n-1}} + A_2\,\varrho^{n-2}\frac{\partial^{n-2}\varphi^*}{\partial\varrho^{n-2}} + \ldots$$

$$\ldots + A_{n-1}\,\varrho\frac{\partial\varphi^*}{\partial\varrho} + A_n\,\varphi^* = \Phi^* \qquad (12')$$

cu

$$N^{(p-1)}(\Phi) = \Phi^*$$

și

$$N^{(p-2)}(\varphi) = \varphi^* \qquad (11')$$

ca o consecință a sistemului (12) și (11), și unde $\Phi^*$ este cunoscută.

Ecuația (12′) este de tip Euler, și dacă $m_1$, $m_2$ ... $m_{n-1}$ sunt rădăcinile ecuației caracteristice, integrala generală a ecuației fără partea a doua este dată de

$$\varphi^{**} = C_1\,\varrho^{m_1} + C_2\,\varrho^{m_2} + \ldots\, C_{n-1}\,\varrho^{m_{n-1}} \qquad (18)$$

$C_1$, $C_2$ ... $C^{n-1}$ fiind funcții arbitrare pe hipersuprafața

$$\varrho^n = 1$$

Integrala generală a ecuației (12′) cu partea doua se obține din (18) determinînd pe $C_k$ cu metoda variației constantelor.

Astfel, expresia care dă pe $C_k'$ ($C_k'$ fiind derivata în raport cu $\varrho$ a lui $C_k$) are la numărător pe $\varrho$ la puterea :

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{k-1} + m_{k+1} + \ldots + m_{n-1} - 1 - 2 - \ldots - (n-3) - (n-1)$$

și la numitor pe $\varrho$ la puterea

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} - 1 - 2 \ldots - (n-2)$$

deci ecuația diferențială care determină pe $C_k$ este

$$\frac{\partial C_k}{\partial\varrho} = B_k \cdot \Phi^* \cdot \varrho^{-m_k - 1}$$

$B_k$ fiind o constantă cunoscută. Prin urmare, $C_k$ sunt dați de

$$C_k = B_k \int \Phi^*\,\varrho^{-m_k-1}\,d\varrho + \Gamma_k \qquad (19)$$

$\Gamma_k$ fiind funcții arbitrare pe suprafața $\varrho_n = 1$.

Să presupunem acum că $\omega^*$, soluție a ecuației (1)′ este de forma

$$\varphi^* = \varrho^a\,\psi\,(u_1, u_2, \ldots, u_{n-4}) \qquad (20)$$

sau printr-o schimbare convenabilă de variabile, se reduce la forma (20) rămînînd în acelaşi timp soluţie a ecuaţiei (1), atunci $\varphi^{**}$ este dat de (18) cu $C_k$ daţi de

$$C_k = B_k \int_0^p \varphi^* \varrho^{-m_k - 1} d\varrho \tag{19'}$$

şi este o soluţie a sistemului (11').

Cît priveşte asupra regiunei în care sînt definite funcţiile $\varphi$ şi $\psi$, din (19') se vede că trebuie să îndeplinească aceiaşi condiţie impusă de E. Almansi.

Primit la redacţie la 1 IV 1956

## BIBLIOGRAFIE

1. *E. Almansi*—Sull'integratione dell'eq. $\triangle^{2n} = 0$; Annali di Matematica (1899).

## О НЕКОТОРЫХ УРОВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Краткое содержание)

В этой работе автор устанавливает функцию типа Е. Алманси, для решений итерических уравнений (I).

## SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(Résumé)

Dans ce travail l'auteur établit une formule de type E. Almansi pour les solutions de l'équation (1) itérée.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1-2

517.9 : 512.9

# DEFINIREA MONOGENEITĂȚII CU AJUTORUL DERIVATELOR POLIDIMENSIONALE ORIENTATE

de MARCEL N. ROȘCULEȚ

1. Să considerăm o algebră $A_3$ asociativă și comutativă cu trei elemente ale bazei

$$1, \theta_1, \theta_2$$

și cu legile de înmulțire

$$\theta_1^2 = a_{110} + a_{111}\theta_1 + a_{112}\theta_2$$

$$\theta_1\theta_2 = a_{120} + a_{121}\theta_1 + a_{122}\theta_2$$

care după cum se știe, [1] o determină complet. O funcție f (ω)

$$f(\omega) = U_o + \theta_1 U_1 + \theta_2 U_2$$

$$\omega = x_o + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$$

este monogenă într-un punct dacă avem simultan

$$\theta \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_i} = \theta_i \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_j} \qquad (i \neq j,\ \theta_o = 1) \tag{1}$$

în punctul considerat.

2. Intr-o lucrare [2] N. Ciorănescu a introdus noțiunea de derivată polidimensională orientată care este definită în spațiu ca limita

$$\frac{\partial^3 f(x_o, x_1, x_2)}{\partial L^3(x_o, x_1, x_2)} =$$

$$= \lim_{M_i \to M} \frac{f(M) - f(M_1) - f(M_2) - f(M_3) + f(M_4) + f(M_5) + f(M_6) - f(M_7)}{\text{vol } MM_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7}$$

$M$ și $M_i$ fiind vîrfurile unui paralelipiped, tridreptunghic oarecare. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sînt consinusii directori ai direcțiilor $MM_i$ $(i = 1, 2, 3,)$ atunci această limită este

$$\frac{\partial^3 f(x_o, x_1, x_2)}{\partial L^3(x_o, x_1, x_2)} = \prod_{i=1}^{3} \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_o} + \beta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f \tag{2}$$

adică o succesiune de trei derivate după direcţiile $MM_i$ (i = 1, 2, 3,).

Intr-o lucrare anterioară [3] am extins acest rezultat înlocuind acest paralelipiped cu un paralelipiped curbiliniu oarecare cu muchiile curbele parametrice ale lui

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w) + \mathbf{i}\, x_0(u, v, w) + \mathbf{j} x_1(u, v, w) + \mathbf{k} x_2(u, v, w)$$

şi am găsit că derivata tridimensională orientată are expresia :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial V^3(u, v, w)} = \frac{D(x_0, x_1, x_2)}{D(u, v, w)} \left| \frac{df}{d\,\mathbf{r}_{uvw}} + \sum_u \frac{d}{d\mathbf{r}_u}\left(\frac{df}{d\,\mathbf{r}_{vw}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{d\,\mathbf{r}_u}\left[\frac{d}{d\,\mathbf{r}_v}\left(\frac{df}{d\,\mathbf{r}_w}\right)\right] \right| \qquad (3)$$

cu

$$\frac{d}{d\,\mathbf{r}_u} = \frac{\partial x_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\frac{d}{d\,\mathbf{r}_{uv}} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial u \partial v} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial u\, \partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \ldots$$

unde s-a obţinut rezultatul că derivata (3) se reduce la derivarea succesivă după tangentele la curbele parametrice dacă componentele lui $\mathbf{r}$ sînt de forma

$$x_i(u, v, w) = f_i(u) + g_i(v) + h_i(w) \qquad (i = 0, 1, 2)$$

3. Să considerăm acum în algebra $A^3$ o funcţie hipercomplexă

$$f[\mathbf{r}(u, v, w), \theta_1, \theta_2] = U_0(u, v, w) + \theta_1 U_1(u, v, w) + \theta_2 U_2(u, v, w)$$

oarecare, pe care o notăm $f(\omega)$ fără să se înţeleagă prin aceasta că este monogenă şi să formăm raportul :

$$\frac{\Delta^3 f(\omega)}{\Delta L^3(u, v, w)} \quad \frac{f(\omega) - f(\omega_1) - f(\omega_2) - f(\omega_3) + f(\omega_4) + f(\omega_5) + f(\omega_6) - f(\omega_7)}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3)}$$

$\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ fiind o situate pe curbele (4)

$$(C_1) \quad \begin{cases} \varphi_2(u, v, w) = a_2 \\ \varphi_3(u, v, w) = a_3 \end{cases}$$

$$(C_2) \quad \begin{cases} \varphi_3(u, v, w) = a_3 \\ \varphi_1(u, v, w) = a_1 \end{cases}$$

$$(C_3) \quad \begin{cases} \varphi_1(u, v, w) = a_1 \\ \varphi_2(u, v, w) = a_2 \end{cases}$$

definite de suprafețele $\varphi_i(u, v, w) = a_i$, care au comun punctul

$$\omega = u + \theta_1 v + \theta_2 w.$$

Cu notațiile

$$\alpha_1 = \frac{dv}{du}, \quad \alpha_2 = \frac{dw}{du};$$

$$\beta_1 = \frac{\delta v}{\delta u}, \quad \beta_2 = \frac{\delta w}{\delta u};$$

$$\gamma_1 = \frac{\Delta v}{\Delta u}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta w}{\Delta u};$$

limita lui (4) este

$$\frac{\partial^3 f(\omega)}{\partial L^3(C_1, C_2 C_3)} = -\frac{1}{A}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial u^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3}\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \frac{\partial^3 f}{\partial w^3}\alpha_2\beta_2\gamma_2\right] -$$

$$-\frac{1}{A}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial v}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial w}(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)\right.$$

$$\left. -\frac{1}{A}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial v^2 \partial u}(\alpha_1\beta_1 + \beta_1\gamma_1 + \gamma_1\alpha_1) + \frac{\partial^3 f}{\partial w^2 \partial u}(\alpha_2\beta_2 + \beta_2\gamma_2 + \gamma_2\alpha_2)\right] -\right.$$

$$-\frac{1}{A}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial v^2 \partial w}(\alpha_1\beta_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_1\alpha_2 + \gamma_1\alpha_1\beta_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 f}{\partial w^2 \partial v}(\alpha_2\beta_2\gamma_1 + \beta_2\gamma_2\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2\beta_1)\right] -$$

$$-\frac{1}{A}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v \partial w}(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) =\right.$$

$$= -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \alpha_1\frac{\partial}{\partial v} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial}{\partial v} + \beta_2\frac{\partial}{\partial w}\right) \times$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + \gamma_1\frac{\partial}{\partial v} + \gamma_2\frac{\partial}{\partial w}\right) f$$

și cu (5)

$$A = (1 + \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2)(1 + \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2)(1 + \gamma_1\theta_1 + \gamma_2\theta_2)$$

Să punem acum condiția că derivata astfel obținută nu depinde de $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, și să fie de exemplu egală cu

$$-\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}$$

Alegerea aceasta nu are nici o importanță, pentru rezultatul care se obține, după cum se va vedea imediat.

Separînd deci pe $-\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}$ urmează că toţi termenii ce mai rămîn sînt nuli, şi obţinem cu uşurinţă, remarcînd că $A$ se deduce din (5) înlocuind pe $\frac{\partial}{\partial u}$ cu 1, $\frac{\partial}{\partial v}$ cu $\theta_1$, $\frac{\partial}{\partial w}$ cu $\theta_2$ următoarele condiţii

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 f}{\partial v^3} = \theta_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial w^3} = \theta_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}, \\
&\frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial v} = \theta_1 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial w} = \theta_2 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3} \\
&\frac{\partial^3 f}{\partial v_2 \partial w} = \theta_1^2 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial w^2 \partial u} = \theta_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3} \\
&\frac{\partial^3 f}{\partial v^2 \partial w} = \theta_1^2 \theta_2 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial w^2 \partial v} = \theta_1 \theta_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3} \\
&\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v \partial w} = \theta_1 \theta_2 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}
\end{aligned} \tag{6}$$

Dar relaţiile (6) sînt identice cu (1) cărora se aplică operatorii diferenţiali

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}, \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \ldots, \frac{\partial^2}{\partial w^2}.$$

Putem deci enunţa următorul rezultat:

Pentru ca o funcţie $f(\omega) = U_o + \theta_1 U_1 + \theta_2 U_2$ să aibă derivata tridimensională orientată, invariantă faţă de un paralelipiped curbiliniu oarecare din spaţiu, este necesar ca să difere de o funcţie monogenă cel mult cu un polinom arbitrar, de gradul doi în $u$, $v$, $w$ cu coeficienţi hipercomplexi. Reciproca se stabileşte imediat şi se găseşte că o funcţie monogenă de $\omega$ are derivata tridimensională orientată, oricare ar fi paralelipipedul curbiliniu, egală cu

$$-\frac{d^3 f}{d\omega^3}$$

deci independentă de curbele ($C_i$). Deducem de aici că invarianţa derivatei tridimensionale orientate defineşte funcţiile monogene, în afara unui polinom arbitrar de gradul doi cu coeficienţi în algebra $A_3$.

Rezultatul obţinut se extinde cu uşurinţă la orice algebră asociativă şi comutativă de ordinul $n$, locul polinomului de ordinul doi fiind luat de astă dată de un polinom de gradul $n$—1.

4. Dacă facem restricţiuni asupra curbelor $C_i$, atunci clasa funcţiilor care se bucură de proprietrtea invarianţei derivatei polidimensionale se lărgeşte.

Intr-adevăr, pentru cazul bidimensional cu

$$A=(\alpha+i)(\beta+i)$$

cu restricția $\alpha\beta=a$ (const) avem pentru

$$\frac{\partial^3 f}{\partial L^2(C_1C_2)}=\frac{1}{A}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\alpha\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}(\alpha+\beta)\right]=-i\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}$$

următoarele condiții pentru $P$ și $Q$

$$a\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}=(a-1)\frac{\partial^2 Q}{\partial u\,\partial v}$$

$$a\frac{\partial^2 Q}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial v^2}=-(a-1)\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v}$$

din care se deduce că $P$ și $Q$ sînt soluții ale ecuației cu derivate parțiale de ordinul patru

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right]\left[a^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right]U=O \qquad (7)$$

a cărei integrală generală este $U=f(u+iv)+g(u+\theta v)$, $f$ și $g$ fiind funcții monogene de variabilele $u+iv,(i^2+1=0)$ și $u+\theta v,(\theta^2+a^2=O)$ respectiv.

Pentru $a=\pm 1$ ecuația (7) este ecuația lui Laplace iterată și cădem astfel peste rezultatul lui N. Ciorănescu [4].

5. In aceiași situație punînd

$$\frac{\partial^2 f}{\partial L^2(C_1,C_2)}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

și

$$\alpha+\beta=a$$

obținem pentru $P$ și $Q$ legăturile

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}+a\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v}\right)=O$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial v^2}+a\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}\right)=O$$

care conduce la următoarea ecuație diferențială de ordinul patru pentru ambele funcții $P$ și $Q$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\left[\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+2\frac{\partial}{\partial u\,\partial v}\right]U=O$$

a cărei integrală generală este

$$U = f(u + iv) + g(u + \theta v)$$

cu $f$ şi $g$ funcţii monogene de variabilele $u + iv, (i^2 + 1 = O)$ şi $u + \theta v_1 (\theta^2 + 2a\theta + 1 + a^2 = O)$ respectiv.

## BIBLIOGRAFIE

1. *Marcel N. Roşculeţ*—Studii şi cercetări Matematice, anul VI, nr. 1-2,1955.
2. *Nicolae Ciorănescu*—L'enseignement Math. 1953, vol. 23, p. 220.
3. *Marcel N. Roşculeţ*—Bul. Ştiinţific, secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, Tom. VI, nr. 4, 1954, d. 811-818.
4. *Nicolae Ciorănescu*— Matematica, vol. vol. XII, 1936, p. 26.

## ЧАСТНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И МОНОГЕНЫЕ ФУНКЦИИ

(Краткое содержание)

Автор показывает, что моногенная функциия, определённая в алгебре отношением $\theta^2 = 1$, имеет трёхмерную производную независимую от направлений трёхгранника и взаимно.

## SUR LES DÉRIVÉES PARTIELLES POLYDIMENSIONELLES ET LES FONCTIONT MONOGÈNES

(R é s u m é)

L'auteur montre que les fonctions monogènes dans l'algèbre définie par la relation $\theta^3 = 1$ ont la dérivée tridimensionnelle indépendante par rapport au triédre considéré et reciproquement.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956: Fascicola 1-2

## CHIMIE

541.1

# ECHILIBRUL LICHID-VAPORI AL SISTEMELOR BINARE ECUAȚIE RENTRU COEFICIENȚII DE ACTIVITATE

de EM. A. BRATU

Echilibrul lichid-vapori a fost studiat în foarte numeroase lucrări experimentale și teoretice, cu scopul de a pune la dispoziție datele necesare pentru proiectarea coloanelor de rectificare și pentru a contribui la cunoașterea stării amestecurilor omogene de lichide.

Determinările experimentale întîmpină greutăți importante, după cum arată nepotrivirile între rezultatele mai multor cercetători. Nesiguranța experimentării se agravează în regiunile extreme ale concentrațiilor. Există metode pentru verificarea validității termodinamice a rezultatelor experimentale [4], [5] și metode pentru corectarea lor [1].

O altă categorie de lucrări [6], ajung la ecuații care, folosind cît mai puține date experimentale, servesc pentru calcularea coeficienților de activitate, ca apoi, împreună cu presiunile de vapori ale substanțelor pure, să se deducă echilibrul lichid-vapori, adică relația între concentrația componenților în lichid și în vapori.

Aproape toate aceste din urmă lucrări se bazează pe ecuația termodinamică a lui Gibbs-Duhem:

$$x_1\left(\frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial x_1}\right)_T - x_2\left(\frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial x_2}\right)_T = 0 \qquad (1)$$

care reprezintă o relație între fracțiile molare $x$ și coeficienții de activitate $\gamma$. Indicii 1 și 2 se referă la cei doi componenți ai amestecului.

In forma

$$\left(\frac{\partial \lg \gamma_2}{\partial x_2}\right)_T \Big/ \left(\frac{\partial \lg \gamma_1}{\partial x_1}\right)_T = \frac{x_1}{x_2} = n \qquad (2)$$

se vede că ecuația Gibbs-Duhem reprezintă relația între pantele curbelor $\lg \gamma$, în funcție de $x$, (raportul pantelor este egal cu raportul molar n).

Ecuația Gibbs-Duhem este o condiție necesară pe care trebuie să o îndeplinească coeficienții de activitate, dar care nu este suficientă pentru calcularea lor.

Scatchard și Hamer [7] au introdus termenul $G^E$ — excesul energiei libere — cu ajutorul căruia coeficienții de activitate pot fi definiți prin relațiile [3] :

$$\ln \gamma_1 = \frac{\partial G^E}{RT\ \partial m_1} \tag{3}$$

$$\ln \gamma_2 = \frac{\partial G^E}{RT\ \partial m_2} \tag{4}$$

adică prin derivata parțială a excesului energiei libere față de numărul de moli $m$ ai componentului respectiv.

Wohl [9] a arătat că ecuațiile folosite curent pentru corelarea coeficienților de activitate se pot deduce din ecuația generală :

$$\frac{\mathbf{G}^E}{RT\ (\Sigma V_i x_i)} = \Sigma_{ih}\, a_{ih}\, z_i\, z_h + \Sigma_{ihj}\, a_{ihj}\, z_i z_h z + \Sigma_{ihjl}\, a_{ihjl}\, z_i\, z_h\, z_j\, z_l + \ldots. \tag{5}$$

numită ecuația cu mai mulți indici. In această ecuație, $\mathbf{G}_E = G_E / (m_1 + m_2 + \ldots)$ este energia liberă molară de exces; $a_{ih}$, $a_{ihj}$ etc. sînt constante empirice; $V_i$ este volumul molar efectiv al componentului $i$; $z_i$ este fracția volumică molară a componentului $i$,

$$z_i = \frac{V_i\, x_i}{V_1\, x_1 + V_2\, x_2 + \ldots} \tag{6}$$

Indicii $i\ h\ j$,... se referă la componenții sistemului, cu observația că fiecare sumă din ecuația (5) trebuie să cuprindă toate posibilitățile de grupare a componenților ținînd seamă că, într-un termen, același component se poate repeta dar că în fiecare termen trebuie să intre cel puțin doi componenți diferiți.

Ecuațiile lui van Laar, Margules și Scachard au fost deduse pe această cale drept cazuri particulare, neglijînd sumele cu peste trei indici și făcînd unele ipoteze simplificatoare asupra coeficienților $a$.

## 1. DEDUCEREA ECUAȚIILOR LUI VAN LAAR

In prima parte a acestei lucrări am dedus ecuațiile lui van Laar pe o cale diferită și anume prin considerații asupra interacțiunii moleculelor celor doi componenți ai soluției binare.

Intr-un lichid unar, fiecare moleculă se găsește sub influența a $m_1^0$ molecule vecine identice. Notînd cu $\varepsilon_{11}$ influența medie a unei molecule de substanță 1 asupra unei molecule vecine de același fel, influența moleculelor vecine asupra unei molecule dintr-un lichid unar este :

$$I_1^0 = \varepsilon_{11}\, m_1^0 \ . \tag{7}$$

Intr-o soluție binară, ideal omogenă, formată din componenții 1 și 2, o moleculă oarecare de component 1 se găsește sub influența a $m_1$ molecule de component 1 și a $m_2$ molecule de component 2. Notînd cu $\varepsilon_{11}$ și $\varepsilon_{21}$ influențele medii ale unei molecule de component 1, respectiv 2, asupra unei molecule de component 1, influența moleculelor vecine asupra acestei molecule este :

$$I_1 = \varepsilon_{11} m_1 + \varepsilon_{21} m_2 \cdot \tag{8}$$

Dacă presupunem că spațiul vecin de influență se menține constant cînd se trece de la lichidul unar la soluția binară, rezultă următoarea relație între volumele molare și numărul moleculelor din spațiul de influență :

$$m_1^0 V_1^0 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \cdot \tag{9}$$

Cînd amestecarea celor doi componenți se face fără variație de volum

$$m_1^0 V_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \tag{10}$$

sau

$$m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2 = m_1^0 \cdot \tag{11}$$

Diferența dintre influența moleculelor vecine asupra unei molecule de component 1 în soluția binară și în lichidul unar este :

$$\Delta I_1 = I_1 - I_1^0 = \varepsilon_{11} m_2 + \varepsilon_{21} m_2 - \varepsilon_{11} m_1^0 \tag{12}$$

sau, împreună cu ecuația (11) :

$$\Delta I_1 = \varepsilon_{11} m_1 + \varepsilon_{21} m_2 - \varepsilon_{11} \left( m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2 \right)$$

$$\Delta I_1 = \left( \varepsilon_{21} - \varepsilon_{11} \frac{V_2}{V_1} \right) m_2 \tag{13}$$

Inmulțind partea dreaptă a ecuației (13) cu

$$\frac{m_1^0}{m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2} = 1 \tag{14}$$

rezultă :

$$\Delta I_1 = \left( \varepsilon_{21} - \varepsilon_{11} \frac{V_2}{V_1} \right) m_1^0 \frac{m_2}{m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2} \tag{15}$$

sau

$$\Delta I_1 = c_1 \frac{m_2}{m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2} \tag{16}$$

în care

$$c_1 = \left( \varepsilon_{21} - \varepsilon_{11} \frac{V_2}{V_1} \right) m_1^0 \tag{17}$$

Influenţa moleculelor vecine asupra unei molecule de component 2 se calculează în mod analog, cu rezultatul :

$$\Delta I_2 = c_2 \frac{m_1}{m_2 + \frac{V_1}{V_2} m_1} = c_2 \frac{V_2}{V_1} \frac{m_1}{m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2} \tag{18}$$

în care

$$c_2 = \left( \varepsilon_{12} - \varepsilon_{22} \frac{V_1}{V_2} \right) m_1^0 \tag{19}$$

Influenţa totală asupra $m_1$ molecule de component 1 şi $m_2$ molecule de component 2 este

$$\Delta I = m_1 \Delta I_1 + m_2 \Delta I_2 = m_1 c_1 \frac{m_2}{m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2} + m_2 c_2 \frac{V_2}{V_1} \frac{m_1}{m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2}$$

sau

$$\Delta I = \left( c_1 + c_2 \frac{V_2}{V_1} \right) \frac{m_1 m_2}{m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2} \tag{20}$$

Identificînd funcţiunea $\Delta I$ cu funcţiunea $G^E$ şi aplicînd relaţiile (3) şi (4), se obţine :

$$\lg \gamma_1 = \frac{1}{2{,}303\, RT} \frac{\partial G^E}{\partial m_1} = \frac{c_1 + c_2 \frac{V_2}{V_1}}{2{,}303\, RT} \frac{\left( m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2 \right) m_2 - m_1 m_2}{\left( m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2 \right)^2}$$

$$= \frac{c_1 + c_2 \frac{V_2}{V_1}}{2{,}303\, RT} \frac{V_2}{V_1} \frac{m_2^2}{\left( m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2 \right)} = \frac{B}{A^2} \frac{m_2^2}{\left( m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2 \right)^2} \tag{21}$$

$$\lg \gamma_2 = \frac{1}{2{,}303\, RT} \frac{\partial G^E}{\partial m_2} = \frac{c_1 + c_1 \frac{V_2}{V_1}}{2{,}303\, RT} \cdot \frac{\left( m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2 \right) m_1 - \frac{V_2}{V_1} m_2 m_2}{\left( m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2 \right)^2}$$

$$= \frac{c_1 + c_2 \frac{V_2}{V_1}}{2{,}303\, RT} \cdot \frac{m_1^2}{\left( m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2 \right)^2} = \frac{B}{A} \frac{m_1^2}{\left( m_1 + \frac{V_2}{V_1} m_2 \right)^2} \tag{22}$$

Ţinînd seamă că

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = x_1 \tag{23}$$

şi că $1/A = V_2/V_1$ , se ajunge la ecuaţiile lui van Laar în forma [2]:

$$\lg \gamma_1 = \frac{B}{T\left(1 + A\dfrac{x_1}{1 - x_1}\right)^2} \tag{24}$$

$$\lg \gamma_2 = \frac{AB}{T\left(A + \dfrac{1 - x_1}{x_1}\right)^2} \tag{25}$$

## 2. ECUAŢII DEDUSE DIN CONSIDERAREA NEUNIFORMITĂŢII CONCENTRAŢIEI SOLUŢIEI BINARE

In deducerea precedentă a ecuaţiilor lui van Laar, s-a considerat soluţia ideal omogenă, adică s-a considerat că în jurul tuturor moleculelor concentraţia este identică şi egală cu $m_1/m_2 = n$.

Această ipoteză nu corespunde realităţii. Intr-un lichid binar, moleculele celor doi componenţi nu se aşează într-o reţea geometrică definită (de altfel chiar într-o astfel de reţea, vecinătăţile moleculelor pot fi diferite). Pe de altă parte, poziţiile relative ale moleculelor vecine diferă de la o moleculă la alta, aşa încît influenţa lor este de asemenea diferită. Considerarea unei concentraţii locale uniforme în tot volumul soluţiei este o ipoteză simplificatoare.

In a doua parte a lucrării, vom deduce—prin acelaş raţionament—ecuaţiile coeficienţilor de activitate ţinînd seamă de aceste precizări. Vom considera că o moleculă de component 1 se găseşte sub influenţa a $m_1'$ molecule de component 1 şi a $m_2'$ molecule de component 3, astfel încît în jurul unei molecule există o concentraţie locală definită prin raportul molar local $n' = m_1'/m_2'$, diferit de la o moleculă la alta. Menţionăm că $m_1'$ şi $m_2'$ nu reprezintă numărul real de molecule care influenţează o moleculă de component 1, ci numărul echivalent de molecule care ar avea influenţa $\varepsilon_{11}$, respectiv $\varepsilon_{21}$.

Concentraţiile locale se repartizează în lichid cu totul întîmplător, cu abateri mai mici sau mai mari faţă de concentraţia globală (analitică, nominală, medie) $n = m_1/m_2$..

Adoptăm o repartizare Gauss logaritmică, în jurul concentraţiei $n$. Variabila $(\lg n')$ a repartizării logaritmice are avantajul că acoperă întreg domeniul între minus infinit şi plus infinit.

In această repartizare, frecvenţa—adică raportul între numărul de molecule în jurul căreia există o anumită concentraţie locală $n'$ şi numărul total de molecule—este dată de relaţia:

$$\varphi = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2(\lg n' - \lg n)^2} \tag{26}$$

în care $h$ este o constantă depinzînd de frecvența concentrației locale $n' = n$,

$$\varphi_{(n'-n)} = h/\sqrt{\pi} \qquad \text{de unde} \qquad h = \sqrt{\pi}\,\varphi_{(n'-n)} \tag{27}$$

Din ecuațiile (16) și (26) rezultă că asupra moleculelor dintr-un mol de component 1, influența vecinătății, de concentrație (locală) $n'$, este:

$$(\Delta I_1)_{n'} = c_1 \frac{m_2'}{m_1' + \frac{V_2}{V_1} m_2'} \varphi = c_1 \frac{1}{n' + \frac{V_2}{V_1}} \varphi \tag{28}$$

iar influența tuturor moleculelor dintr-un mol de component 1 este:

$$\Delta I_1 = c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n_1 + \frac{V_2}{V_1}} \varphi \, \mathrm{d} \lg n' \quad . \tag{29}$$

In mod analog pentru componentul 2 (avînd în vedere că $n_2 = 1/n_1$):

$$\Delta I_2 = c_2 \frac{V_2}{V_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n'}{n' + \frac{V_2}{V_1}} \varphi \, \mathrm{d} \lg n' \quad . \tag{30}$$

Influența totală asupra a $m_1$ moli de component 1 și $m_2$ moli de component 2 este:

$$\Delta I = m_1 \Delta I_1 + m_2 \Delta I_2 \tag{31}$$

sau

$$\Delta I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 \frac{V_2}{V_1} n'}{n' + \frac{V_2}{V_1}} \varphi \, \mathrm{d} \lg n' \tag{32}$$

Identificînd și aici $\Delta I$ cu funcția $G^E$, aplicînd relațiile (3) și (4) și ținînd seamă că

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_1} = \frac{2\,h^2}{2{,}303} \varphi \, (\lg n' - \lg n) \frac{1}{m_1} \tag{33}$$

și

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_2} = -\frac{2\,h^2}{2{,}303} \varphi \, (\lg n' - \lg n) \frac{1}{m_2} \tag{34}$$

rezultă

$$\lg \gamma_1 = \frac{1}{2{,}303\,RT}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[c_1 + \frac{2h^2}{2{,}303}\left(c_1 + c_2\frac{V_2}{V_1}\frac{n'}{n}\right)\right](\lg n' - \lg n)\left[\frac{\varphi}{n' + \frac{V_2}{V_1}}\right] \mathrm{d}\lg n' \tag{35}$$

și

$$\lg \gamma_2 = \frac{1}{2{,}303\,RT}\int_{+\infty}^{+\infty}\left[c_2\frac{V_2}{V_1}n' - \frac{2\,h^2}{2{,}303}\left(c_1 + c_2\frac{V_2}{V_2}n'\right)\right](\lg n' - \lg n)\left[\frac{\varphi}{n' + \frac{V_2}{V_1}}\right] \mathrm{d}\lg n' \tag{36}$$

Notînd

$$A_1 = \frac{c_1}{2{,}303\,R} \tag{37}$$

$$A_2 = \frac{c_2}{2{,}303\,R}\,\frac{V_2}{V_1} \tag{38}$$

se obține

$$\lg \gamma_1 = \frac{A_1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1 + \frac{2\,h^2}{2{,}303}\left(1 + \frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n}\right)\left(\lg\frac{n'}{n}\right)\right]\frac{\varphi}{n' + \frac{V_2}{V_1}}\,\mathrm{d}\lg n' \tag{39}$$

și

$$\lg \gamma_2 = \frac{A_1}{T}\,n\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n} - \frac{2h^2}{2{,}303}\left(1 + \frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n}\right)\left(\lg\frac{n'}{n}\right)\right]\frac{\varphi}{n' + \frac{V_2}{V_1}}\,\mathrm{d}\lg n' \tag{40}$$

### 3. ECUAȚIILE (39) și (40) VERIFICĂ ECUAȚIA GIBBS-DUHEM.

Orice ecuație pentru coeficienții de activitate ai sistemelor binare trebuie să îndeplinească condiția corespuozătoare ecuației Gibbs-Duhem (1).

*a)* Inlocuind în ecuația (1) :

$$x_1 = \frac{n}{n+1} \qquad x_2 = \frac{1}{n+1}$$

$$\mathrm{d}x_1 = \frac{\mathrm{d}n}{(n+1)^2} \qquad \mathrm{d}x_2 = -\frac{\mathrm{d}n}{(n+1)^2}$$

rezultă ecuaţia lui Gibbs-Duhem în funcţie de raportul molar n :

$$n\frac{d\lg\gamma_1}{dn} + \frac{d\lg\gamma_2}{dn} = 0 \qquad (41)$$

*b)* Pentru a verifica dacă ecuaţiile (39) şi (40) îndeplinesc condiţia corespunzătoare ecuaţiei (41), este suficient să se arate că

$$n\frac{d}{dn}\left[1 + \frac{2h^2}{2{,}303}\left(1 + \frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n}\right)\lg\frac{n'}{n}\right]\varphi + \frac{d}{dn}\left\{n\left[\frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n} - \frac{2h^2}{2{,}303}\left(1 + \frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n}\right)\lg\frac{n'}{n}\right]\varphi\right\} \equiv 0 \qquad (42)$$

Notînd, pen'ru simplificarea scrierii :

$$\frac{2h^2}{2{,}303}\left(1 + \frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n}\right)\lg\frac{n'}{n} = \psi \qquad (43)$$

ecuaţia (42) devine

$$n\frac{d}{dn}\left[(1+\psi)\,\varphi\right] + \frac{d}{dn}\left[n\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n} - \psi\right)\varphi\right] \equiv 0 \qquad (44)$$

sau

$$n\left[(1+\psi)\frac{d\varphi}{dn} + \varphi\frac{\psi}{dn}\right] + \left(\frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n} - \psi\right)\varphi + n\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n} - \psi\right)\frac{d\varphi}{dn} - n\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n^2} + \frac{d\varphi}{dn}\right)\psi \equiv 0 \qquad (45)$$

După simplificări, rămîne

$$n\left(1 + \frac{A_2}{A_1}\frac{n'}{n}\right)\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\psi \equiv 0 \qquad (46)$$

Dacă în relaţia (46) se introduce valoarea lui$\psi$ din (43) şi ($d\varphi/dn$) din :

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{2h^2}{2{,}303}\left(\lg\frac{n'}{n}\right)\frac{1}{n}\varphi \qquad (47)$$

rezultă că ecuaţia (46) şi deci şi (42) sînt într-adevăr identităţi.

## 4. CALCULUL COEFICIENŢILOR DE ACTIVITATE.

Ecuaţiile (39) şi (40) conţin patru constante : $A_1$ , $A_2$ , $V_2/V_1$ şi $h$ sau $A_1$ , $A_2/A_1$ , $V_2/V_1$ şi $h$,

In mod teoretic sînt suficiente două încercări experimentale (adică cîte două valori pentru $\gamma_1$ şi $\gamma_2$) ca să se deducă valorile celor patru constante şi apoi să se calculeze coeficienţii de activitate pentru orice concentraţie a amestecului binar. Din cauza erorilor experimentaie

și a influenții mari pe care mici abateri în regiunea de concentrații mijlocii le au asupra constantelor și deci asupra coeficienților de activitate din regiunile extreme de concentrații, este nevoie de un număr mai mare de determinări experimentale.

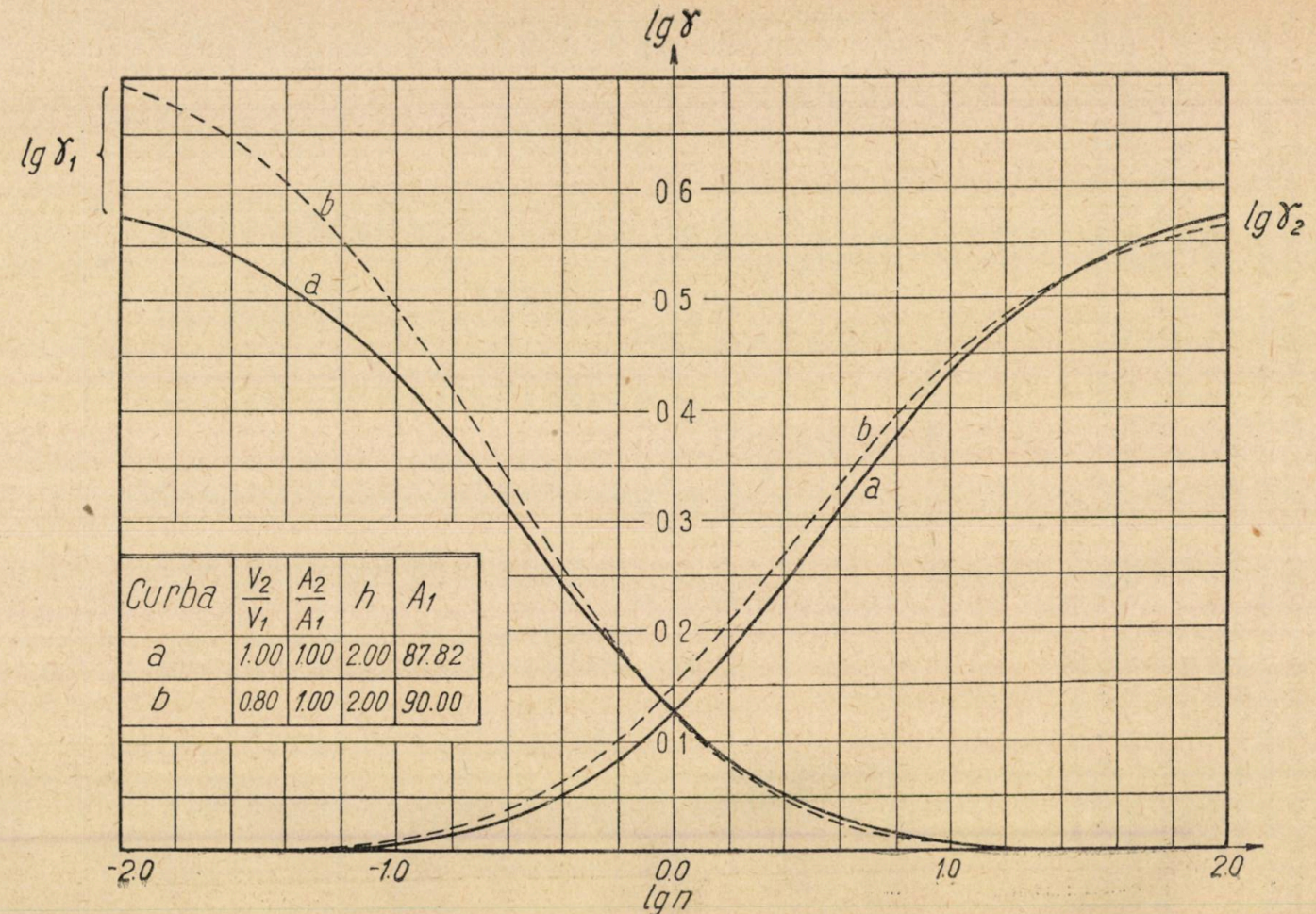
Valorile constatelor au fost deduse prin încercări.

Pentru ghidarea încercărilor, am determinat influența fiecăreia dintre constantele $A_2/A_1$, $V_2/V_1$ și $h$ (tabela 1 și fig. 1—3). Pentru o mai ușoară comparare a curbelor, constanta $A_1$ a fost determinată punînd condiția ca toate curbele $\lg \gamma_1$ să treacă printr-un punct comun ($\lg \gamma = 0{,}1250$ pentru $\lg n = 0$).

Tabela 1

**Influența constantelor**

| $V_2/V_1$ | 1,00 | | 0,80 | | 1,00 | | 1,00 | | 0,96 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_2/A_1$ | 1,00 | | 1.00 | | 1,20 | | 1,00 | | 1,00 | |
| $h$ | 2,00 | | 2,00 | | 2,00 | | 2,40 | | 1,80 | |
| $A_1$ | 87,82 | | 90,00 | | 80,74 | | 87,82 | | 87,32 | |
| $\lg n$ | $\lg \gamma_1$ | $\lg \gamma_2$ | $\lg \gamma_1$ | $\lg \gamma_2$ | $\lg \gamma_1$ | $\lg \gamma_2$ | $\lg \gamma_1$ | $\lg \gamma_2$ | $\lg \gamma_1$ | $\lg \gamma_2$ |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) |
| $\bar{3}.80$ | 0,5830 | 0,0001 | 0, | 0. | 0,5980 | 0,0001 | 0, | 0, | 0,6273 | 0,0001 |
| $\bar{2}{,}00$ | 5745 | 0001 | 6942 | 0001 | 5893 | 0001 | 5474 | 0001 | 6145 | 0001 |
| 20 | 5616 | 0003 | 6735 | 0004 | 5758 | 0003 | 5367 | 0001 | 5992 | 0004 |
| 40 | 5423 | 0007 | 6468 | 0010 | 5554 | 0007 | 5212 | 0005 | 5751 | 0009 |
| 60 | 5156 | 0015 | 6085 | 0022 | 5274 | 0016 | 4992 | 0013 | 5421 | 0020 |
| 80 | 4788 | 0034 | 5572 | 0048 | 4889 | 0036 | 4689 | 0028 | 4990 | 0041 |
| $\bar{1}{.}00$ | 4314 | 0072 | 4942 | 0099 | 4396 | 0076 | 4284 | 0061 | 4441 | 0094 |
| 20 | 3751 | 0145 | 4202 | 0194 | 3811 | 0151 | 3752 | 0129 | 3821 | 0165 |
| 40 | 3110 | 0274 | 3395 | 0355 | 3150 | 0284 | 3137 | 0253 | 3135 | 0304 |
| 60 | 2443 | 0487 | 2592 | 0618 | 2464 | 0503 | 2474 | 0465 | 2446 | 0523 |
| 80 | 1806 | 0808 | 1857 | 0982 | 1813 | 0830 | 1826 | 0792 | 1802 | 0848 |
| 0,00 | 1250 | 1250 | 1250 | 1469 | 1250 | 1279 | 1250 | 1250 | 1250 | 1287 |
| 20 | 0808 | 1806 | 0777 | 2054 | 0804 | 1840 | 0792 | 1826 | 0814 | 1834 |
| 40 | 0487 | 2443 | 0453 | 2695 | 0484 | 2477 | 0465 | 2474 | 0497 | 2463 |
| 60 | 0274 | 3110 | 0247 | 3342 | 0270 | 3143 | 0253 | 3137 | 0285 | 3128 |
| 80 | 0145 | 3751 | 0152 | 3938 | 0142 | 3776 | 0129 | 3752 | 0154 | 3779 |
| 1.00 | 0972 | 4314 | 0061 | 4448 | 0071 | 4333 | 0061 | 4284 | 0078 | 4369 |
| 20 | 0034 | 4788 | 0029 | 4845 | 0034 | 4796 | 0028 | 4689 | 0038 | 4868 |
| 40 | 0015 | 5156 | 0013 | 5158 | 0015 | 5159 | 0013 | 4992 | 0018 | 5269 |
| 60 | 0007 | 5423 | 0005 | 5388 | 0007 | 5420 | 0005 | 5212 | 0008 | 5569 |
| 80 | 0003 | 5616 | 0002 | 5540 | 0003 | 5608 | 0001 | 5367 | 0003 | 5788 |
| 2.00 | 0001 | 5745 | 0001 | 5658 | 0001 | 5732 | 0001 | 5474 | 0001 | 5941 |
| 20 | 0001 | 5830 | | | 0001 | 5838 | | | 0001 | 6040 |
| Curba | *a* | | *b* | | *c* | | *d* | | | |




| Curba | $\frac{V_2}{V_1}$ | $\frac{A_2}{A_1}$ | h | $A_1$ |
|---|---|---|---|---|
| a | 1.00 | 1.00 | 2.00 | 87.82 |
| b | 0.80 | 1.00 | 2.00 | 90.00 |

Fig. 1. — Influența raportului $V_2/V_1$.

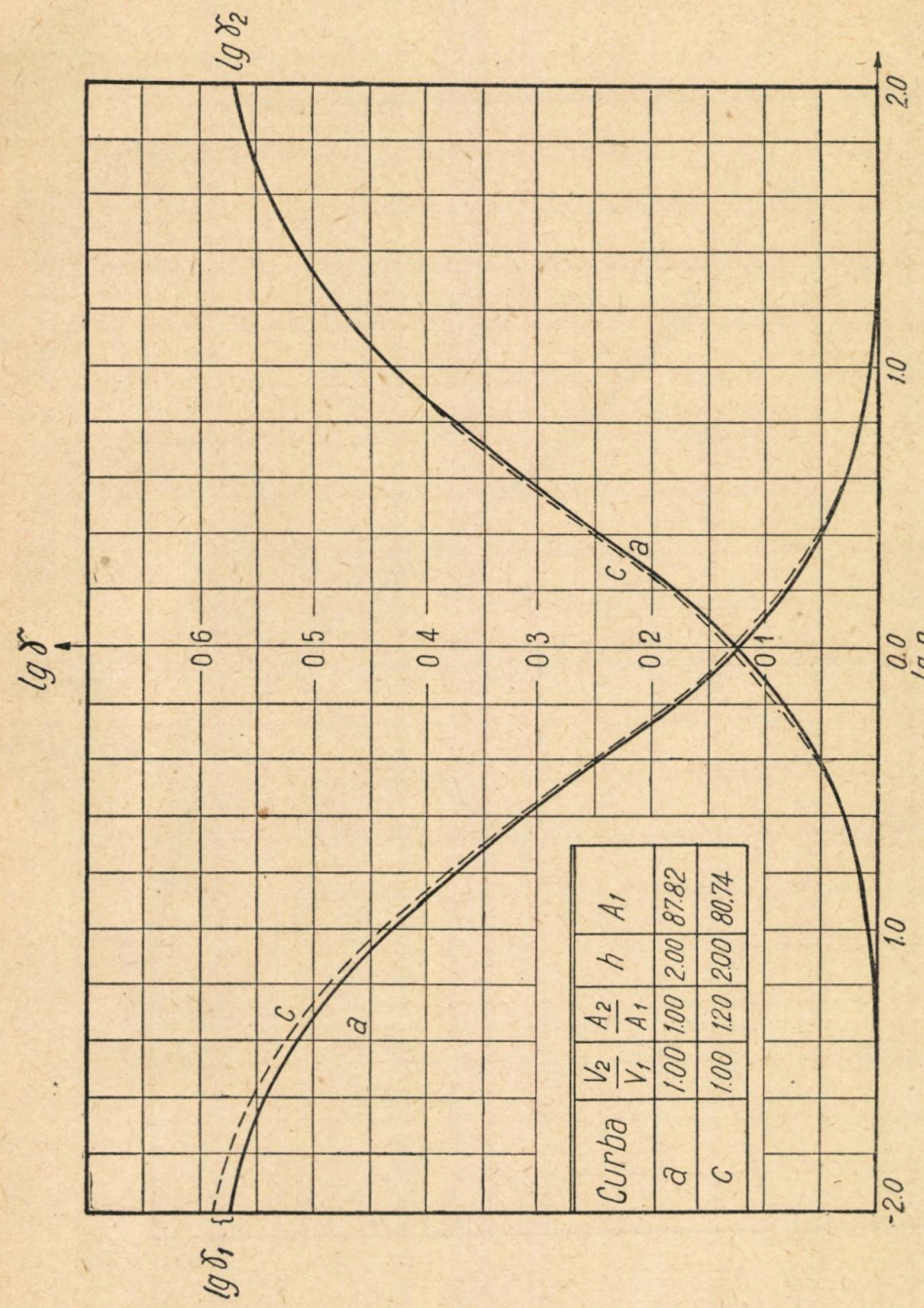



Fig. 2. — Influența raportului $A_2/A_1$

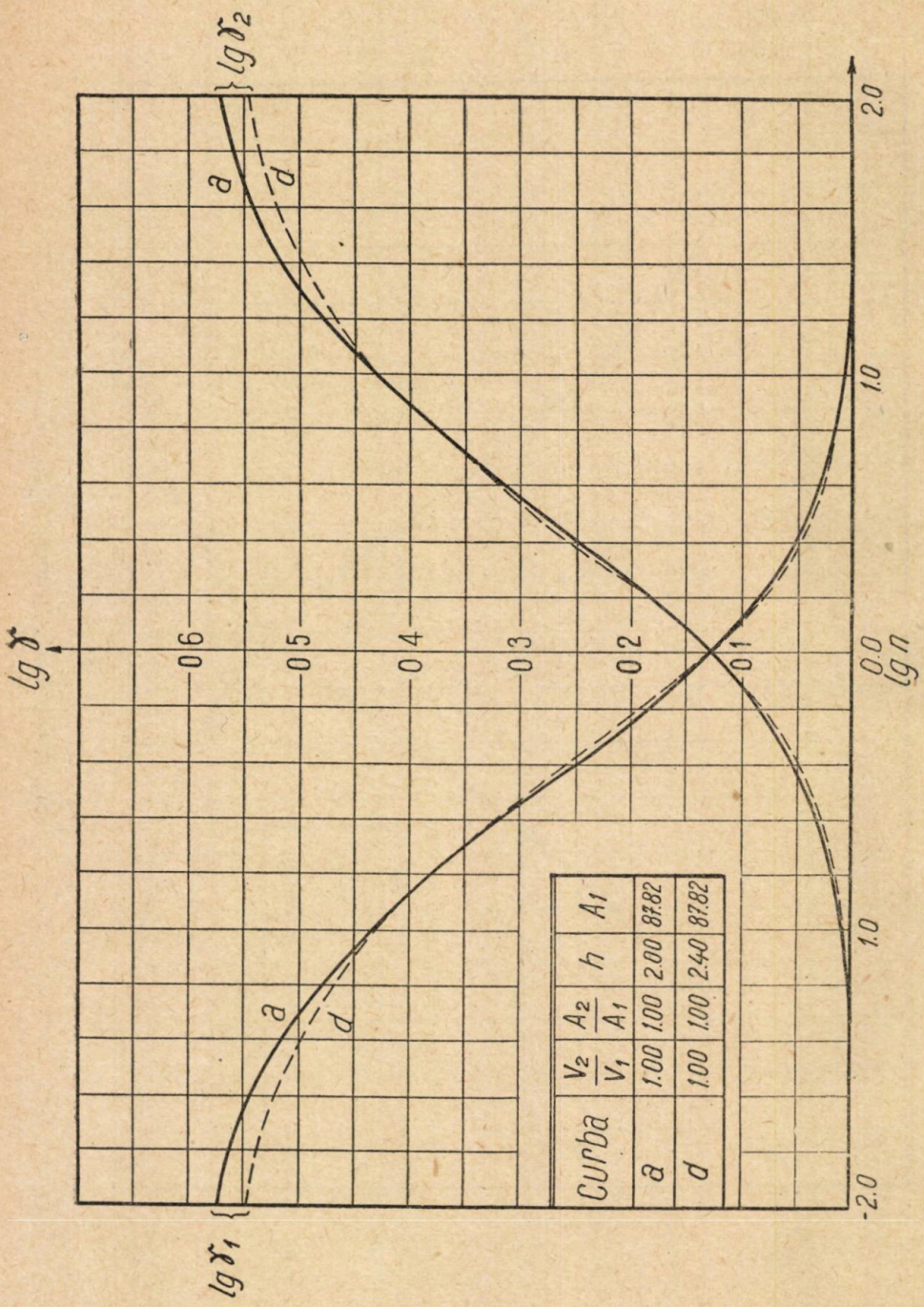



Fig. 3. — Influența constante h.

Pentru uşurarea calculului şi penfru a schimba mai uşor valoarea constantei $A_2/A_1$ , am descompus integralele din ecuaţiile (39) şi (40) în patru integrale **M** , **N** , **P** , **R** , astfel încît :

$$\lg \gamma_1 = \frac{A_1}{T}\left[\mathbf{M} + (\mathbf{P} + \mathbf{R})\right] \tag{48}$$

$$\lg \gamma_2 = \frac{A_2}{T} n \left[\mathbf{N} - (\mathbf{P} + \mathbf{R})\right] \tag{49}$$

în care :

$$\mathbf{M} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n' + \frac{V_2}{V_1}} E \, \mathrm{d} \lg n' \tag{50}$$

$$\mathbf{N} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n'}{n' + \frac{V_2}{V_1}} E \, \mathrm{d} \lg n' \tag{51}$$

$$\mathbf{P} = \frac{2}{2{,}303} \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n' + \frac{V_2}{V_1}} (\lg n' - \lg n) \, E \, \mathrm{d} \lg n' \tag{52}$$

$$\mathbf{R} = \frac{2}{2{,}303} \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n'}{n' + \frac{V_2}{V_1}} (\lg n' - \lg n) \, E \, \mathrm{d} \lg n' \tag{53}$$

pentru simplificarea scrierii am notat

$$E = e^{-h^2 (\lg n' - \lg n)^2} \tag{54}$$

Integralele au fost înlocuite prin sume, schimbînd diferenţiala $\mathrm{d} \lg n$ în diferenţă finită $\Delta \lg n$ (în toate calculele este suficient dacă se ia $\Delta \lg n = 0{,}1$).

*Exemplu*

Pentru exemplificarea calculului, am folosit datele experimentale ale lui Steinhauser şi White [8] pentru amestecul metiletilcetonă—*n*-heptan (coloanele 1-7 din tabela 2).

Tabela 2

**Echilibrul lichid-vapori al sistemului**

*Metiletilcetonă — n - Heptan*

| Nr. | Temp | x | y | lg *n* | lg $\gamma_1$ | lg $\gamma_2$ | Constante van Laar | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | A | media | B | media |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) |
| 1 | 98,3 | 0,000 | 0,000 | $-\infty$ | — | 0,0000 | | | | |
| 2 | 96,1 | 0033 | 060 | $\bar{3}$,5199 | 1,0636 | 0029 | 248,8 | | 1305 | |
| 3 | 93,7 | 027 | 141 | $\bar{2}$,4433 | 5476 | 0055 | 13,04 | | 372,6 | |
| 4 | 89,4 | 074 | 285 | 9026 | 4613 | 0046 | 1,562 | | 211,4 | |
| 5 | 86,4 | 122 | 3755 | $\bar{1}$,1429 | 3976 | 0100 | 1,302 | | 199,4 | |
| 6 | 82,25 | 230 | 495 | 4752 | 2949 | 0327 | 1,243 | | 197,0 | |
| 7 | 79,95 | 354 | 572 | 7388 | 2015 | 0699 | 1,155 | | 189,8 | |
| 8 | 80,05 | 369 | 578 | 7670 | 1866 | 0726 | 1,138 | | 182,8 | |
| 9 | 78,35 | 475 | 632 | 9565 | 1394 | 1176 | 1,030 | 1,0234 | 183,0 | 177,64 |
| 10 | 78,2 | 507 | 645 | 0,0122 | 1221 | 1315 | 1,018 | | 179,7 | |
| 11 | 77,45 | 6115 | 691 | 1970 | 0812 | 1856 | 0,9230 | | 171,3 | |
| 12 | 77,0 | 693 | 727 | 3536 | 0553 | 2407 | 8561 | | 166,4 | |
| 13 | 77,15 | 706 | 736 | 3805 | 0505 | 2427 | 8332 | | 159,2 | |
| 14 | 77,0 | 765 | 7685 | 5126 | 0365 | 2851 | 7370 | | 147,8 | |
| 15 | 77,25 | 864 | 832 | 8030 | 0146 | 3797 | 6442 | | 132,7 | |
| 16 | 78,1 | 932 | 908 | 1,1369 | 0076 | 4068 | 2849 | | 64,19 | |
| 17 | 78,70 | 973 | 954 | 5567 | 0019 | 4982 | 2019 | | 45,78 | |
| 18 | 79,00 | 994 | 987 | 2,2192 | 0025 | 5975 | 0087 | | 52,53 | |
| 19 | 79,45 | 1,000 | 1,000 | $+\infty$ | 0000 | — | | | | |

1. Intr-o diagramă (fig. 4) se fixează punctele experimentale corespunzînd cordonatelor din coloanele 5, 6 şi 7 din tabela 2.

2. Intr-o a 2-a diagramă, se transformă punctele din diagrama precedentă înmulţind ordonatele întîi cu un factor $A_0$ astfel ales încît curba lg $\gamma_1$ să treacă prin punctul (lg $n$=0) şi apoi cu raportul $T/T_0$ între temperatura absolută de fierbere $T$ la concentraţia respectivă şi temperatura absolută de fierbere $T_0$ la concentraţie echimoleculară (lg $n$=0). După aceste două înmulţiri, se pot compara datele experimentale cu curbele de referinţă din fig. 1, 2 şi 3 în vederea alegerii constantelor $A_2/A_1$ , $V_2/V_1$ şi $h$.

3. După alegerea constantelor pentru prima încercare, se calculează cîteva puncte ale curbelor lg $\gamma_1$ şi lg $\gamma_2$, în funcţie de lg $n$. In tabela 4 dăm un exemplu de calcul pentru concentraţia lg $n = 0{,}20$ şi cu constantele $h = 1{,}80$, $V_2/V_1 = 0{,}96$, $A_2/A_1$ şi $A_1 = 87{,}32$. Toate calculele au fost executate cu ajutorul logaritmilor cu patru zecimale.

4. După ce valorile definitive ale constantelor au fost stabilite prin încercări, se revine la prima diagramă (fig. 4) înmulţind cu $\frac{1}{A_0}\frac{T_0}{T}$.

## EXEMPLU DE CALCUL

$\lg n = 0{,}20$ ; $\frac{V_2}{V_1} = 0{,}96$ ; $\frac{A_2}{A_1} = 1{,}00$ ; $h = 1{,}80$ ; $A_1 = 87{,}32$

| $\lg n$ | $n'$ | $\frac{V_2}{V_1} + n'$ | $\lg\left(\frac{V_2}{V_1} + n'\right)$ | $\lg\,(\lg n' - \lg n)^2$ | $\lg\frac{1}{E}$ | $\lg\frac{1}{E}$ | $\lg\left[\left(\frac{V_2}{V_1} + n'\right)\frac{1}{E}\right]$ | $\lg\left(\frac{V_1}{V_1} + n'\right)\frac{1}{E}$ | $\frac{1}{\frac{V_2}{V_1} + n'}\frac{E}{1}$ | $\sum$ | $\frac{n'}{\frac{V_2}{V_1} + n'}\frac{E}{1}$ | $\sum$ | $\lg(\lg n' - \lg n)$ | $\lg\left[\frac{1}{\frac{V_2}{V_1} + n'}\frac{E}{1}(\lg n' - \lg n)\right]$ | $\frac{1}{(\lg n' - \lg n)}\frac{E}{\frac{V_2}{V_1} + n'}\frac{1}{1}$ | $\lg\left[\frac{1}{\frac{V_2}{V_1} + n'}\frac{E}{1}(\lg n' - \lg n)\right]$ | $\lg\left[\frac{n'}{\frac{V_2}{V_1} + n'}\frac{E}{1}(\lg n' - \lg n)\right]$ | $\lg\left[\frac{n'}{\frac{V_2}{V_1} + n'}\frac{E}{1}(\lg n' - \lg n)\right]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Num (1) | (2) + 0,96 | lg (3) | 2 lg [(1)+0,2] | (5) + 0,1484 | Num (6) | (4) + (7) | − (8) | Num (9) | Σ (10) | Num[(1)+(9)] | Σ (11) | lg[(1)−0,20)] | (14)+(9) | Num (15) | Σ (16) | Num[(1)+(15)] | Σ (18) |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) | (17) | (18) | (19) |
| $\bar{2}{,}2$ | 0,0158 | 0,9558 | $\bar{1}{,}9842$ | 0,6020 | 0,7504 | 5,628 | 5,6174 | $\bar{6}{,}3826$ | | | | | 0,3010 | $\bar{6}{,}6836$ | | | | |
| 3 | 200 | 9800 | 9912 | 5576 | 7060 | 082 | 0732 | 9263 | | | | | 2788 | $\bar{5}{,}2056$ | −0,0000 | | | |
| 4 | 251 | 9851 | 9934 | 5106 | 6590 | 4,560 | 4,5534 | $\bar{5}{,}4466$ | 0,0000 | | | | 2553 | 7019 | 1 | | | |
| 5 | 316 | 9916 | 9964 | 4608 | 6092 | 066 | 0624 | 9376 | 1 | | | | 2304 | 4,1680 | 1 | | | |
| 6 | 398 | 9998 | 9999 | 4082 | 5566 | 3,602 | 3,6019 | 4,3981 | 3 | | | | 2041 | 6022 | 4 | | −0,0000 | |
| 7 | 501 | 1,0101 | 0,0043 | 3422 | 5006 | 166 | 1703 | 8297 | 7 | | 0,0000 | | 1761 | $\bar{3}{,}0058$ | 10 | | 1 | |
| 8 | 631 | 0231 | 0098 | 2922 | 4406 | 2,758 | 2,7678 | 3,2322 | 17 | | 1 | | 1451 | 3783 | 24 | | 2 | |
| 9 | 794 | 0394 | 0167 | 2278 | 3762 | 378 | 3947 | 6053 | 40 | | 3 | | 1139 | 7192 | 52 | | 4 | |
| 1,0 | 1000 | 0600 | 0253 | 1584 | 3068 | 027 | 0523 | 9477 | 89 | | 9 | | 0792 | $\bar{2}{,}0269$ | 106 | | 11 | |
| 1 | 1259 | 0859 | 0359 | 0828 | 2312 | 1,703 | 1,7389 | $\bar{2}{,}2611$ | 182 | 339 | 23 | 36 | 0414 | 3025 | 201 | −0,0399 | 25 | −0,0043 |
| 2 | 1585 | 1185 | 0485 | 0000 | 1484 | 407 | 4555 | 5445 | 350 | | 56 | | 0000 | 5445 | 350 | | 56 | |
| 3 | 1995 | 1595 | 0643 | 1,9084 | 0568 | 140 | 2043 | 7957 | 625 | | 125 | | 1,9542 | 7499 | 562 | | 112 | |
| 4 | 2512 | 2112 | 0832 | 8062 | 1,9546 | 0,9007 | 0,9839 | $\bar{1}{,}0161$ | 1038 | | 261 | | 9031 | 9192 | 830 | | 208 | |
| 5 | 3162 | 2762 | 1060 | 6902 | 8386 | 6896 | 7956 | 2044 | 1601 | | 506 | | 8451 | $\bar{1}{,}0495$ | 1120 | | 354 | |
| 6 | 3981 | 3581 | 1329 | 5564 | 7048 | 5067 | 6396 | 3604 | 2293 | | 913 | | 7782 | 1386 | 1376 | | 548 | |
| 7 | 5012 | 4612 | 1648 | 3980 | 5464 | 3519 | 5167 | 4833 | 3043 | | 1525 | | 6990 | 1823 | 1522 | | 763 | |
| 8 | 6310 | 5910 | 2017 | 2042 | 3526 | 2252 | 4269 | 5731 | 3742 | | 2361 | | 6021 | 1752 | 1497 | | 944 | |
| 9 | 7943 | 7543 | 2441 | 2,9542 | 1026 | 1267 | 3708 | 6292 | 4258 | | 3383 | | 4771 | 1063 | 1277 | | 1015 | |
| 0,0 | 1,0000 | 9600 | 2923 | 6020 | 2,7504 | 563 | 3486 | 6514 | 4481 | | 4481 | | 3010 | 2,9524 | 896 | | 896 | |
| 1 | 1,259 | 2,219 | 3461 | 0000 | 1484 | 141 | 3602 | 6398 | 4363 | 2,5794 | 5493 | 1,9104 | 0000 | 6398 | 436 | −0,9866 | 549 | −0,5445 |
| 0,2 | 1,585 | 2,549 | 4063 | −∞ | −∞ | 0 | 4063 | 5937 | 3923 | 3923 | 6219 | 6219 | −∞ | −∞ | 0 | | 0 | |
| 3 | 1,995 | 2,955 | 4705 | 2,0000 | 2,1384 | 141 | 4846 | 5154 | 3276 | | 6537 | | $\bar{1}{,}0000$ | $\bar{2}{,}5154$ | +0,0328 | | +0,0654 | |
| 4 | 2,512 | 3,475 | 3496 | 6020 | 7504 | 563 | 5969 | 4031 | 2530 | | 6354 | | 3010 | 7041 | 506 | | 1271 | |
| 5 | 3,162 | 4,122 | 6151 | 9542 | 1,1026 | 1267 | 7418 | 2582 | 1812 | | 5731 | | 4771 | 7353 | 544 | | 1719 | |
| 6 | 3,981 | 4,941 | 6938 | 1,2042 | 3526 | 2252 | 9190 | 0810 | 1205 | | 4797 | | 6021 | 6831 | 482 | | 1919 | |
| 7 | 5,012 | 5,972 | 7761 | 3980 | 5464 | 3519 | 1,1280 | 2,8720 | 745 | | 3733 | | 6990 | 5710 | 372 | | 1866 | |
| 8 | 6,310 | 7,270 | 8615 | 5564 | 7048 | 5067 | 3682 | 6318 | 428 | | 2703 | | 7782 | 4100 | 257 | | 1622 | |
| 9 | 7,943 | 8,903 | 9495 | 6902 | 8386 | 6896 | 6391 | 3609 | 230 | | 1824 | | 8451 | 2060 | 161 | | 1276 | |
| 1,0 | 10,00 | 10,96 | 1,0399 | 8062 | 9546 | 9007 | 9406 | 0594 | 115 | | 1147 | | 9031 | $\bar{3}{,}9625$ | 92 | | 917 | |
| 1 | 12,59 | 13,55 | 1319 | 9084 | 0,0568 | 1,140 | 2,2719 | 3,7281 | 53 | | 673 | | 9542 | 6823 | 48 | | 606 | |
| 2 | 15,85 | 16,81 | 2256 | 0,0000 | 1484 | 407 | 6326 | 3674 | 23 | 1,0427 | 369 | 3,3868 | 0,0000 | 3674 | 23 | +0,2813 | 369 | +1,2219 |
| 3 | 19,95 | 20,91 | 3203 | 0828 | 2312 | 703 | 3,0233 | 4,9767 | 9 | | 189 | | 0414 | 0181 | 10 | | 208 | |
| 4 | 25,12 | 26,08 | 4163 | 1584 | 3068 | 2,027 | 4433 | 5567 | 4 | | 91 | | 0792 | $\bar{4}{,}6359$ | 4 | | 109 | |
| 5 | 31,26 | 32,58 | 5130 | 2278 | 3762 | 378 | 8910 | 1090 | 1 | | 41 | | 1139 | 2229 | 2 | | 53 | |
| 6 | 39,81 | 40,77 | 6104 | 2922 | 4496 | 758 | 4,3684 | 5,6316 | 0 | | 17 | | 1461 | $\bar{5}{,}7777$ | 1 | | 24 | |
| 7 | 50,12 | 51,08 | 7083 | 3522 | 5005 | 3,166 | 8743 | 1257 | | | 7 | | 1761 | 3018 | 0 | | 10 | |
| 8 | 63,10 | 64,06 | 8066 | 4082 | 5566 | 602 | 5,4086 | 6,5914 | | | 2 | | 2041 | 6,7955 | | | 4 | |
| 9 | 79,43 | 80,39 | 9052 | 4608 | 6092 | 4,066 | 9712 | 0288 | | | 1 | | 2304 | 2592 | | | 1 | |
| 2,0 | 100,0 | 100,96 | 2,0040 | 5106 | 6590 | 560 | 6,5640 | 7,4360 | | | 0 | | 2553 | 7,6913 | | | 0 | |
| 1 | 125,9 | 126,86 | 1034 | 5576 | 7060 | 5,082 | 7,1854 | 8,8146 | | | | | 2788 | 0934 | | | | |
| 2 | 158,5 | 159,46 | 2027 | 6020 | 7504 | 628 | 8307 | 1693 | | 14 | | 384 | 3010 | $\bar{8}{,}4703$ | | +0,0017 | | +0,0409 |
| | | | | | | | | | | 4,0487 | | 4,9575 | | | | −0,7435 | | + 0,7140 |

$$\mathbf{M} = \frac{1{,}80}{1{,}7725}\ 4{,}0487 \cdot 0{,}1 = 0{,}4112$$

$$\mathbf{N} = \frac{1{,}80}{1{,}7725}\ 1{,}000\ \frac{1}{0{,}20}\ 5{,}9575 \cdot 0{,}1 = 0{,}3817$$

$$\mathbf{P} = \frac{2}{2{,}303}\ \frac{(1{,}80)^2}{1{,}7725}\ (-0{,}7435) \cdot 0{,}1 = -0{,}2124$$

$$\mathbf{R} = \frac{2}{2{,}303}\ \frac{(1{,}80)^2}{1{,}7725}\ 1{,}000\ \frac{1}{0{,}20}\ 0{,}7140 \cdot 0{,}1 = 0{,}1287$$

$$\lg\gamma_1 = \frac{87{,}32}{360{,}5}\left[0{,}4112 + (-0{,}2124 + 0{,}1287)\right] = 0{,}0816$$

$$\lg\gamma_2 = \frac{87{,}32}{350{,}5}\ 1{,}585\ \left[0{,}3817 - (-0{,}2124 + 0{,}1287)\right] = 0{,}1838$$

Fig. 4 conţine coeficienţii de activitate rezultaţi din:

a) determinările experimetale [8], coloanele 5, 6 şi 7 din tabela 2.

b) ecuaţia van Laar, coloanele 1, 2 şi 3 din tabela 3.

c) ecuaţiile (39) şi (40), coloanele 1, 4 şi 5 din tabela 3.

Tabela 3

**Curbele din fig. 4**

| lg $n$ | Curbele după van Laar | | Curbele după ecuaţiile (39) (40) | |
|---|---|---|---|---|
| | lg $\gamma_1$ | lg $\gamma_2$ | lg $\gamma_1$ | lg $\gamma_2$ |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| $\bar{3}$.80 | 0, | 0,0000 | 0,5951 | 0,0001 |
| $\bar{2}$.00 | 4713 | 0 | 5841 | 1 |
| 20 | 4672 | 1 | 5712 | 4 |
| 40 | 4599 | 3 | 5500 | 8 |
| 60 | 4484 | 7 | 5204 | 19 |
| 80 | 4304 | 18 | 4814 | 40 |
| $\bar{1}$.00 | 4042 | 41 | 4312 | 91 |
| 20 | 3664 | 94 | 3740 | 162 |
| 40 | 3158 | 204 | 3091 | 299 |
| 60 | 2534 | 411 | 2426 | 519 |
| 80 | 1862 | 758 | 1795 | 845 |
| 0,00 | 1236 | 1265 | 1250 | 1287 |
| 20 | 737 | 1895 | 816 | 1838 |
| 40 | 398 | 2570 | 499 | 2471 |
| 60 | 197 | 3198 | 286 | 3137 |
| 80 | 98 | 3717 | 154 | 3790 |
| 1.00 | 40 | 4116 | 79 | 4381 |
| 20 | 17 | 4393 | 38 | 4876 |
| 40 | 7 | 4581 | 18 | 5266 |
| 60 | 3 | 4701 | 8 | 5558 |
| 80 | 1 | 4782 | 3 | 5773 |
| 2.00 | 0 | 4837 | 1 | 5926 |
| 20 | | | 1 | 6024 |

Curba van Laar din fig. 4 a fost trasată folosind pentru constantele $A$ şi $B$ media valorilor din rîndurile 5-14 din tabela 2.

Din figură rezultă că ecuaţiile (39) şi (40) verifică datele experimentale mult mai bine decît ecuaţiile van Laar. Acest rezultat poate fi considerat şi ca o confirmare în sprijinul ipotezei fluctuaţiilor (concentraţie locală neuniformă), folosită în deducerea ecuaţiiior (39) şi (40).

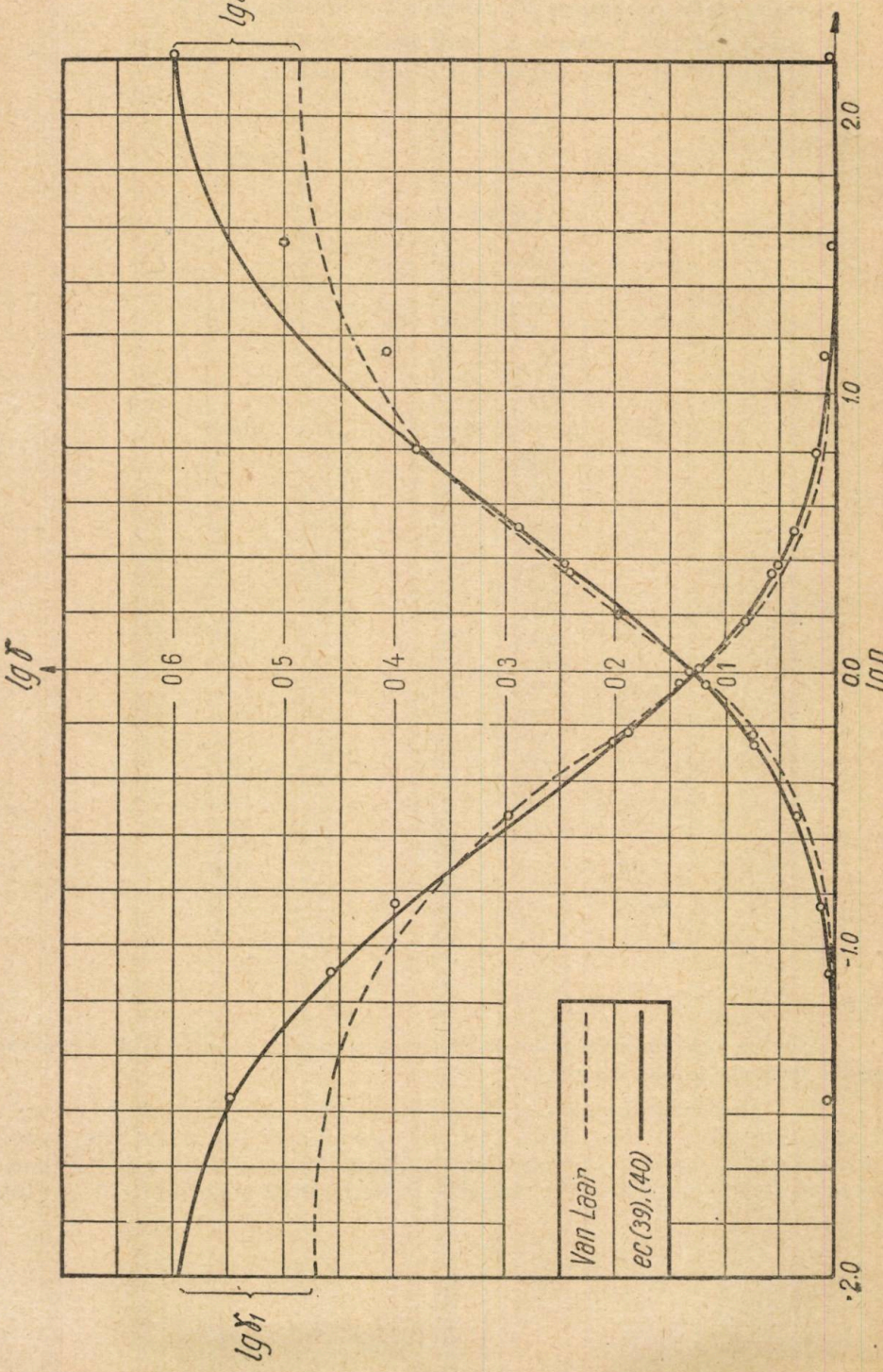



Fig. 4 — Verificarea ecuațiilor (39) și (40) la sistemul binar metiletilcetona — *n*-heptan,

*Notații*

$a_{ih}$, $a_{ihj}$ etc. = constante;
$c$ = constante definite de ecuațiile (17) și (19);
$e$ = 2,718...
$h$ = constantă definita de ecuația (27);
$m$ = numărul de moli;
$m^0$ = numărul de molecule vecine care influențează o moleculă dintr-un lichid unar;
$n$ = $x_1/x_2$ = raportul molar;
$x$ = fracția molară;
$z$ = fracția volumică molară, definită de ecuația (6):
$A$ = constantă definită de ecuația (21) și (22) = constantă în ecuația van Laar;
$A_1$ = constantă definită de ecuația (38);
$A_2$ = constantă definită de ecuația (37);
$B$ = constantă definită de ecuația (21) și (22) = constantă în ecuația van Laar;
$E$ = constantă definită de ecuația (54);
$G^E$ = excesul energiei libere;
$\mathbf{G}^E = G^E/(m_1 + m_2 + ...)$ = excesul energiei libere molare;
I = influența moleculelor vecine asupra unei molecule dintr-un lichid binar;
$I^0$ = influența moleculelor vecine asupra unei molecule dintr-un lichid unar;
**M** = notație definită de ecuația (50);
**N** = notație definită de ecuația (51);
**P** = notație definită de ecuația (52);
**R** = notație definită de ecuația (52);
$R$ = constanta universală a gazelor;
$T$ = temperatura absolută;
$V$ = volumul molar efectiv;
$V^0$ = volumul molar;
$\gamma$ = coeficientul de activitate;
$\varphi$ = frecvența moleculelor în jurul cărora există concentrația $n'$:
$\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{12}$, $\varepsilon_{22}$ = influența medie a unei molecule de component 1 (resp. 2) asupra unei molecule de component 1 (resp. 2);
$\pi$ = 3,14...
$\psi$ = notație definitivă de ecuația (43);
$\Delta I$ = variația influenței totale asupra a $m_1$ moli de component 1 și $m_2$ moli de component 2 cînd se trece de la lichidele unare la soluția binară;
$\Delta I_1 = I_1 - I_1^0$.
Indicii 1 și 2 ce referă la cei doi componenți ai sistemului binar.
Indicația ' (prim) se referă la mărimi locale.

Primit la redacție la 1 III 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *Broughton, D. B. și Brearley. C, S.*—Ind. Eng. Chem., *47*. 838 (1955).
2. *Gilliland, E. R.*—„Elements of Fractional Distillation", ed. *4*, New-York, Mc. Graw-Hill Book Co., 1950.
3. *Hougen, O. A, și Watson, K. M.*— „Chemical Process Principles", partea a II-a, New-York, John Wiley, 1947.

4. *Redlich, O., şi Kister, A. T.*—Ind. Eng. Chem., *40*, 341 (1948).
5. *Redlich. O., şi Kister, A. T.*—Ind. Eng. Chem. *40*. 345 (1948).
6 *Rose, A., Williams, E. T., Sanders, W, W., Heiny R. L., şi Ryan, J. F.* — Ind. Eng. Chem., *45*, 1568 (1953).
7. *Scatchard, G., şi Hamer, W. J.*—J. Am. Chem. Soc., *57*, 1805 (1935).
8. *Steinhauser, H. H. şi White, R. R.*—Ind. Eng. Chem., *41*, 2912 (1940).
9. *Wohl, K.*—Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., *42*, 215 (1946).

## РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТЬ—ПАР ДЛЯ БИНАРНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ АКТИВНОСТИ

(Краткое содержание)

В первой части работы получены уравнения ван Лаара для бинарных и унарных растворов с учётом разницы влияния соседних мол кул и с равнением этого влияния с избыточной энергией (Скатчард).

Во второй части работы вышеуказанный метод распространён на случаи, когда местная неоднорость концентрации распределяется логарифмически по Гауссу вокруг средней концентрации.

Получены уравнения (39) и (40) с четырьмя постоянными. Показано, что эти уравнения удовл творяют уравнению Джибса-Дюгема.

При применении к двойной системе метилэтилкетон-*n*-гептан оказывается, что экспериментальные данные удовтетворяют значительно лучше уравнениям (39) и (40), чем уравнениям ван Лаара.

Этот результат можно считать подтверждением гипотезы флуктуации (местная переменная концентрация), применяемой при выведении уравнений (39) и (40).

## L'ÉQUILIBRE LIQUIDE-VAPEUR DES SYSTÈMES BINAIRES. UNE ÉQUATION POUR LES COEFFICIENTS D'ACTIVITE

(Résumé)

Les équations van Laar sont déduites en calculant la différence entre l'influence des molécules voisines dans la solution binaire et celle dans le liquide unaire et en identifiant cette influence avec l'excès de l'énergie libre (Scatchard).

Dans la seconde partie, le même raisonnement est étendu en considérant l'inuniformité locale des concentrations d'après une répartition Gauss logarithmique. Les équations (39) et (40) avec quatre constantes sont ainisi déduites. On démontre que ces équations vérifient l'équation Gibbs-Duhem.

Appliquées au système méthyléthylcétone — *n* - heptane, les équations (39) et (40) vérifient mieux que celles de van Laar les données expérimentales. Ce résultat peut être considéré comme une confirmation à l'appui de l'hypothèse des fluctuations (concentration locale variable) utilisée dans la déduction des équations (39) et (40).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956: Fascicola 1-2

541.1.

# ECUAŢII PENTRU COEFICIENŢII DE ACTIVITATE

de E. RUCKENSTEIN

Abaterea unei soluţii neideale de la starea ideală este caracterizată din punct de vedere termodinamic de diferenţa $Q$ dintre energia liberă a soluţiei şi energia liberă a unei soluţii ideale, diferenţă numită de Scatchard şi Hamer [1] energie liberă de exces. Coeficientul de activitate $\gamma_i$ al componentului $i$ este legat de $Q$ prin ecuaţia

$$RT \ln \gamma_i = \frac{\partial Q}{\partial n_i}, \tag{1}$$

în care $R$ este constanta universală a gazelor, $T$ — temperatura absolută şi $n_i$ — numărul de moli de component $i$.

Wohl *) [2], [3], folosind pentru energia liberă de exces expresia empirică (4)**), reuşeşte să prezinte relaţiile propuse de van Laar [4], [5], Margules [5], sau Scatchardt [1], pentru coeficienţii de activitate, drept cazuri particulare ale unei formule mai generale. Dintre expresiile menţionate sînt folosite mai des cele ale lui van Laar:

$$lg \gamma_1 = \frac{A_1 x_2^2}{\left[\frac{A_1}{A_2} x_1 + x_2\right]^2} \tag{2a}$$

$$lg \gamma_2 = \frac{A_2 x_1^2}{\left[x_1 + \frac{A_2}{A_1} x_2\right]^2}. \tag{2b}$$

$x_1$ şi $x_2$ sînt fracţiile molare ale componentului 1 şi 2, $A_1$ şi $A_2$ constante empirice.

In mod empiric s-a ajuns la concluzia că aceste expresii pot fi folosite dacă [6]

$$\frac{1}{2} < \frac{A_1}{A_2} < 2, \tag{3a}$$

sau, deoarece la stabilirea lor cu ajutorul expresiei (4) a lui Wohl se presupune că $\frac{A_1}{A_2} = \frac{V_1}{V_2}$, $V_1$ şi $V_2$ fiind volumele molare ale celor doi com-

*) Lucrările [2] şi [4] nu mi-au fost accesibile.

**) Menţionăm că prin folosirea în (4) a volumelor molare ale componenţilor puri particularizăm întrucitva expresia lui Wohl.

ponenți puri,

$$\frac{1}{2} < \frac{V_1}{V_2} < 2. \tag{3b}$$

Expresia lui Wohl este deci valabilă dacă $\frac{V_1}{V_2}$ este suficient de apropiat de unitate. Scopul acestei lucrări este găsirea unei expresii pentru $Q$ (și deci și pentru coeficienții de activitate) valabile și în afara intervalului (3b).

Remarcăm că există o categorie particulară de soluții, caracterizată prin faptul că entalpia de exces este egală cu zero (soluțiile atermice), la care influența lui $\frac{V_1}{V_2}$ este cu atît mai importantă cu cît acest raport este mai depărtat de unitate. Pentru soluțiile atermice, $Q$ este dat de expresia aproximativă (8) [7], și facem observația că expresia lui Wohl nu conține acest caz. Pe de altă parte, expresia lui Wohl conține cazul particular al soluțiilor regulate [ecuația (7)], pentru care entropia de exces este egală cu zero. Aceste observații ne-au determinat să considerăm că expresia lui Wohl reprezintă numai entalpia de exces și ne-au sugerat să introducem în expresia (4) încă un termen care să conțină entropia de exces. Pentru acest din urmă termen, vom folosi, într-o primă aproximație, expresia valabilă pentru soluții atermice. Termenul adăugat este important numai dacă $\frac{V_1}{V_2}$ este suficient de depărtat de unitate.

Wohl folosește pentru $Q$ expresia

$$Q = RT\left(\sum_i n_i\right)\left(\sum_i V_i x_i\right)\left(\sum_{ih} a_{ih} z_i z_h + \sum_{ihj} a_{ihj} z_i z_h z_j + \cdots\right), \tag{4}$$

în care

$$z_i = \frac{V_i x_i}{\sum_j V_j x_j},$$

$V_i$ — volumul molar al componentului $i$ pur;
$x_i$ — fracția molară a componentului $i$;
$a_{ih}$, $a_{ihj}$ — constante empirice (constantele care se deosebesc doar prin ordinea indicilor sînt egale între ele).

Fiecare dintre sumele ecuației (4) reprezintă însumarea acelor combinații de specii moleculare în care apar cel puțin două molecule de specii diferite.

Adăugînd ecuației (4) expresia valabilă pentru soluții atermice, obținem:

$$Q = RT\left(\sum_i n_i\right)\left(\sum_i V_i x_i\right)\left(\sum_{ih} a_{ih} z_i z_h + \sum_{ihj} a_{ihj} z_i z_h z_j + \cdots\right) + RT\sum_i n_i \ln \frac{z_i}{x_i}. \tag{5}$$

In cele ce urmează ne vom limita la amestecuri binare. Oprindune la suma cu trei indici, ecuația (5) conduce la

$$Q = RT\,(n_1+n_2)(V_1x_1+V_2x_2)(2a_{12}z_1z_2+3a_{122}z_1z_2^2+3a_{112}z_1^2z_2) + \\ + RT\left(n_1 ln\frac{z_1}{x_1}+n_2 ln\frac{z_2}{x_2}\right). \quad (6)$$

Să arătăm că ecuația (6) conține, atît cazul soluțiilor regulate, cît și cel al soluțiilor atermice.

In adevăr, dacă

$$V_1 = V_2 \text{ și } a_{112} = a_{122},$$

din ecuația (6) se obține expresia

$$Q = RT(n_1+n_2)V_1(2a_{12}+3a_{112})x_1x_2, \quad (7)$$

care este de aceeași formă cu aceea valabilă pentru soluții regulate [7]; dacă

$$a_{112} = a_{122} \text{ și } 2a_{12}+3a_{112} = 0,$$

primul din cei doi termeni ai expresiei (6) este egal cu zero și se regăsește expresia

$$Q = RT\left(n_1 ln\frac{z_1}{x_1}+n_2 ln\frac{z_2}{x_2}\right). \quad (8)$$

valabilă în mod aproximativ pentru soluții atermice.

Pentru coeficienții de activitate se obțin, folosind (6), ecuațiile *)

$$ln\,\gamma_1 = z_2^2\left[A_1+2\left(A_2\frac{V_1}{V_2}-A_1\right)z_1\right]+\left(1-\frac{V_1}{V_2}\right)z_2-ln\left(\frac{V_2}{V_1}x_2+x_1\right), \quad (9a)$$

$$ln\,\gamma_2 = z_1^2\left[A_2+2\left(A_1\frac{V_2}{V_1}-A_2\right)z_2\right]+\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)z_1-ln\left(\frac{V_1}{V_2}x_1+x_2\right), \quad (9b)$$

unde

$$A_1 \equiv V_1(2a_{12}+3a_{122}) \quad (10a)$$

și

$$A_2 \equiv V_2(2a_{12}+3a_{112}). \quad (10b)$$

Pentru $V_1 = V_2$, ecuațiile (9) conduc la expresiile propuse de Margules [5]. Dacă pe lîngă $V_1 = V_2$ avem și $a_{112} = a_{122}$, ecuațiile (9) conduc la expresiile valabile pentru soluțiile regulate. Pentru $A_1 = A_2 = 0$, regăsim cazul soluțiilor atermice.

Dacă $V_1$ este suficient de apropiat de $V_2$ pentru ca diferența dintre ultimii doi termeni ai ecuației (9) să fie neglijabilă în comparație cu primul termen **), ecuația (9) se reduce la primul său termen, care coincide cu expresia lui Scatchard și Hamer [1]. Dacă, în afară de condiția menționată mai sus, avem și $\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_1}{A_2}$, primul termen la care se reduce ecuația (9) coincide cu ecuația lui van Laar.

*) Pentru un caz particular al ecuațiilor (9) vezi și [8].

**) Prin suficient de apropiate înțelegem, de exemplu, și $\frac{V_1}{V_2} = 2$ sau $^1/_2$.

Faptul că pentru numeroase amestecuri se pot folosi ecuaţiile lui van Laar, ar putea fi deci explicat prin aceea că $V_1$ este suficient de apropiat de $V_2$ pentru ca diferenţa dintre ultimii doi termeni ai ecuaţiilor (9) să poată fi neglijată în comparatie cu primul termen*).

Din cele arătate mai sus rezultă că ecuaţia (9) conţine drept cazuri particulare o serie de formule cunoscute şi că ea poate fi eventual extinsă la un domeniu pe care aceste formule nu-l acoperă.

Trimit la redacţie 29 I 1956

## BIBLIOGRAFIE

1. *G. Scatchard şi W. J. Hamer*—J. Am. Chem. Soc., vol. 57. p. 1805, 1935.
2. *K. Wohl*—Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., vol. 42, p. 215, 1946.
3. *O. A. Hougen şi K. M. Watson*—Thermodynamics, Wiley, New-York, 1947, p. 649.
4. *J. J. van Laar*—Z. phys. Chem. vol 185, p 35, 1929.
5. *H. C. Carlson şi A. P. Colburn*—Ind. Eng. Chem, vol 34, p. 581, 1942.
6. *J. H. Perry*—Chemical Engineers' Handbook, Mc. Grav-Hill, New-York, 1950. p. 527.
7. *G. Kortüm şi H. Buchholz Meisenheimer*—articol în cartea editată de H. A. Stuart, Das Makromolecül in Lösungen, Springer, Berlin, 1953, p. 45-55.
8. *E. A. Guggenheim*—Mixtures, Oxford, 1952.

## УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ АКТИВНОСТИ

(Краткое содержание)

Так как предложенное Волом [3] выражение для избыточной свободной энергий не содержит случая атермических растворов, прибавляют к нему еще другие члены. Соотношения которые получаются для коэффициентов активности бинарных смесей, содержат в качестве частных случаев уравнения Маргулеса, уравнение для регулярных растворов и уравнения для атермических растворов. Если $V_1/V_2$. отношение молярных обемов двух компонент, доволно близко к единнице, эти выражения приводят—путем приближения—к уравнениям ван Лаара и Скачарда. Под „Довольно блузко к единнице" мы понимаем например, и значениа 2 или 1/2.

## EQUATIONS FOR THE ACTIVITY COEFFICIENTS

(Abstract)

Since the expression proposed by Wohl [3] for the excess free energy does not include the case of athermic solutions, new terms are added to it. The expressions thus obtained for the activity coefficients of binary mixtures include, as special cases, Margules equations, the equations for regular solutions and the equations for athermic solutions. If $V_1/V_2$, the ratio of the molar volumes of the two components, is near enough to unity, these expressions lead by aproximation to van Laar's and Scatchard's equations. By „near enough to unity" we understand even 1/2 or 2.

*) Chiar dacă diferenţa dintre ultimii doi termeni nu este neglijabilă în comparaţie cu primul, însă este mică, este încă posibilă aproximarea ecuaţiei (9) prin primul său termen, dacă se determină în mod convenabil valorile lui $A_1$ şi $A_2$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

5.41.

# ECUAȚII PENTRU COEFICIENȚII DE ACTIVITATE AVÎND O PROPRIETATE DE SIMETRIE A ECUAȚIILOR LUI VAN LAAR*)

de E. RUCKENSTEIN și O. SMIGELSCHI

Ecuațiile propuse de van Laar [1] pentru coeficienții de activitate

$$lg\,\gamma_1 = \frac{A}{\left[1+\frac{Ax_1}{Bx_2}\right]^2} \quad \text{și} \quad lg\,\gamma_2 = \frac{B}{\left[1+\frac{Bx_2}{Ax_1}\right]^2}, \tag{1}$$

conțin variabila comună

$$\eta = \frac{A\,x_1}{B\,x_2}, \tag{2}$$

iar scrierea lor funcție de această variabilă pune în evidență o anumită simetrie:

$$lg\,\gamma_1 = A\,F\,(\eta) \qquad lg\,\gamma_2 = BF\left(\frac{1}{\eta}\right). \tag{3}$$

Datele experimentale obținute de Steinhauser și White [2] pentru amestecul metiletilcetonă — *n.* heptan pot fi reprezentate prin ecuații de forma (3), dar funcțiunea $F$ nu este suficient de bine dată de aceea care corespunde ecuațiilor lui van Laar**). Din acest motiv, în cele ce urmează, vom propune expresii care prezintă simetria din (3) și concordă mai bine cu aceste date experimentale decît ecuațiile (1).

Deoarece orice expresie pentru coeficienții de activitate trebuie să satisfacă ecuația lui Gibbs-Duhem, vom căuta, la început, familia de soluții de forma (3) care satisface această ecuație.

---

*) O prezentare pe scurt a conținutului acestei lucrări va apare în Dokladî Academii Nauc S.S S.R. vol. 111, 1956.

**) Ecuațiile lui Margules sau Scatchard nu reprezintă acestei date experimentale mai bine decît ecuațiile lui van Laar.

Introducînd expresiile (3) în ecuaţia

$$x_1 d\lg\gamma_1 + x_2 d\lg\gamma_2 \approx 0, \tag{4}$$

care este o consecinţă a ecuaţiei lui Gibbs-Duhem, obţinem ecuaţia funcţională

$$\eta dF(\eta) + dF\left(\frac{1}{\eta}\right) \approx 0. \tag{5}$$

Ecuaţia (4) este riguros valabilă la presiune şi temperatură constantă. Folosind pentru calculul coeficienţilor de activitate curbe de echilibru lichid — vapori determinate la presiune constantă, din legea fazelor rezultă că, pentru un amestec binar, temperatura nu este constantă. Remarcăm însă că şi ecuaţiile lui van Laar şi Margules sînt riguros valabile la presiune şi temperatură constantă şi cu toate acestea sînt folosite pentru echilibrul lichid — vapori.

Introducînd o nouă variabilă $\mu$ prin relaţia

$$\eta = \frac{1+\mu}{1-\mu}, \tag{6}$$

putem scrie

$$F(\eta) = F\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \equiv \varphi(\mu)$$

şi

$$F\left(\frac{1}{\eta}\right) = F\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right) \equiv \varphi(-\mu). \tag{7}$$

Ecuaţia (5) devine

$$(1+\mu)d\varphi(\mu) + (1-\mu)d\varphi(-\mu) = 0, \tag{8}$$

de unde rezultă că

$$(1+\mu)\frac{d\varphi(\mu)}{d\mu} = (1-\mu)\frac{d\varphi(-\mu)}{d-\mu}. \tag{8'}$$

Prin urmare,

$$(1+\mu)\frac{d\varphi(\mu)}{d\mu} = P(\mu), \tag{9}$$

$P(\mu)$ fiind o funcţiune pară de $\mu$.

Deoarece $F(\eta)$ trebuie să tindă către zero cînd $x_1 \to 1 (\eta \to \infty)$, rezultă că $\varphi(\mu) \to 0$ cînd $\eta \to \infty$ $(\mu \to 1)$.

Ţinînd seamă de acest lucru, prin integrarea ecuaţiei (9), se obţine

$$\varphi(\mu) = \int_1^{\mu} \frac{P(\mu)}{1+\mu} d\mu. \tag{10}$$

Familia de soluții de forma (3), care satisface ecuația lui Gibbs-Duhem, se poate deci construi cu ajutorul funcției

$$F(\eta) = \int_{1}^{\frac{\eta-1}{\eta+1}} \frac{P(\mu)}{1+\mu}\, d\mu . \tag{11}$$

In cazul special al ecuațiilor lui van Laar,

$$\varphi(\mu) = \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2$$

și

$$P(\mu) = (1+\mu)\frac{d\varphi(\mu)}{d\mu} = -\frac{1}{2}(1-\mu^2). \tag{12}$$

In loc să folosim pentru $P(\mu)$ expresia (12), vom folosi o expresie ușor corectată

$$P(\mu) = -\frac{1}{2}(1-\mu^2)(1+\varepsilon\mu^2), \tag{13}$$

$\varepsilon$ fiind o nouă constantă empirică.

Introducînd (13) în (10), obținem

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{24} - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}\mu^2 - \frac{1}{6}\varepsilon\mu^3 + \frac{1}{8}\varepsilon\mu^4. \tag{14}$$

Prin urmare,

$$lg\ \gamma_1 = A\left[\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{24} - \frac{1}{2}\frac{Ax_1 - Bx_2}{Ax_1 + Bx_2} + \frac{1}{4}\left(\frac{Ax_1 - Bx_2}{Ax_1 + Bx_2}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon}{6}\left(\frac{Ax_1 - Bx_2}{Ax_1 + Bx_2}\right)^3 + \frac{\varepsilon}{8}\left(\frac{Ax_1 - Bx_2}{Ax_1 + Bx_2}\right)^4\right]$$

și (15)

$$lg\,\gamma_2 = B\left[\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{24} + \frac{1}{2}\frac{Ax_1 - Bx_2}{Ax_1 + Bx_2} + \frac{1}{4}\left(\frac{Ax_1 - Bx_2}{Ax_1 + Bx_2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon}{6}\left(\frac{Ax_1 - Bx_2}{Ax_1 + Bx_2}\right)^3 + \frac{\varepsilon}{8}\left(\frac{Ax_1 - Bx_2}{Ax_1 + Bx_2}\right)^4\right].$$

Notînd

$$A' \equiv (lg\,\gamma_1)_{x_1 = 0}$$

și

$$B' \equiv (lg\,\gamma_2)_{x_2 = 0},$$

din ecuațiile (15) rezultă că

$$A' = A\left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

și

$$B' = B\left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Ecuaţiile (15) se pot deci scrie

$$lg\,\gamma_1 = \frac{A'}{1+\frac{\varepsilon}{3}}\left[\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{24}-\frac{1}{2}\frac{A'x_1-B'x_2}{A'x_1+B'x_2}+\frac{1}{4}\left(\frac{A'x_1-B'x_2}{A'x_1+B'x_2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon}{6}\left(\frac{A'x_1-B'x_2}{A'x_1+B'x_2}\right)^3+\frac{\varepsilon}{8}\left(\frac{A'x_1-B'x_2}{A'x_1+B'x_2}\right)^4\right] \tag{16}$$

şi

$$lg\,\gamma_2 = \frac{B'}{1+\frac{\varepsilon}{3}}\left[\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{24}+\frac{1}{2}\frac{A'x_1-B'x_2}{A'x_1+B'x_2}+\frac{1}{4}\left(\frac{A'x_1-B'x_2}{A'x_1+B'x_2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{6}\left(\frac{A'x_1-B'x_2}{A'x_1+B'x_2}\right)^3+\frac{\varepsilon}{8}\left(\frac{A'x_1-B'x_2}{A'x_1+B'x_2}\right)^4\right].$$

Determinarea lui $\varepsilon$ din datele experimentale se face cel mai comod la acea valoare a lui $x_1$ pentru care

$$A'x_1 = B'x_2. \tag{17}$$

In acest caz ecuaţiile (16) conduc la

$$1+\frac{\varepsilon}{3} = \frac{A'}{lg\,\gamma_1'}\left(\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{24}\right)$$

şi

$$1+\frac{\varepsilon}{3} = \frac{B'}{lg\,\gamma_2'}\left(\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{24}\right), \tag{18}$$

$\gamma_1'$ şi $\gamma_2'$ reprezentînd valorile coeficienţilor de activitate pentru aceea valoare a lui $x_1$ dată de ecuaţia (17).

Deoarece pentru amestecurile care prezintă simetria pusă în evidenţă de ecuaţiile (3) avem totdeauna

$$\frac{A'}{lg\,\gamma_1'} = \frac{B'}{lg\,\gamma_2'}, \tag{19}$$

rezultă că sistemul de ecuaţii (18) este compatibil.

Subliniem faptul că chiar dacă condiţia (19) nu este suficient de bine îndeplinită, este încă posibilă reprezentarea datelor experimentale prin ecuaţiile (16), dacă se alege o altfel de valoare pentru $\varepsilon$ încît concordanţa cu toate datele experimentale să fie cît mai bună.

Caracterul empiric al formulelor propuse de noi pentru coeficienţii de activitate nu permite precizarea condiţiilor lor de valabilitate.

Aplicăm ecuaţiile (16) la amestecul metiletilcetonă—*n* heptan [2]. După cum se vede din fig. 1, ecuaţiile (16) reprezintă bine datele experimentale. Ecuaţiile lui van Laar reprezintă bine datele experimentale din regiunea centrală, dacă constantele sînt determinate din puncte situate în această regiune.

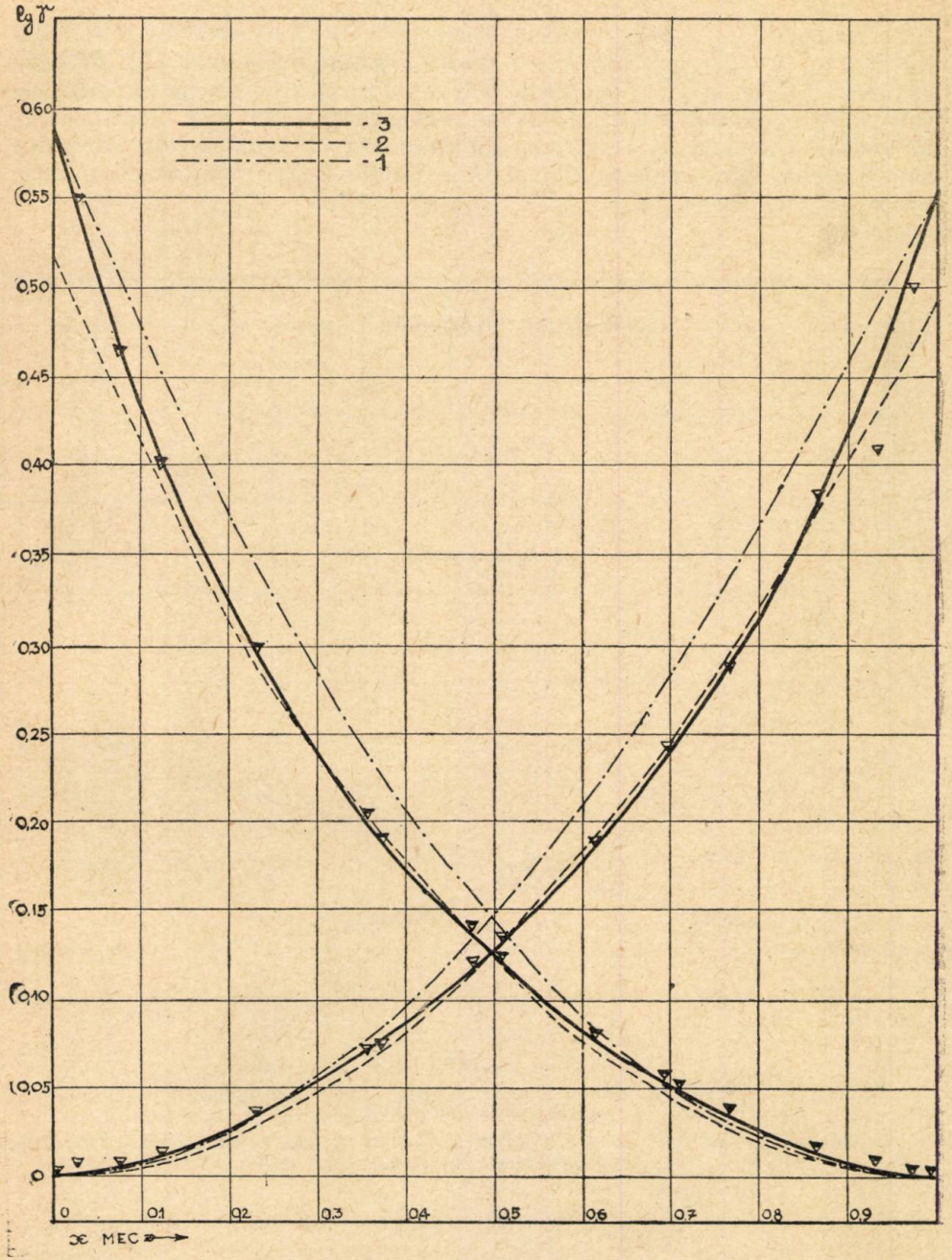



Fig. 1—Sistemul metiletilcetonă-n heptan

1. Ecuațiile lui van Laar în care A și B reprezintă $(lg\ \gamma_1)_{x_1=0}$ și $(lg\ \gamma_2)_{x_2=0}$
2. Ecuațiile lui van Laar în care A și B au fost calculate din coordonatele punctului de intersecție a celor două curbe
3. Ecuațiile (16) în care A' = 0,590; B' = 0,565; ε = 0,996

Se aplică de asemenea ecuaţiile (16) la amestecurile 2 metil-3 butin 2 ol — apă şi 3 hidroxi 3 metil 2 butanonă — apă [3]. Precum se vede din fig. 2 şi 3, ecuaţiile (16) reprezintă bine datele experimentale şi în regiunea $0 < x_1 < 0{,}1$, în care ecuaţiile lui van Laar prezintă abateri importante. In [3] se menţionează că ecuaţiile lui Margules sau Scatchard nu reprezintă mai bine datele experimentale decît ecuaţiile lui van Laar.

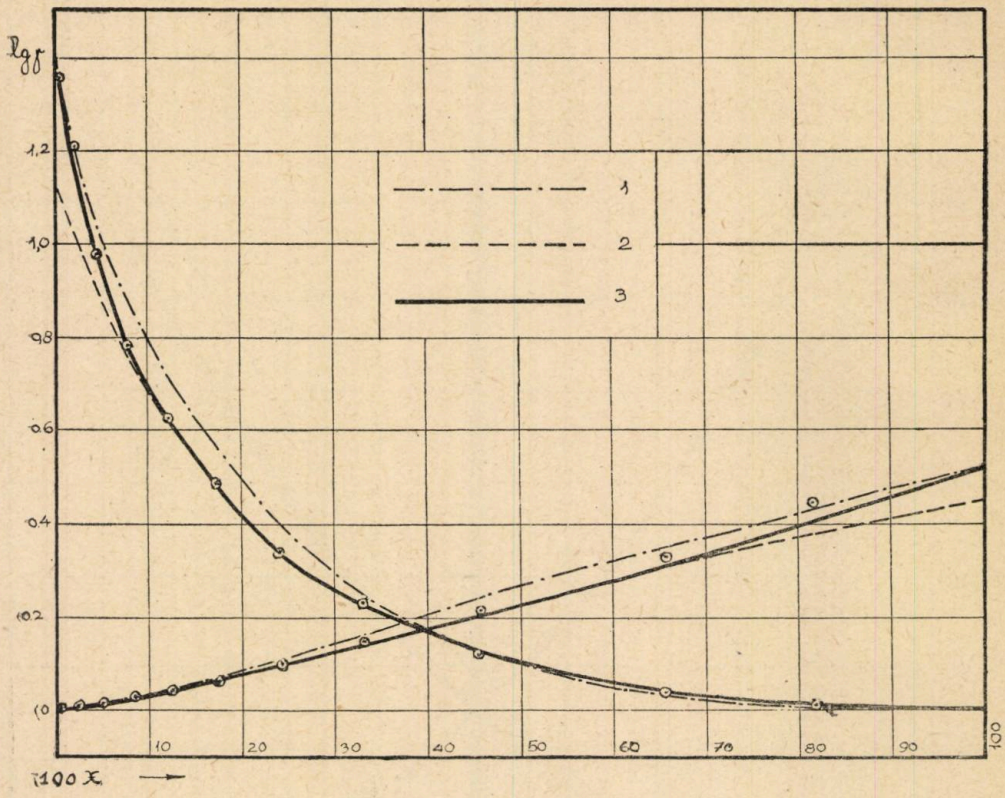



Fig. 2—Sistemul 2 metil 3 butin 2 ol — apă

1. Ecuaţiile lui van Laar în care A si B regrezintă valorile maxime ale logaritmului coeficienţilor de activitate
2. Ecuaţiile lui van Laar în care constantele A şi B au fost calculate din coordonatele punctului de intersecţie a celor două curbe
3. Ecuaţiile (16) in care

$$A' = 1{,}40;\ B' = 0{,}514;\ \varepsilon = 1$$

Deoarece în domeniul $x_1 > 0{,}6$ datele experimentale pentru $\gamma_2$ luate din [3] nu sînt consistente din punct de vedere termodinamic, lucru menţionat şi în [3], am determinat pe $B' = (\lg \gamma_2)_{x_1=1}$ din curba $lg\ \gamma_1$, $x_1$, folosind forma integrată a ecuaţiei Gibbs-Duhem.

In încheiere menționăm că o problemă similară, mai simplă din punct de vedere matematic, a fost soluționată și de Guggenheim, în legătură cu soluțiile regulate [4].

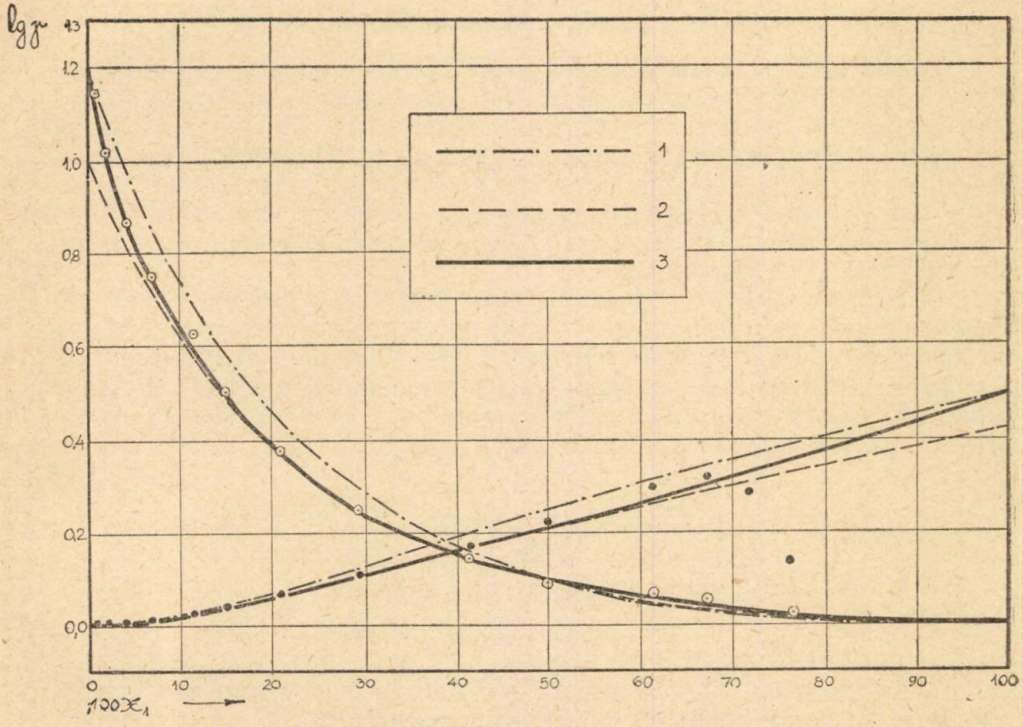



Fig. 3—Sistemul 3 hidroxi 3 metil 2 butanonă—apă

1. Ecuațiile lui van Laar în care A și B reprezintă valorile maxime ale logaritmului coeficienților de activitate
2. Ecuațiile lui van Laar în care constantele au fost calculate din coordonatele punctului de intersecție
3. Ecuațiile (16) în care

$$A' = 1{,}20;\quad B' = 0.491;\quad \varepsilon = 1{,}10$$

*Notații*

$x$ = fracție molară în faza lichidă

$\gamma$ = coeficientul de activitate

Indicii 1 și 2 se referă ta primul, respectiv la al doilea component.

$A$, $A'$, $B$, $B'$, $\varepsilon$, = constante empirice.

Primit la redacție la 1.III. 1956,

## BIBLIOGRAFIE

1. *H. C. Carlson și A. P. Colburn*—Ind. Eng. Chem. vol. 34, p. 581, (1942).
2. *H. H. Steinhauser și R. R. White*—Ind. Eng. Chem. vol. 41, p. 2912, (1949).
3. *A. Conner, Ph. Elving, J. Benischek, Ph. Tobias, S. Steingiser*—Ind. Eng. Chem, vol. 42, p. 106, (1950).
4. *Guggenheim E. A. Thermodynamics*—North—Holland publishing company, Amsterdam, 1950, p. 201.

## УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЕФФИЦИЕНТОВ АКТИВНОСТИ, ИМЕЮЩИХ СВОИСТВА СИММЕТРИЧНОСТИ УРАВНЕНИИ ВАН ЛААРА

(Краткое содержание)

Уравнения (1), предложенные ван Лааром для коеффициентов активности, содержат общую переменную (2); представляя их в зависимости от этой переменной выявляется некоторая симметрия (3). Экспериментальные данные, полученные Штейнгаузэром и Уайтом [2] для смеси метил-этилкетона *n*—гептан м можно представить уравнениями, вида (3), но функция $F$ недостаточно совпадает с уравнением ван Лаара. Уравнения Маргулеса или Скачарда не представляют лучще эти экспериментальные данные, чем уравнения ван Лаара.

Вследствие этого необходимо найти семейство решений вида (3), удовлетворяющее уравнению Джибса-Дюгема. Из этого семейства решений выбирают одно, ур. (16), представляющее очень хорошо экспериментальные данные, полученные для смеси метил-этил-кетона *n*-гептаном. Тоже самое можно сказать и про смесей 2 метил 3 бутин 2 ол—водой, и 3 гидрокси 3 метил 2 бутанон—водой [3].

## EQUATIONS POUR LES COEFFICIENTS D'ACTIVITÉ AYANT UNE DES PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIE DES ÉQUATIONS DE VAN LAAR

(Résumé)

Les équations (1), proposées par van Laar pour les coefficients d'activité $\gamma$, contiennent la variable commune (2) et en exprimant celles-ci en fonction de cette variable on met en évidence une certaine symétrie [éq. (3)]. Les valeurs expérimentales obtenues par Steinhauser et White [2] pour le mélange méthyl-éthyl-cétone-n. heptane, peuvent étre représentées par des équations du type (3), mais la fonction $F$ ne coincide pas suffisamment bien avec la fonction qui corespond aux équations de van Laar[1]). C'est ce motif qui nous a poussés à chercher la famille de solutions du type (3) qui satisfasse l'équation de Gibbs-Duhem. De cette famille on choisit une, [eq. (16)], qui représente très bien les valeurs expérimentales de Steinhauser et White, ainsi que les données expérimentales pour les mêlanges 2 méthyl —3 butin 2 ol—eau et 3 hydroxy 3 méthyl 2 butanone—eau [3].

[1]) Les équations de Margules ou de Scatchard ne représentent pas ces données expérimentales mieux que les équations de van Laar.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956 ; Fascicola 1-2

543.31

# METODĂ VOLUMETRICĂ DE DOZARE A HIDRAZIDEI ACIDULUI IZONICOTINIC (REMIFON)

de P. SPACU şi GR. TEODORESCU

Pentru dozarea hidrazidei acidului izonicotinic se cunosc o serie de metode bazate pe principii diferite din care rezultă importanţa acestei probleme pentru chimia analitică. Dintre acestea citãm pe cele mai importante:

Hidrazida acidului izonicotinic poate fi determinată cu o soluţie 0,1 *n* permanganat de potasiu în mediu acid [1], [2].

Unele metode se bazează pe oxidarea hidrazidei acidului izonicotinic cu un exces de soluţie etalonată de iod excesul de iod, titrîndu-se cu o soluţie de tiosulfat de sodiu [3], [4], [5], [6].

Metoda cu azotit de sodiu bazată pe titrarea produsului cu o soluţie 0,1 *m* azotit de sodiu la temperatură joasă, conduce la formarea azidei [7].

După Alvaro Noronha da Costa metoda cu azotit de sodiu dă rezultate prea mari (2—3%) [8].

Ioseph F. Alicino [9]) dozează hidrazida acidului izonicotinic cu acid percloric în mediu anhidru.

Metodele cu bromat se bazează fie prin tratarea soluţiei hidrazidei acidului izonicotinic, în mediu clorhidric, cu soluţie 0,1 *n* bromat de potasiu şi indicator ethoxicrisoidină [10], fie pe oxidarea hidrazidei acidului izonicotinic cu un exces de soluţie de bromat de potasiu, în mediu clorhidric, excesul titrîndu-se cu o soluţie de tiosulfat şi indicator amidon [11].

După Fernando Montesqui şi K. W. Mertz şi M. Schirm [12, [13] se poate întrebuinţa ca oxidant pentru dozarea hidrazidei acidului izonicotinic un exces din o soluţie 0,1 *n* de bicromat de potasiu, excesul fiind titrat cu o soluţie 0,1 n de tiosulfat de sodiu.

In metoda cu azotat de argint se precipită hidrazida acidului izonicotinic cu un exces de soluţie 0,01 *m* azotat de argint, iar excesul de azotat de argint titrîndu-se cu o soluţie 0,01 *m* tiocianat de amoniu şi indicator alaun feric [14].

Metoda cu iodat pentru dozarea hidrazidei acidului izonicotinic se efectuează cu o soluţie 0,05 *m* iodat de potasiu, în mediu clorhidric, folosind indicator p. ethoxicrisoidină în alcool etilic, iar paralel se face

și o probă martor [15]. După Al. Kattionis [16] se titrează cu o soluție de iodat de potasiu 0,02 *m*. O variantă a metodei este dată de M. Struszynsky și Z. Bellen [17])

O metodă gravimetrică pentru dozarea hidrazidei acidului izonicotinic este aceea cu acid picric [18].

Metodele colorimetrice dozează hidrazida acidului izonicotinic fie cu o soluție $10\%$ $H_3PMo_{12}O_{40}$ al cărei pH = 6,5 — 7 se obține cu NaOH 1n, culoarea comparînd-o cu o soluție standard; fie cu o soluție de clorură de picril alcalină în prezența de $NaHCO_3$ (pH = 7,1 — 7,7), măsurîndu-se extincția cu un fotometru Pulfrich [19], [20].

Procedeul gazometric de dozarea hidrazidei acidului izonicotinic se bazează pe faptul că aceasta pune în libertate azotul cantitativ, fie în prezența unei soluții saturate de iodat de sodiu, în alcool fie în soluția alcoolică de fericianură de potasiu [21], [22].

Îsamu Tachi și Yoshinosuke cum și Grigorio Varela dau două metode polarografice pentru dozarea hidrazidei acidului izonicotinic [23], [24].

O metodă rapidă pentru determinarea hidrazidei acidului izonicotinic se bazează pe măsurători fotoelectrice cu fericianură de potasiu. Metoda este sensibilă pentru 2γ în 1 $cm^3$ de soluție [25]

In lucrarea de față dăm o metodă pentru dozarea hidrazidei acidului izonicotinic intrebuințînd iodat de potasiu ca oxidant, în prezență de iodură de potasiu, folosind același principiu care stă la baza unor metode folosite de unul din noi pentru determinarea diferitelor subtanțe [26], [27], ]28].

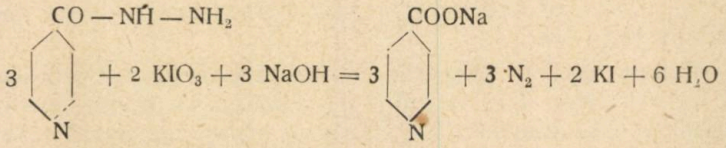
## *Modul de lucru*

Intr-un flacon iodometric se ia un număr de centimetri cubi (3—10) dintr-o soluție de hidrazidă a acidului izonicotinic, conținînd 0,015—0,05 g, se adaugă soluție de iodat de potasiu 0,1 *m* (2—5 $cm^3$) se diluează la 100—150 $cm^3$ cu apă distilată apoi 0,5 g KI.

După dizolvarea iodurii, se alcalinizează cu o soluție 0,2 *n* NaOH (15—30 cmc) și se lasă să stea 5 min.

Se adaugă acid sulfuric 0,5 *n* pînă la reacția acidă (5—10 $cm^3$) și se titrează cu o soluție 0,1 de tiosulfat de sodiu în prezență de amidon.

Astfel, prin diferență, se obține cantitatea de iodat întrebuințată pentru oxidarea hidrazidei acidului izonicotinic. O moleculă de iodat de potasiu oxidează 3/2 molecule de hidrazidă a acidului izonicotinic, transformînd-o în sare de sodiu după ecuația:



Unele din rezultatele obținute prin metoda noastră sînt date în tabela de mai jos:

| Nr. curent | Soluția hidrazidă a acidului izonicotinic în probă, în cm³ | Hidrazida ac. izonicotinic, în g | $KIO_3$ 0,1 m. în cm³ | Soluție $Na_2S_2O_3$ 0,1 m în cm³ | Hidrazida ac. izonicotinic găsită, în g | Diferență |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0,0250 | 2 | 4,95 | 0,0250 | 0,0000 |
| 2 | 5 | 0,0250 | 2 | 4,95 | 0,0250 | 0,0000 |
| 3 | 6 | 0,0300 | 3 | 9,7 | 0,0301 | +0,0001 |
| 4 | 6 | 0,0300 | 3 | 9,7 | 0,0301 | +0,0001 |
| 5 | 3 | 0,0150 | 2 | 8 | 0,0151 | +0,0001 |
| 6 | 7 | 0,0350 | 2 | 2,15 | 0,0350 | 0,0000 |
| 7 | 7 | 0,0350 | 3 | 7,7 | 0,0350 | 0,0000 |
| 8 | 9 | 0,0450 | 4 | 10,8 | 0,0448 | —0,0002 |
| 9 | 10 | 0,0500 | 4 | 9,3 | 0,0500 | 0,0000 |
| 10 | 9,5 | 0,0475 | 4 | 10,05 | 0,0473 | —0,0002 |
| 11 | 8 | 0,0400 | 4 | 12,35 | 0,0401 | +0,0001 |
| 12 | 10 | 0,0500 | 5 | 15,1 | 0,0501 | +0,0001 |
| 13 | 8,5 | 0,0425 | 4 | 11,5 | 0,0424 | —0,0001 |
| 14 | 9 | 0,0450 | 4 | 10,8 | 0,0452 | +0,0002 |

In probele 1—6 s-a folosit o soluție de tiosulfat de sodiu, a cărei corespodență față de iodat este 1 cm³. $KIO_3$ 0,1 *m*, la 6,33 cm³, $Na_2S_2O_3$, iar în probele 7—14 altă soluție de tiosulfat (pentru 1 cm³. $KIO_3$ 0,1 *m* corespunde 5,9 $Na_2S_2O_3$).

Metoda este rapidă obținându-se rezultate aproape teoretice, lucrînd în mediu alcalin. In mediu acid oxidarea hidrazidei acidului izonicotinic are loc în timp.

*Laboratorul de chimie anorganică și analitică*
*Institutul Politehnic București*

Primit la redacție la 5 IV 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *K. W. Merz și M. Schirm*—Naturwissenschaften 39,570—1 (1952)
2. *Aluisio Marques Leal și Maria Almanda*—Alves Rev. port. farm. 2,175—9 (1952)
3. *Teodor Canbäck*—J. Pharm. Pharmacol. 4,407 (1952)
4. *P. Castel, H. Orzalesi și A. Dubois*—Trav. Soc. Pharm. Montpelier 12,73—4 (1952)
5. *Joseph F. Alicino*—Farm. Polska 116—19 (1953)
6. *Alvaro Noronha de Costa*—Rew. Brasil. Farm. 33,343—50(1952)
7. *M. Businelli și B. Rochi*—Farm. sci. e tec. 7,153—60 (1952)
8. *Alvaro Naronha de Costa*—Rew. Brasil. Farm. 33 343—50 (1952)
9. *Joseph F. Alicino*—J. Am. Farm. Asoc. 41,401—402 (1952)
10. *Hans Wojahn*—Arzneimittel—Forsch, 2324—6 (1952)
11. *Dino Coppini, Ricardo Cameroni și Agar Monzani*—Ricerca Sci. 22, 1783—4 (1952)
12. *Fernando Montesqui*—Farm. nueva—Madrid—18,10—14 (1953)
13. *K. W. Merz și M. Schirm*—Naturwissenschaften, 39, 570—1 (1952)
14. *Juan A. Sanchez*—Rev. Assoc. bioquim. Argentina 17,324—6 (1952)
15. *A. P. Dombo*—J. Pharm. and Pharmacolog. 5, 117—118 (1953)
16. *Al. Kattionis*—Chim. Chronika (Athens, Greece) 17, 7—80 (1952)
17. *M. Siruszynschi și Z. Bellen*—Przemysl chem. 9, 1953. J Ch. O Zahl Analit.
18. *Aluisio Marques Leal și Maria Almanda*—Alves. Rev. port. Farm. 2,175—9 (1952)
19. *Hikaru Ozawa și Akika Kijomoto*—J. Pharm. Soc. Japan 72, 1059—60 (1952)
20. *Dino Coppini, Ricardo Cameroni și Agar Monzani*—Ricerca Sci. 22, 1783—4 (1952)

21. *Hans Harting*—J. Am. Pharm. Assoc, 42,323—4 (1953)
22. *Richard D. Strickland şi Wm. Henlel*—Am. J, Chim. Pathol. 24,988—92 (1954)
23. *Isamu Tachi şi Yoshinosuke*—J. Japan. Chem. 6,490—1 (1952)
24. *Gregorio Varela*—Anales real. Soc. espan. fis. y quim 48 B, 713—15 (1952)
25. *Morris B. Jacobs*—J Am. Pharm. Assoc. 42,345—8 (1953)
26. *P. Spacu*—Bul. Acad. Rom. XXVII, 1944, 51
27. *P. Spacu*—Bul. Acad. Rom. XXX, 1947
28. *P. Spacu*—Bul. Acad. Rom. XXX 1947, 193.

## ОБЧЁМНЫИ МЕТОД ДОЗИРОВКЙ ГИДРАЗИДА ИЗОНИКОТИНОВЙ КИСЛОТЫ

(Краткое содержание)

В настоящем сообщении авторы излагают точный метод дозировки гидразида изоникотиновой кислоты при помощи иоднокислого калия в присутствии нодистого калия.

В виду того, что в кислой среде окисление происходит медленно, после освобождения иода раствор ощелачивают при помощи 0,2 н — ого раствора гидрата окиси натрия; по прдшес вии пяти минут добывляют 0,5 н — ый раствор серной кйслоты до наступления кислой реакций. Титрируют 0,1 н.—ым раствором тиосульфата натрия в присутствии крахмала. Одпа молекула иоднокислой окиси, 3/2 молекулы гидразида изоникотиновой каслоты,

Рабочий метод быстр и дает весьма токные резильтаты.

## MÉTHODE VOLUMÉTRIQUE POUR LE DOSAGE DE L'HYDRAZIDE DE L'LCIDE ISONICOTINIQUE

(Résumé)

Dans la présente note, les auteurs donnent une méthode précise pour le dosage de l'hydrazide de l'acide isonicotinique avec de l'iodate de potassium en présence de l'iodure de potasium.

Comme l'oxydation a lieu lentement en milieu acide, après avoir mis l'iode en liberté, la solution s'alcalinise avec une solution 0,2 n d'hydroxide de sodium. Après cinq minutes on y ajoute une solution 0,5 n d'acide sulfurique jusqu'à réaction acide ; on titre avec une solution de thiosulfate de sodium 0,1 m en présence de l'amidon. Une molécule d'iodate oxyde 3/2 molécules d'hydrazide de l'acide isonicotinique.

La méthode de travail est rapide et les résultats obtenus sont très exacts.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956 ; Fascicola 1-2

545,31

# O NOUĂ METODĂ VOLUMETRICĂ DE DOZARE A HIDRAZIDEI ACIDULUI IZONICOTINIC (REMIFON)

de P. SPACU, Gr. TEODORESCU și D. GĂVĂNESCU

Hidrazida acidului izonicotinic se poate doza prin mai multe metode bazate pe determinări volumetrice, gravimetrice și fizico-chimice, după cum urmează :

determinări volumetrice [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] ;

determinare gravimetrică [18] ;
determinări colorimetrice [19,20] ;
determinări gazometrice [21,22] ;
determinări polarografice [23,24[ ;
determinare fotoelectrică [25].

Din aceste numeroase și variate metode de lucru se poate deduce importanța acestei probleme pentru chimia analitică.

Principiile unora dintre aceste metode au fost citate în lucrarea în care întrebuințam ca oxidant al hidrazidei acidului izonicotinic, o soluție de iodat-iodură.

In prezenta lucrare ne-am propus să folosim ca agent oxidant pentru hidrazida acidului izonicotinic „cloramina T", care prezintă avantajul că are o puternică acțiune de oxidare și este un produs al cărui preț de cost este mai scăzut decît al celorlalți oxidanți folosiți, economisind — în același timp — și consumul de iodură de potasiu.

Cloramina T, pe care am folosit-o, a fost preparată în laborator după datele din literatură [26].

## *Modul de lucru*

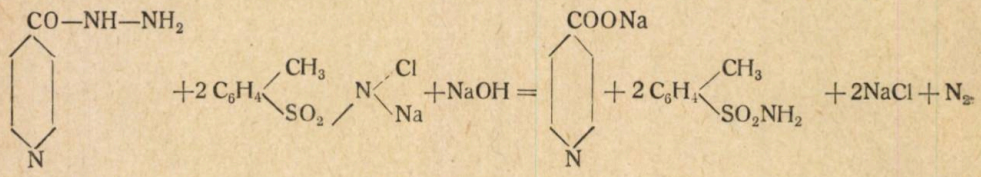
Intr-un flacon iodometric se iau 3-10 $cm^3$ dintr-o soluție de substanță pură de hidrazidă a acidului izonicotinic, conținînd 0,015—0,05 g.

Se adaugă 10—20 $cm^3$ dintr-o soluție de cloramină T 0, 1 n, se diluează la 100 $cm^3$. cu apă distilată și se tratează apoi cu 0, 1—0,2 g iodură de potasiu.

După ce iodura de potasiu s-a dizolvat, se adaugă o soluție de hidroxid de sodiu 0,2 n. pînă la alcalinitate și se lasă să stea 5 min.

După aceea, se adaugă acid sulfuric 0,5 n pînă la reacție acidă și după punerea iodului în libertate, se titrează acesta cu o soluție de tiosulfat de sodiu 0,1 n în prezență de amidon ca indicator.

Oxidarea hidrazidei acidului izonicotinic are loc după ecuația :



1 cm³. 0,1 n soluție de cloramină T corespunde la 0,003428 g hidrazidă a acidului izonicotinic.

*Reactivii utilizați.*

1. Soluție de hidrazidă a acidului izonicotinic $5^0/_{00}$.
2. Soluție 0,1 n cloramină T.
3. Soluție 0,1 n tiosulfat de sodiu.
4. Soluție 0,2 n hidroxid de sodiu.
5. Soluție 0,5 n acid sulfuric.
6. Iodură de potasiu p. a.
7. Soluție de amidon.

O parte din rezultatele obținute prin această metodă sînt date în tabela de mai jos :

| Nr. curent | Soluție hidrazidă acid izonicotinic în probă, în cm³ | Hidrazidă ac. izonicotinic, în g | Soluție cloramină 0,1 n, în cm³ | Soluție tiosulfat de sodiu 0,1 n. în cm³ | Hidrazidă ac. izonicotinic, în g | Diferența |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0,0250 | 10 | 2,75 | 0,0250 | 0,0000 |
| 2 | 5 | 0,0250 | 10 | 2,75 | 0,0250 | 0,0000 |
| 3 | 5 | 0,0250 | 10 | 2,75 | 0,0250 | 0,0000 |
| 4 | 6 | 0,0300 | 10 | 1,30 | 0,0299 | —0,0001 |
| 5 | 6 | 0,0300 | 10 | 1,30 | 0,0299 | —0,0001 |
| 6 | 4,5 | 0,0225 | 10 | 2,35 | 0,0227 | +0,0002 |
| 7 | 8,5 | 0,0425 | 15 | 1,10 | 0,0423 | —0,0002 |
| 8 | 6,5 | 0,0325 | 15 | 3,95 | 0,0324 | —0,0001 |
| 9 | 9,4 | 0,0470 | 20 | 4,20 | 0,0469 | —0,0001 |
| 10 | 5,5 | 0,0275 | 15 | 5,45 | 0,0275 | 0,0000 |
| 11 | 8 | 0,0400 | 15 | 1,85 | 0,0400 | 0,0000 |
| 12 | 9 | 0,0450 | 20 | 4,90 | 0,0448 | —0,0002 |
| 13 | 10 | 0,0500 | 20 | 3,40 | 0,0498 | —0,0002 |
| 14 | 7,5 | 0,0375 | 15 | 2,55 | 0,0374 | —0,0001 |
| 15 | 6,3 | 0,0315 | 15 | 4,30 | 0,0314 | —0,0001 |
| 16 | 6,5 | 0,0325 | 15 | 4,00 | 0,0324 | —0,0001 |
| 17 | 7,3 | 0,0365 | 15 | 4,80 | 0,0363 | —0,0002 |
| 18 | 6,2 | 0,0310 | 15 | 6,40 | 0,0308 | —0,0002 |
| 19 | 7,6 | 0,0380 | 15 | 4,30 | 0,0380 | 0,0000 |
| 20 | 8 | 0,0400 | 15 | 3,70 | 0,0400 | 0,0000 |

In probele 1-5, s-a folosit o soluție de cloramină 0,1 n și o soluție de tiosulfat de sodiu cu factor 0,9881 ; în probele 6-16, s-a folosit aceeași soluție de tiosulfat și o soluție de cloramină cu factor 0,8942, iar

în probele 17-20, o soluție de cloramină cu factor 1,0250 și tiosulfat cu factor 1,0000.

Metoda de dozare a hidrazidei acidului izonicotinic cu cloramina T, arătată mai sus, prezintă avantajul, față de celelalte metode, că dozarea se poate executa rapid, iar prețul de cost al oxidantului folosit de noi este mai scăzut decît al celorlalți oxidanți folosiți în celelalte metode.

*Laboratorul de Chimie anorganică și analitică*
*Institutul Politehnic București*

Primit la redacție la 5 IV 1956

## BIBLIOGRAFIE

1. *K. W. Merz și M. Schirm* — Naturwissenschaften 39, 570—1 (1952).
2. *Aluisio Marques Leal și Maria Almanda* — Alves Rev. port. farm. 2, 175—9 (1952)
3. *Theodor Canbäck* — J. Pharm. Pharmacol. 4, 407 (1952).
4. *P. Castel, H. Orzalesi* și *A. Dubois* — Trav. soc. Pharm. Montpelier 12, 73—4 (1952).
5. *Joseph F. Alicino* — Farm. Polsca 116—19 (1953).
6. *Alvaro Naronha da Costa* — Rev. Brasil farm. 33, 343—50 (1952).
7. *M. Businelli* și *B. Rochi* — Farm. sci. e tec. 7, 153—60 (1952).
8. *Alvaro Naronha da Costa* — Rev. Brasil. farm. 33, 343—50 (1952).
9. *Joseph F. Alicino* — J. Am. Farm. Assoc. 41: 401—402 (1952).
10. *Hans Wojahn* — Arzneimittel-Forsch. 2, 324—6 (1952).
11. *Dino Coppini, Ricardo Cameroni* și *Agar Monzani* — Ricerca Sci. 22, 1783—4 (1952).
12. *Fernando Montesqui* — Farm. nueva — Madrid — 18, 10—14 (1953).
13. *K. W. Merz* și *M. Schirm* — Naturwissenschaften, 39, 570—1 (1952).
14. *Juan A. Sanchez* — Rev. Assoc. bioquim. Argentina, 17, 324—6 (1952).
15. *A. P. Dombo* — J. Pharm. auf Pharmacolog., 5, 117—118 (1953).
16. *Al. Kattionis* — Chim. Chronika (Athens, Greece), 17, 78—80 (1952).
17. *M. Struszyski* și *U. Bellen* — Przemisl. Chem., 9, 1953. I. Ch. O. Zahl, Analit,
18. *Aluisio Marques Leal* și *Maria Almanda* — Alves. Rev. port. Farm., 2, 175—9 (1952).
19. *Hikaru Ozawa* și *Akiko Kijomoto* — J. Pharm. Soc. Japan., 72, 1059—60 (1952).
20. *Dino Coppini, Ricardo Cameroni* și *Agar Monzani* — Ricerca Sci. 22, 1783—4 (1952).
21. *Hans Harting* — J. Am. Pharm. Assoc. 42, 323—4 (1953).
22. *Richard D. Strickland* și *W. Hentel* — Am. J. Chim. Pathol. 24, 988—92 (1954).
23. *Isamu Tachi* și *Yoshinosuke* — J. Japan. Chem. 6, 490—1 (1952).
24. *Gregorio Varela* — Anales real. Soc. espan. fis. y quim 48 B, 713—15 (1952).
25. *Morris B. Jacobs* — J. Am. Pharm. Assoc. 42, 346—8 (1953).
26. *H. O. Dakin* — Proc. Royal Soc. London, Seria B. 89, 232—251.

## НОВЫЙ ОБЪЁМНЫЙ МЕТОД ДОЗИРОВКИ ГИДРАЗИДА ИЗОНИКОТИНОВОЙ КИСЛОТЫ

(Краткое содержание)

В настоящей работе авторы излагают быстрый и точный метод объемной дозировки гидразида изоникотиновой кислоты при помощи хлорамина Т в качестве окислителя.

Раствор гидрозида изоникотиновой кислоты обрабатывают 0,1 н — ым раствором хлорамина Т и затем 0,1 — 0,2 гр иодистого калия.

После растворения иодистого калия добавляют 0,2 н—ый раствор гидрокиси натрия до тех пор, пока она не станет щелочной, затем 0,5 н—ой серной каслоты. Полученный ид титруют 0,1 н—ым раствором тиосульфата натрия.

Метод обеспечивает быструю и точную дозировку. Он является экономным, ввиду того что затрачивается лишь незнакительное количество иодистого калия.

## NOUVELLE MÉTHODE VOLUMÉTRIQUE POUR LE DOSAGE DE LA HYDRAZIDE DE L'ACIDE ISONICOTINIQUE

(R é s u m é)

Les auteurs presentent, dans cette note, une méthode rapide et précise de dosage volumétrique de la hydrazide de l'acide isonicotinique, utilisant la chloramine *T*, comme agent oxydant.

La solution de la hydrazide de l'acide isonicotinique est traitée avec la solution 0,1 n de chloramine *T* et après avec 0,1—0,2 g iodure de potassium.

Après la dissolution de l'iodure de potassium on ajoute une solution 0,2 n d'hidroxyde de sodium, jusqu'elle devient alcaline, puis de l'acide sulfurique 0,5 n et enfin le iode resulté est titré avec une solution 0,1 n d, thiosulfate de sodium.

Cette méthode donne la possibilité d'un dosage rapide et précis et presente l'avantage d'être économique, utilisant une faible quantité de iodure de potassium.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

545.31
546.48

# METODĂ VOLUMETRICĂ PENTRU DOZAREA CADMIULUI

de P. SPACU, A. OVANESIAN şi D. GĂVĂNESCU

Stabilirea unor metode de analiză cantitativă a cadmiului a preocupat pe mulţi cercetători chimişti din ţară şi din străinătate.

Literatura de specialitate menţionează multe metode dintre care vom cita pe cele clasice şi mai precise.

Pe cale gravimetrică, după G. Spacu şi J. Dick [1], dozarea se face sub formă de Cd $(C_5H_5N)_2$ $(SCN)_2$, după J. Dick ]2] sub formă de $CdNH_4PO_4.H_2O$ sau [3] sub formă de $CdC_2O_4.3H_2O$, după G Spacu şi M. Kuraş [4] sub formă de $Cd(NH_3)_2(C_7H_4NS_2)_2$.

Pe cale volumetrică, determinările clasice se fac prin reacţii de neutralizare, oxidimetric, argentometric, potenţiometric şi conductometric.

Astfel, K. Jell'nek şi P. Krebs [5] precipită cadmiul sub formă de hidroxid cu o bază în exces, iar excesul îl titrează cu acid sulfuric.

J. Fialkow şi W. Gorodisski [6] precipită cadmiul sub formă de carbonnat, dizolvă precipitatul în acid sulfuric şi titrează apoi excesul de acid cu o soluţie de hidroxid.

W. Gibbs [7] şi W. G. Leison [8] precipită cadmiul cu acid oxalic dizolvă în acid sulfuric oxalatul de cadmiu format şi titrează cu permanganat de potasiu acidul oxalic pus în libertate. După C. Mayr şi G. Burger [9], acidul oxalic pus în libertate este titrat cu azotat de argint pe cale potenţiometrică.

R. C. Wiley [10] titrează cadmiul cu molibdat de amoniu în prezenţa pirogalolului ca indicator.

C. Mahr şi H. Ohle [11] precipită cadmiul cu tiouree şi sarea lui Reinecke, oxidează apoi cromul din complexul format cu peroxid de sodiu sau bromat de potasiu si-l tratează cu iodură de potasiu. Iodul pus în libertate îl titrează cu tiosulfat de sodiu.

Dintre puţinele metode fizico-chimice, citǎm metoda colorimetrică a lui R. Juza şi R. Langheim [12] care determină cadmiul sub forma unui sol coloid galben de sulfură de cadmiu, metoda polarografică a lui M. Spalenka [13] d n soluţii alcaline de cianură de cadmiu şi metoda lui H. Winter [14] pe cale spectrală.

* * *

Noi am luat în studiu şi am extins, principiile enunţate în 1867 de W. Gibbs şi W. G. Leison indicate în bibliografie la [7] şi [8], aducînd unele modificări şi instituind o metodă rapidă şi în acelaş timp comodă, cu ajutorul căreia se pot face analize în serie, chiar asupra soluţiilor diluate de cadmiu, durata unei analize nedepăşind

20 minute. Comoditatea şi scurtarea duratei de analiză se datoresc eliminării operaţiilor de spălare a precipitatului, urmate de spălări cu alcool şi la urmă cu eter.

In principiu, metoda noastră este o dozare manganometrică indirectă, folosid soluţie exact 0,1 normal de oxalat de sodiu în exces, ca agent precipitant şi titrarea unei părţi alicote a excesului după filtrare, cu o soluţie 0,1 normală de permanganat de potasiu în prezenţa acidului sulfuric.

Soluţia care conţine ionii de cadmiu trebuie să fie neutră pentru ca oxalatul de cadmiu să precipite cantitativ sub formă de $Cd(C_2O_4) \cdot 3H_2O$ şi în niciun caz să nu conţină cadmiul sub formă de clorură. De asemenea, excesul de soluţie 0,1 normală de oxalat de sodiu trebuie să fie mic, pentru a preîntîmpina formarea complexului solubil de $Cd(C_2O_4)_2Na_2$, ceeace ar avea ca urmare obţinerea unor rezultate mai mici. Formarea complexului este favorizată şi de prezenţa altor săruri alcaline. Concentraţiile mai mari de săruri de amoniu au o acţiune solubilizantă asupra precipitatului de oxalat de cadmiu.

După o serie de încercări, care au dat rezultate concordante, pornind de la concentraţii diferite de ioni de cadmiu, am stabilit următorul procedeu de lucru:

Soluţia neutră conţinînd ionii de cadmiu se introduce într-un balon cotat de 50 sau 100 $cm^3$, peste care se toarnă dintr-o biuretă oxalat de sodiu 0,1 n, într-un exces de circa 10% faţă de concentraţia bănuită de cadmiu. Restul pînă la semn se completează cu apă distilată. Se agită puternic de cîteva ori şi se lasă să stea 5—10 min. Apoi se filtrează, se îndepărtează o primă porţiune din filtrat, după care se colectează precis 25 $cm^3$ de filtrat, se adaugă 50—60 $cm^3$ apă distilată şi 5—6 $cm^3$ acid sulfuric de 20%. Se titrează opoi cu o soluţie 0,1 n de permanganat de potasiu pînă la punctul de echivalenţă. Cantitatea de cadmiu va fi dată de formula:

$$\text{grame cadmiu} = 10^{-4} \cdot 56{,}2\ (V_1 - A \cdot V_3 \cdot f_2)$$

unde:

$V_1$ — numărul de $cm^3$ soluţie 0,1 n de oxalat de sodiu;
$A$ = 2 sau 4 după cum s-a folosit balon cotat de 50 sau 100 $cm^3$.
$V_2$ = numărul de $cm^3$ soluţie 0,1 n de permanganat de potasiu consumat la titrare;
$f_2$ = factorul de normalitate al soluţiei 0,1 n de permangant de potasiu.

In încercările noastre am folosit o soluţie de sulfat de cadmiu ($3CdSO_4 \cdot 8H_2O$) pro analizi cu o concentraţie de 0,0174854 g $Cd/cm^3$, rezultat la care am ajuns prin metodele indicate în bibliografie la [1] şi [2].

Rezultatele cîtorva analize efectuate după procedeul nostru le redăm în tabelul următor:

| Nr. | Soluţie de sulfat de cadmiu luată la analiză în $cm^3$ | Cadmiu prezent (în g), calculat din rezultatele date de metoda (1) şi (2) din bibliografie | Cadmiu găsit după metoda noastră, în g | Diferenţa în g |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0,087429 | 0,087368 | —0,000061 |
| 2 | 5 | 0,087429 | 0,087440 | +0,000011 |
| 3 | 6 | 0,104914 | 0,104860 | —0,000054 |
| 4 | 6 | 0,104914 | 0,104750 | —0,000164 |
| 5 | 7 | 0,122399 | 0,122200 | —0,000199 |
| 6 | 7 | 0,122399 | 0,122400 | +0,000001 |
| 7 | 8 | 0,139884 | 0,139600 | —0,000284 |
| 8 | 8 | 0,139884 | 0.139604 | —0 000280 |
| 9 | 9 | 0.157369 | 0,157502 | +0,000133 |
| 10 | 9 | 0,157369 | 0,157141 | —0,000228 |
| 11 | 10 | 0,174854 | 0,174596 | —0.000258 |
| 12 | 10 | 0,174854 | 0.174922 | +0,000068 |

După cum se vede, majoritatea rezultatelor obţinute după metoda noastră, prezintă diferenţe în minus faţă de rezultele obţinute după metodele gravimetrice menţionate la [1] şi [2]. Se explică aceasta prin solubilizarea parţială a precipitatului de oxalat de cadmiu. Comoditatea procedeului însă, cum şi rapiditatea efectuării analizei, permit neglijarea acestor diferenţe, care dealtfel sînt minime.

*Laboratorul de Chimie Anorganică şi Analitică*
*Institutul Politehnic Bucureşti*

Primit la redacţie la 5 IV 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *G. Spacu u. J. Dick*—Ztschr. f. anal. Ghem. 1925, 73, 279.
2. *J. Dick*—Ztschr. f. anal. Chem. 1930, 82, 401.
3. *J. Dick*—Ztschr. f. anal. Chem. 1930, 78, 414.
4. *G. Spacu u. M. Kuraş*—Ztschr f. anal. Chem. 1935, 102, 108.
5. *K. Jellinek u. P. Krebs*—Z. anorg. Chem, 1923, 130, 263.
6. *J. Fialkow u. W. Gorodisski*—Allucrainian Acad. Sci. Mem. Inst. Chem. 1, 61 (1934).
7. *W. Gibbs*—Am J. Sci. (2) 44, 213 (1867).
8. *W. G. Leison*—Chem. N. 21, 210 (1870).
9. *C. Mayr* u. *G. Burger*—M. 56, 113 (1930)
10. *R. C. Wiley*—Ind. Eng. Chem., Anal. Ed. 3,14—15 (1931).
11. *C. Mahr u. H. Ohle*—Ztschr. f. anal. Chem. 1937. 109, 1—5.
12. *R. Juza u. R. Langheim*—Ztschr. f. anal. Chem. 1937, 110, 270.
13. *M. Spalenka*—Ztschr. f. anal. Chem. 1943, 126, 49—59.
14. *H. Winter*—Z. Metallkunde 1937, 29, 341.

## ОБЪЁМНЫЙ МЕТОД ДОЗИРОВКИ КАДМИЯ

Описанный метод представляет собой косвенную объемную дозировку кадмия, Он основан на его осаждении в нейтральной среде в виде щавелевокислого кадмия. При этом пользуются избытком точно 0,1 н-ого щавелевокислого натрия.

Осаждение происходит в колбе с отметкой вместимостью в 50 или 100 куб см; до отметки доливают дистиллированной водой. Затем фильтруют, берут известную часть фильтрата, титрируемую марганцевым калием.

Указанный метод удобен; его преимущество заключается в быстроте операции, позволяющей применять его для серийных анализов.

## MÉTHODE VOLUMETRIQUE POUR LE DOSAGE DU CADMIUM

(Résumé)

La méthode décrite représente un dosage volumetrique indirect du cadmium, basé sur la précipitation de celui-ci comme oxalate de cadmium, en solution neutre, utilisant un excès d'oxalate de sodium exactement 0,1 normal. La précipitation s'opère dans un balon jaugé de 50 ou 100 $cm^3$ et on ajoute de l'eau distilé jusqu'à la marque. Après, on filtre et on prend une quantité aliquote de la solution filtreé, qu'on titre avec du permanganate de potassium.

Le procédé est commode et présente aussi l'avantage de la rapidité, pouvant être appliqué aux analyses de série.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956 ; Fascicola 1-2

6 28.16

# LIMPEZIREA APEI CU AJUTORUL COAGULANȚILOR ACTIVAȚI CU SOLURI DE SILICE

de T. IONESCU, C. FOSTIROPOL,
M. GORUNEANU și V. CRISTOLOVEANU

Pentru limpezirea apelor potabile și industriale se folosește, deseori, procedeul de coagulare cu soluții apoase de sulfat de aluminiu sau sulfați de fier, urmat de decantarea și eventual filtrarea apei tratate. In mediu alcalin, datorită durității temporare a apei, se formează precipitate floconoase de AI $(OH)_3$ sau Fe $(OH)_3$ care, în căderea lor, antrenează suspensiile fine din apă.

In general, datorită floculației, sedimentarea suspensiilor are loc cu viteză redusă, iar cantitatea de coagulant necesară limpezirei apei, pînă la un grad de turbiditate acceptabil, depinde de turbiditatea inițială a apei. In cazul apelor potabile, cu turbiditate redusă, sînt necesare cantități relativ mici de coagulanți. Datorită însă faptului că se tratează zilnic milioane de metri cubi de apă, cantitățile de coagulanți sînt foarte mari.

Pentru accelerarea procesului de limpezire a apelor cu ajutorul coagulanților, s-a preconizat adăugarea unor activanți care permit concomitent și reducerea consumului de reactivi. [1]

In lucrarea de față se prezintă încercările făcute în vederea folosirii solurilor de acid silicic, ca acceleratori în procesul de coagulare cu sulfat de aluminiu și sulfat de fier.

Incepînd din anul 1936, studiile în acest domeniu au adus o serie de lămuriri în ceea ce privește mecanismul de formare a solurilor active de acid silicic și unele brevete au fost aplicate în tratamentul apelor potabile [2], [3], [4].

Dificultățile în legătură cu prepararea, dozarea și păstrarea solurilor active de silice au rămas însă neînlăturate, din care cauză procedeul de activare a coagulanților cu adaosuri de soluri de silice se aplică sporadic și pe scară redusă.

Prin tratarea soluțiilor de silicați alcalini cu acizi minerali, hidratul de sodiu pus în libertate (prin hidroliză) poate fi neutralizat parțial sau total, obținîndu-se astfel soluri de acid silicic de diferite concentrații. Acidul silicic, cu dispersie monomoleculară, formează cu timpul agregate mari de acid polisilicic. Prin creșterea micelelor de acid silicic și în funcție de cantitatea de apă, se ajunge la formarea gelului de silice.

Dacă se tratează soluții diluate de silicați alcalini cu acid sulfuric diluat, se formează micele de acid silicic, puternic hidrate, care se leagă greu între ele pentru a forma agregate mai mari. In felul acesta, se

prelungeşte mult durata pînă la apariţia opalescenţei şi formarea gelului.

Dacă se realizează contactul între solul de silice — înainte de începerea formării vizibile a gelului — cu o soluţie de sulfat de aluminiu, sau de sulfat de fier, apar, în toată masa lichidului, numeroase agregate floconoase, care cresc foarte repede, antrenînd în căderea lor toate suspensiile din lichid. Limpezirea apelor se poate realiza, astfel, într-un timp foarte scurt (chiar în fracţiuni de minut), dacă se utilizează cantităţi suficiente de sulfat de aluminiu şi sol de silice.

In aceleaşi condiţii, dar fără adăugarea solului de silice, agregatele de hidroxid de aluminiu se formează lent, iar în cazul soluţiilor diluate de coagulanţi, viteza de sedimentare este foarte mică.

## 1. PREPARAREA SOLURILOR ACTIVE DE ACID SILICIC

In soluţia apoasă de silicat de sodiu — proaspăt făcută — cu un conţinut de 2-4 % $Sio_2$, se adaugă, picătură cu picătură, sub agitare, acid sulfuric 3%, pînă la neutralizarea parţială sau totală a alcalinităţii.

Soluţia astfel tratată se lasă în repaus pînă la apariţia opalescenţei, caracteristica începutului de gelificare. In acest moment — indiferent de conţinutul de $Sio_2$ — se adaugă apă distilată pînă la obţinerea unui sol cu maximum 1% $Sio_2$, care poate fi folosit apoi ca adaos la soluţiile de coagulanţi, imediat, sau după un interval de timp care depinde, în primul rînd, de gradul de neutralizare a alcalinităţii soluţiei de silicat de sodiu şi de conţinutul în $Sio_2$ al solului respectiv.

Pentru aprecierea influenţei gradului de neutralizare asupra activităţii solurilor de acid silicic, s-au preparat o serie de soluri alcaline (cu pH cuprins între 7 şi 8) şi soluri acide (cu pH cuprins între 6 şi 7).

S-a constatat că alcalinitatea favorizează, pînă la un punct, stabilitatea soluţiei coloidale de acid silicic; în cazul neutralizării a mai mult de 90% din alcalinitatea soluţiei de silicat, formarea gelului are loc în cîteva minute.

S-a constatat de asemenea că, indiferent de gradul de neutralizare, gelul se formează cu atît mai repede, cu cît concentraţia în $Sio_2$ a solului este mai mare.

In cazul solurilor acide, timpul scurs pînă la apariţia opalescenţei şi formarea gelului creşte foarte mult cu diminuarea pH-ului solului. Solul cu pH=6 şi cu conţinut de 1,6% $Sio_2$ a gelificat după 650 ore de la tratarea soluţiei iniţiale de silicat, cu acid sulfuric. Solul cu pH = 6 şi cu 0,5% $Sio_2$ devine slab opalescent după 120 de zile de la preparare şi nu gelifică.

## 2. CREŞTEREA EFICACITĂŢII COAGULANTE A SOLUŢIILOR DE SULFAT DE ALUMINIU ŞI SULFAŢI DE FIER PRIN ADĂUGARE DE SOLURI DE SILICE

S-au făcut încercări de limpezire rapidă a următoarelor probe de apă:

1. Apă cu Dt. = 10°, avînd 1000 grade turbiditate în scara $Sio_2$, Turbititatea a fost obţinută cu ajuorul pulberii de cuarţ trecută prin site de 10000 ochiuri.

2. Aceaşi apă, cu turbiditatea de 1000 grade, formată cu ajutorul pulberii de caolin spălat, trecut prin sita de 10000 ochiuri.

3. Apă din Dîmboviţa, colectată la intrarea în Bucureşti, cu 1200 grade turbiditate.

*Reactivi de coagulare folosiţi :*

a) soluţie de sulfat de aluminiu 5% ;
b) soluţie de $Fe_2 (So_4)_3$, 5% ;
c) soluţie de Fe So4, 5% ;
d) soluri de acid silicic cu conţinut diferit de Sio2, obţinute din soluţii de acid silicic cu alcalinitate variabilă ;
e) soluri acide de acid silicic cu conţinut diferit de Sio 2.

*Modul de lucru.* Tratarea apei s-a făcut introducîndu-se mai întîi solul de acid silicic şi apoi soluţia de sulfat. Proba a fost apoi agitată timp de 3 min. pentru amestecul intim al reactivilor cu apa tulbure. După agitare, s'a lăsat lichidul în repaus pentru depunerea suspensiilor şi s-a determinat turbiditatea remanentă după un anumit interval de timp, scurs după tratarea cu coagulant.

Pentru determinarea condiţiilor optime de folosire a solurilor de silice, ca activanţi de coagulare, s-au efectuat o serie de încercări de coagulare rapidă, urmărindu-se influenţa următorilor factori :

a) raportul între cantităţile de sulfat de aluminiu şi silice :
b) gradul de neutralizare a soluţiilor iniţiale de silicat de sodiu ;
c) timpul necesar creşterii micelelor de silice, pînă la apariţia opalescenţei şi pînă la formarea gelului de silice.

Tabela 1

**Turbiditatea remanentă după coagularea cu soluţia de $Al_2 (SO_4)_3$ cu şi fără adaosuri de soluri de si ice**

| $Al_2 (SO_4)_3$ p. p. m. | Sol de silice p.p.m, | Turbiditatea remanentă în grade de turbiditate, după 1 oră | după 2 ore | după 3 ore | Observaţii |
|---|---|---|---|---|---|
| — | — | 190 | 176 | 159 | Sedimentarea suspensiilor fără coagulare |
| 12 | — | 152 | 90 | 63 | Limpezirea s'a realizat prin tratarea apei cu soluţia $Al_2 (SO_4)_3$ fără adaos de sol de silice. |
| 25 | — | 132 | 65 | 48 | |
| 36 | — | 63 | 50 | 25 | |
| 50 | — | 41 | 37 | 20 | |
| 25 | 8 | 4 | 2 | 1 | Limpezirea s-a realizat cu adaos de sol alcalin de silice. |
| 12 | 4 | 6 | 4 | 2 | |
| 12 | 2 | 10 | 8 | 4 | |
| 10 | 8 | 8 | 6 | 4 | |
| 8 | 8 | 10 | 6 | 4 | |
| 25 | 8 | 1 | 0 | 0 | Limpezirea s-a realizat cu adaos de sol acid de silice. |
| 12 | 4 | 3 | 1 | 0 | |
| 6 | 2 | 13 | 6 | 4 | |
| 2 | 2 | 20 | 10 | 6 | |

Din datele de mai sus se constată că limpezirea cu soluții de $Al_2(SO4)_3$ fără activant, nu se realizează nici după trei ore de la tratarea apei.

Limpezirea cu adaosuri minimale de soluri de silice se realizează mult mai repede; în cazul solurilor acide, turbiditatea poate fi redusă la un grad, după 1—2 ore de la tratarea apei. După 3 ore, apa devine perfect limpede. Timpul de sedimentare a flocoanelor de coagulant activat poate fi mult redus prin creșterea pH-ului apei supuse tratamentului.

Consumul de $Al_2(SO_4)_3$ necesar limpezirii apelor este mult mai redus dacă se adaugă soluri de silice (pentru aceeași durată de limpezire).

Tabela 2

**Turbiditatea remanentă după tratamentul apei cu soluția de $Al_2(SO_4)_3$ și soluri de silice obținute din soluții de silicat de sodiu cu grade diferite de neutralizare a alcalinității**

| Gradul de neutralizare al alcalinității soluției inițiale | Reactivi de coangulare utilizați (în p.p.m.) | | Turbiditatea remanentă după 1 oră | Observații |
|---|---|---|---|---|
| | $Al_2(SO_4)_3$ | Sol de silice | | |
| 80% | 25,0 | 8,0 | 4 | Se remarcă efectul sporit al adausurilor de soluri de silice obținute din soluții de silicat de sodiu cu grad mare de neutralizare. Solul neutru și solurile acide sînt mai active decît cele bazice. Trebuie notat că solurile acide folosite, au fost obținute prin diluarea soluției de silicat de sodiu acidulat, după 14 zile de la tratarea cu acid sulfuric. Solul a fost folosit la limpezirea apei imediat după diluarea cu apă, adică după 14 zile de la acidificare |
| | 12,0 | 4,0 | 6 | |
| | 6,0 | 2,0 | 50 | |
| | 2,5 | 2,0 | 90 | |
| 85% | 25,0 | 8,0 | 2 | |
| | 12,0 | 4,0 | 4 | |
| | 6,0 | 2,0 | 43 | |
| | 2,5 | 2,0 | 90 | |
| 90% | 25,0 | 8,0 | 3 | |
| | 12,0 | 4,0 | 13 | |
| | 6,0 | 2,0 | 40 | |
| 95% | 25,0 | 8,0 | 2 | |
| | 12,0 | 4,0 | 5 | |
| | 6,0 | 2,0 | 13 | |
| 100% | 25,0 | 8,0 | 1 | |
| | 12,0 | 4,0 | 4 | |
| | 6,0 | 2,0 | 28 | |
| | 2,5 | 2,0 | 90 | |
| Sol acid cu pH. inițial 6. | 25,0 | 8,0 | 0 | |
| | 12,0 | 4,0 | 3 | |
| | 6,0 | 2,0 | 10 | |
| | 2,5 | 2,0 | 15 | |
| Sol acid cu pH inițial 6,5 | 25,0 | 8,0 | 1 | |
| | 12,0 | 4,0 | 3 | |
| | 6,0 | 2,0 | 13 | |
| Sol acid cu pH inițial 6,8 | 25,0 | 8,0 | 1 | |
| | 12,0 | 4,0 | 3 | |
| | 6,0 | 2,0 | 18 | |

Constatîndu-se că solurile de silice cu pH $<$ 6 sunt cele mai active, s-au făcut o serie de încercări de limpezire pentru stabilirea influenței gradului de „îmbătrînire" a solurilor respective, datorită creșterii, în timp, a miceliilor de silice. S-au utilizat, în acest scop, soluri limpezi (tinere) și soluri opalescente (îmbătrînite).

Din determinările efectuate s'a precizat că solurile îmbătrînite sînt mult mai active, activitatea maximă fiind atinsă în pragul gelificării. Solurile slab acide și cu maximum 1% $SiO_2$ îmbătrînesc mult mai greu, decît cele alcaline și își păstrează activitatea timp îndelungat (pînă la 20 luni de la preparare),

Cu amestecurile alcătuite din 20 p. p. m., $Al_2(SO_4)_3$ și 8 p. p. m. soluri opalescente de silice, s-au realizat limpeziri totale (ale apelor cu 1000 grade turbiditate) după 15-30 min. de la tratarea cu coagulanți. S-a constatat că solurile conținînd sub 1% $SiO_2$ sînt destul de active și după 10 luni de la prepararea lor.

Timpul de limpezire totală s-a redus la 5-10 min. utilizînd soluții slab alcalinizate (proaspete) de $Al_2(SO_4)_3$ și soluri de silice slab opalescente.

In aceste cazuri, influențează favorabil miceliile crescute de $Al(OH)_3$. Incercările de limpezire cu soluții slab acide de $FeSO_4$ și $Fe_2(SO_4)_3$, activate cu soluri de silice, au condus la rezultate asemănătoare cu cele obținute cu soluțiile de $Al_2(SO_4)_3$. In condiții identice s-au determinat, însă, viteze de coagulare mai mari cu soluțiile sulfaților de fier. Soluțiile de $Fe_2(SO_4)_3$ și $FeSO_4$, slab alcalinizate, proaspete, sînt mult mai eficace de cît soluțiile proaspete de $Al_2(SO_4)_3$. Prin soluții proaspete se înțeleg soluțiile respective, slab alcalinizate, utilizate după 3-5 min. de la prepararea lor. După un interval de timp mai lung și la un pH $>$ 7,3, reactivii respectivi nu mai pot fi utilizați cu succes ca coagulanti, datorită aglomerării excesive a miceliilor de $Al(OH)_3$ sau $Fe(OH)_3$.

## CONCLUZII

1. Coagulanți foarte activi pentru lipezirea apelor potabile, cu pînă la 1200 grade turbiditate în scara de $SiO_2$, pot fi obținuți din soluții de $Al_2(SO_4)_3$, $Fe_2(SO_4)$, $FeSO_4$, activate cu soluri diluate de acid silicic.

2. Prin adăugarea solului de acid silicic se obține o diminuare mult mai rapidă și mult mai accentuată a turbidității de cît în cazul acelorași probe de apă, tratate numai cu sulfat de aluminiu sau cu sulfați de fier.

3. Prin adăugarea solurilor de silice se economisesc cel puțin 60% din sulfații necesari obținerii acelorași turbidități remanente.

4. Prin diluarea solurilor de acid silicic se formează micele puternic hidratate care coagulează lent; solurile respective pot fi păstrate timp îndelungat, fără diminuarea eficacității. Solurile, care conțin $SiO_2$ sub 1%, pot fi întrebuințate și după 15 luni de la prepararea lor.

5. Pentru obținerea unei mari cantități de micele de acid silicic, bine formate, este necesar ca diluarea solului, pînă la conținutul de 2% $SiO_2$, să se facă înainte (dar foarte aproape) de punctul de gelificare.

6. Solurile slab alcaline, cu durată mai lungă de formare a gelului, sînt foarte active, dacă sînt diluate după cel puţin 90 min de la tratarea soluţiei de silicat de sodiu cu acid sulfuric 3%.

7. Eficacitatea solului diluat de acid silicic creşte odată cu gradul de neutralizare a soluţiei iniţiale de silicat de sodiu.

Cantitatea crescîndă de $H_2SO_4$, adăugat, pătrunzînd în spaţiile intermicelare, provoacă — probabil — deshidratarea progresivă a micelelor care devin astfel capabile să coaguleze rapid şi să formeze flocoane voluminoase la contactul cu hidroxidul de aluminiu sau cu hidroxidul de fier.

8. Eficacitatea solurilor acide se menţine neschimbată timp foarte îndelungat.

Primit la redacţie la 5 IV 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *Merill R. C.*—Ind. Eng. Chem. 40, nr. 8, august 1948; 1355—1359.
2. *Kalinske A. A.*—Le Roy H. S. Pat. S.U.A. nr. 2.650.193; 25/8, 1953.
3. *Griffin A. E.*—J. Amer Water Works Assoc. 46, iunie 1954; 571—474.
4. *Spencer E. A., Krowles G.*—Water and Water Eugn. 58. august 1954; 350—354.

## ОЧИСТКА ВОДЫ ПРИ ПОМОЩИ КОАГУКЯНТОВ, АКТИВИРОБАННЫХ КРЕМНЕЗЁНИСТЫМИ ПОЧВАНИ

(Краткое содержание)

В настоящей работе описываются опыты по использованию кремнево-кислотных почв в качестве ускорителей в процессе коагуляции сульфатом алюминия и эульфатов железа.

Рассматривается изготовление активных кремнево-кислотных почв и увеличение коагулирующей эффективности растворов сульфата алюминия и сульфатов железа при добавлении кремнезёмистых почв.

## MÉTHODE POUR RENDRE LIMPIDE L'EAU À L'AIDE DES COAGULANTS ACTIVÉS AVEC DES SOLS DE SILICIUM

(Résumé)

On présente les essais qu'on a fait en vue d'utiliser les sols de l'acide silicique comme accélérateur dans le processus de coagulation avec du sulfate d'aluminium et des sulfates de fer.

On étudie les méthodes de préparer les sols activés de l'acide silicique et l'augmentation de l'éfficacité de coagulation des solutions de sulfate d'aluminium et des sulfates de fer dans la présence des sols de silicium.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

# ELECTROTEHNICĂ

621.3.015.34

## REPREZENTAREA ANALITICĂ A UNDELOR DE IMPULS

de A. AVRAMESCU şi F. STĂNCIULESCU

Fenomenele electrice din atmosferă, dar mai ales trăznetul, au o mare influenţă asupra reţelelor electrice aeriene. In timpul furtunilor cu descărcări electrice apar întreruperi în alimentarea consumatorilor legaţi de reţele aeriene, datorită efectelor de supratensiune provocate de trăznete indirecte, care cad în apropierea liniei sau trăznete directe care cad pe conductoarele liniei. De cele mai multe ori, întreruperile sînt însoţite de avarii în instalaţiile reţelelor şi staţiilor, astfel că repunerea în funcţiune normală a unor porţiuni din reţea poate să fie întîrziată, producîndu-se mari pagube prin oprirea producţiei consumatorilor şi uneori accidente de persoane.

De aceea, se impun măsuri de protecţie eficace pentru anularea sau măcar îngrădirea influenţelor dăunătoare ale trăznetului în reţeţele electrice [1]. Pentru studiul constructiv şi exploatarea aparatelor şi instalaţiilor de protecţie contra supratensiunilor este neapărat necesar a se cunoaşte cît mai precis fenomenele electrice care au loc în atmosferă şi pe linii în timpul furtunilor. La proiectarea acestor aparate trebuie să se cunoască evoluţia şi desfăşurarea în spaţiu a curentului şi tensiunii pentru a putea predetermina prin calcul solicitările datorite trăznetului real şi a evalua comportarea materialului întrebuinţat în construcţii.

De la primele descoperiri fundamentale privind natura electrică şi efectul trăznetului, făcute încă în secolul al XVIII-lea de către Franklin şi Lomonosov, o serie întreagă de cercetări au fost întreprinse cu scopul de a elucida desfăşurarea fenomenelor electrice în cursul descărcărilor atmosferice.

Abia însă după descoperirea oscilografului catodic (Dufour şi Rogowski) şi utilizarea lui la studiul fenomenelor de supratensiuni atmosferice, care au o durată extrem de mică (de ordinul microsecundelor), s-a reuşit să se stabilească, forma curentă a undelor de impuls ale tensiunii şi curentului de pe linii, provocate de trăznet [2].

In prezent, forma undelor de impuls cu care se verifică aparatele în laborator este standardizată în majoritatea ţărilor [3, 4]. Există şi norme internaţionale [5,6]. Calculele de dimensionare a aparatelor de protecţie presupun ca dată expresia analitică a undelor de impuls de tensiune şi curent. S-au făcut numeroase încercări de a se indica şi întrebuinţa expresii analitice pentru funcţia de timp a undei de impuls [2, 3, 4]. Unele din aceste expresii nu au fost studiate suficient de detailat, altele nu sînt potrivite pentru calcule [2].

Cunoaşterea formei undei este esenţială pentru evaluarea cantitativă a unor efecte ale curenţilor de undă ca efectul corona, efectul pelicular şi efectul de încălzire a conductelor parcurse de aceşti curenţi. Dimensionarea circuitelor respective nu se poate face în mod raţional decît cunoscînd forma undelor şi calculînd efectele sus amintite.

De aceea, ne-am propus în lucrarea de faţă să aprofundăm pe de o parte, studiul fenomenelor electrice ale trăznetului şi să analizăm forme de unde cunoscute prin deducerea unor relaţii noi, iar pe de altă parte, să indicăm şi să examinăm noi expresii analitice pentru undele de impuls, expresii care să faciliteze calculele teoretice. Pînă la sfîrşit, aceste relaţii şi forme analitice sînt menite să aducă o uşurare, atît în analiza fenomenelor de supratensiuni atmosferice pe linii şi în staţii, cît şi în calculul şi proiectarea aparatelor de protecţie contra supratensiunilor [7]. Dar studiul formei undelor de impuls este necesar şi pentru electronica industrială, radiotehnică, radiolocaţie şi televiziune, unde tehnica impulsurilor a făcut progrese foarte mari [8].

Se vor trece în revistă întîi fenomenele fizice care apar la producerea perturbărilor electromagnetice pe linii, apoi se vor studia circuitele electrice echivalente în care se pot produce unde de formă similară în cele reale de pe linii.

După aceasta se vor examina în detaliu cîteva funcţii analitice care reproduc forma undelor de impuls. In sfîrşit, se vor da indicaţii asupra aplicaţiilor practice a consideraţiilor făcute.

## 1. DIN FENOMENOLOGIA UNDELOR DE TRĂZNET

### CĂDEREA TRĂZNETULUI PE O LINIE SAU APROAPE DE EA.

Căderea trăznetului pe o linie sau aproape de ea, reprezintă solicitarea cea mai puternică la supratensiune a izolaţiei.

Norul de furtună, care trece pe deasupra liniei, formează împreună cu pămîntul şi aerul dintre ambele un condesator uriaş. Inainte de trăznet, sarcinile electrice de la partea inferioară a norului, în majoritatea cazurilor negative, atrag pe conductorii izolaţi ai liniei, sarcini de semn opus. Aceste sarcini sînt repartizate dealungul liniei, în concordanţă cu valoarea cîmpului electric local, adică după o funcţie F(x) asemănătoare curbei clopot. Potenţialul norului depinde de condiţiile geometrice (care influenţează capacitatea C) şi de sarcina disponibilă Q a norului, după relaţia :

$$V = \frac{Q}{C} \tag{11}$$

In orice caz, s-a constatat că pe timp de furtună pot să apară intensităţi ale cîmpului electric de 10 — 3000 kV/m. — Din punct dă vedere electric, trăznetul se naşte la cîmpuri care întrec 500 kV/m, prin descărcări negative, deci efluvii de electroni, care provin din norul negativ [9].

Săgeata de electroni care formează canalul are un vîrf în care o masă de circa $10^8$ electroni sînt concentraţi pe un spaţiu foarte redus.

Această săgeată progresează cu viteza de 2000 km/s în etape, parcurgînd de fiecare dată circa 15—18 m, epuizîndu-şi concentraţia de sarcină prin ramificaţii îndreptate în jos şi făcînd pauze de 60 — 70 ms. Această descărcare progresivă se numeşte descărcare pilot şi se întîlneşte în literatura de specialitate, inclusiv cea sovietică sub denumirea engleză „leader" [10]. La atingerea solului, stabilindu-se o legătură conductoare la nor, se produce descărcarea principală, care progresează în spre nor cu o viteză mult mai mare de 20 — 30000 km/s, şi care este denumită faza „streamer".

Pe fotografii de trăznete obţinute cu camere fotografice rotative [11], această descărcare a putut fi observată în toate amănuntele ei. Astfel, s-a constatat că faza leader are o durată de ordinul zecilor şi sutelor de microsecunde, iar faza streamer este de numai cîteva microsecunde. După această fază urmează descărcări mai lente care în fotografii au o luminozitate redusă în canalul trăznetului şi care pot dura milisecunde. In acest timp, se pot produce noi descărcări principale pe acelaşi canal, ionizat de către descărcările anterioare. Există fotografii cu 3 — 4 descărcări streamer. Cu alte mijloace (oscilograf automat) s-au constatat succesiuni de 5 — 15 lovituri principale. Cel mai mare număr de lovituri ale unui singur trăznet (constatate pînă în prezent) a fost de 42.

Mecanismul trăznetelor multiple se explică prin valoarea redusă a mobilităţii electronilor în interiorul norului, ceea ce face ca sarcinile scurse prin streamer să nu poată fi reîmprospătate din alte părţi ale norului decît într-un timp determinat.

Inainte ca descărcarea pilot (leader) să atingă solul, cîmpul electric în apropierea pămîntului creşte continuu, deci sarcinile electrice se acumulează din ce în ce mai mult pe părţile proeminente. Din momentul începerii descărcării principale, se iniţiază un schimb puternic de sarcini între nor şi pămînt — prin canalul de trăznet. Acesta reprezintă un bun conducător prin care condensatorul nor-pămînt se poate descărca [8].

Desfăşurarea în timp a curentului în canalul de trăznet depinde de mobilitatea sarcinilor la partea inferioară a norului.

Din momentul începerii descărcării principale, cîmpul electric dimprejurul canalului se prăbuşeşte cu o viteză care depinde de desfăşurarea în timp a curentului de descărcare. Prin măsurători mai recente ale cîmpului electric, efectuate cu oscilograful catodic, în apropierea unor trăznete, s-a constatat că în descărcarea principală curentul variază aperiodic şi nu periodic aşa cum se observase din măsurători anterioare făcute cu ajutorul unor antene.

Fig. 1—Undă de trăznet înregistrată cu oscilograful catodic (după Bewley)

In fig. 1 se arată o oscilogramă caracteristică a curentului din trăznet.

Forma curentului este caracterizată prin amplitudine, panta frunţii şi durata de semiamplitudine. După ultimile cercetări sovietice [12], amplitudinea curentului este cuprinsă între 10 şi 200 kA după următoarea repartizare: $50^0/_0$ $I_{max} < 15$ kA ; $30^0/_0$ $I_{max} < 25$ kA ş $10^6/_0$ $I_{max} < 50$ kA. Aceste valori sînt în general mai mici decît cele constatate în alte ţări [10]. Panta de variaţie iniţială a curentului este de 6—12 kA/μs.

Densitatea de curent observată în canalul de trăznet este de circa 50 kA/cm$^2$ în perioada de creştere a curentului. Curentul dispare după 30—150 ms, din cauza epuizării sarcinilor din apropierea canalului de trăznet în nor [13]. In acest timp, alte sarcini se adună în partea inferioară a norului [14] şi, după cîteva ms, pot urma alte descărcări pe acelaşi canal. Cu ajutorul unor camere fotografice rotative [3, 4, 8, 10, 14] s-au înregistrat numeroase trăznete multiple, numărul maxim de descărcări parţiale prin acelaşi canal observate fiind de 42. S-au înregistrat trăznete de 210 $kA_{max}$, care au durat cîteva ms şi de 4 kA de durată 10 ms. Acestea din urmă se numesc trăznete calde din cauză că efectul lor energetic este mult mai mare.

Acuitatea fenomenelor electrice şi pericolul pentru instalaţiile electrice depind, în mare parte, de viteza de variaţie a cîmpului electric deci de panta undei de tensiune şi curent. Panta cea mai mare de variaţie apare totdeauna la începutul fennomenului de descărcare [15].

După o ipoteză simplificatoare, funcţia de timp f(t) a scurgerii sarcinilor la începutul descărcării se apropie de o funcţie exponenţială, ca în cazul descărcării unui condensator într-un circuit rezistiv [2]:

$$f(t) = 1 - e^{-at} \tag{12}$$

Curentul iniţial de descărcare este dat de relaţia :

$$I = Q_0 \frac{\partial f(t)}{\partial t} \tag{13}$$

unde: $Q_0$ = sarcina de descărcare a norului.

Ar rezulta o formă de curent exponenţială : $I = a Q_0 e^{-at}$ cu o pantă infinită în origine, ceea ce nu corespunde cu realitatea. De fapt, această pantă, deşi foarte mare este totuşi finită şi funcţia (13) reprezintă numai o aproximaţie a formei curentului.

In realitate, după cum s-a arătat mai sus, descărcarea principală are la început o viteză finită de propagare şi deci de desfăşurare în timp. Nu numai că panta curentului este finită, chiar dacă este uneori foarte mare (pînă la 15 kA/μs), dar din examinarea tuturor oscilogramelor înregistrate rezultă că această pantă este nulă la început şi creşte progresiv pînă la o valoare maximă, atinsă pe fruntea undei. Această comportare se datoreşte unei inerţii, deci a unei frînări a mobilităţii sarcinilor în mediul ionizat al canalului, dar mai ales în regiunile norului apropiat de acest canal [13].

## 1.2 — FENOMENELE ELECTRICE PROVOCATE DE TRĂZNET PE LINII

S-au efectuat un mare număr de cercetări pentru constatarea efectelor trăznetului pe liniile și în instalațiile electrice. Datele experimentale și înregistrările acumulate, care se extind la influența unui foarte mare număr de factori, cum și diferite teorii complicate emise au permis în prezent să se cristalizeze anumite cunoștințe fundamentale asupra naturii și efectelor trăznetului [2, 4, 8].

Probabil că factorul care a creat cea mai mare confuzie în studiul datelor asupra trăznetelor este repartiția extrem de neregulată, deși perfect naturală a loviturilor de trăznet în decursul unui an oarecare. Inregistrările pot foarte ușor duce la concluzii eronate dacă nu se ia media pe un mare număr de linii și pentru mai mulți ani. Făcînd media pe o perioadă de ani, înregistratrea începe să indice caracteristicile însăși ale liniei. [15].

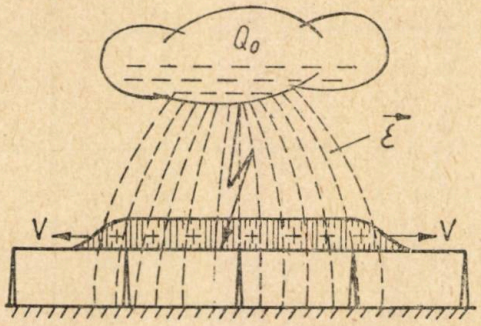



Fig. 2—Distribuția sarcinilor legate.

S-a ajuns la o serie de concluzii importante referitoare la natura perturbațiilor provocate de trăznet. Astfel, cauzele supratensiunilor de origină atmosferică pe linii sînt lovituri directe pe firele sub tensiune sau efecte de inducție ale loviturilor din apropierea liniei (fig. 2).

Lovitura de trăznet încarcă conductorul liniei cu o sarcină pozitivă sau negativă și această sarcină se mișcă în ambele direcții pe linie cu o viteză apropiată de aceea a luminii. Tensiunea și curentul maxim al undelor respective variază (statistic). Tensiunile respective calculate din impedanța căilor de curent, se reduc imediat prin dispersiunea sarcinilor pe cale de conturnări sau scurgeri, asfel că tensiunea maximă a undei este în cele din urmă o funcție a nivelului de izolație a liniei.

Tensiunea trăznetului variază după o curbă tipică de probabilități pînă în jurul a circa 20 MV (fig. 3), peste 60% din loviturile căzute asupra unui conductor avînd o tensiune de peste 2000 kV [12]. Valoarea maximă a tensiunii se estimează astăzi la o valoare de zece ori mai mare decît se considera în 1920 [15].

Două metode de estimare au dat rezultate similare: înregistrarea efectelor trăznetelor asupra unui mare număr de linii și deduce-

rea curentului produs în picioarele stîlpului. Tensiunea $U$ se poate determina din curentul $I$ după formula:

$$U = \frac{I}{\frac{1}{Z_0} + \frac{2}{Z_n} + \frac{1}{R}} \qquad (1,4)$$

unde

$Z_0$ = reprezintă impedanţa de undă pe coloana trăznetului;
$Z_n$ = impedanţa conductorilor loviţi;
$R$ = rezistenţa de pămînt.

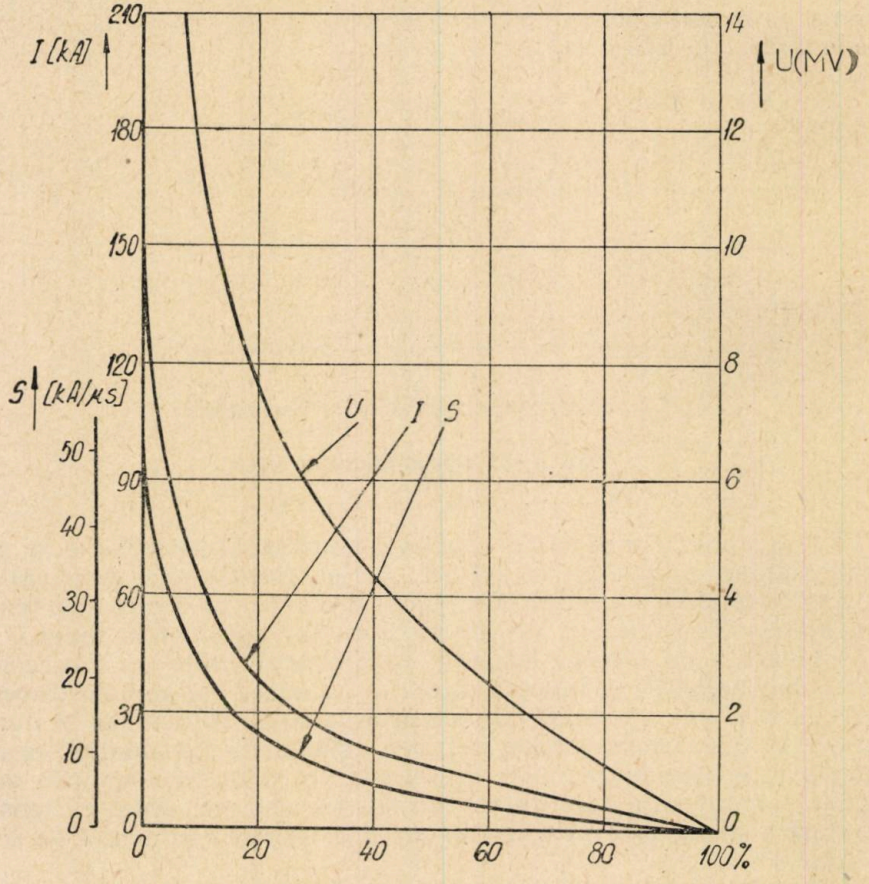



Fig. 3—Frecvenţa tensiunii, intensităţii şi pantei curentului de trăznet (după Stekolnikov)

Canalul de trăznet, comportîndu-se un timp scurt aproape ca un conductor metalic, prezintă o anumită impedanţă de undă. Intensitatea în canal nu se poate deduce în mod aditiv din curenţii în conductorul

de protecție și prizele liniilor de trăznete, ci depinde de raportul rezistenței efective a conductorului de protecție față de impedanța de undă a canalului. Forma undei de tensiune care rezultă depinde de impedanța de undă a liniei și este influențată prin atenuare, reflecție etc.

## 1.3 FORMA UNDELOR CĂLĂTOARE

In timpul descărcării cîmpul electric, care a imobilizat sarcini pe linie descrește și dispare cu atît mai repede cu cît trăznetul cade mai aproape de linie. Sarcinile legate, distribuite pe linie după funcția $F(x)$, se eliberează și pleacă pe linie în cele două direcții cu viteze apropiate de aceea a luminii, formînd unde călătoare. In cazul unei lovituri directe de trăznet potențialul liniei este ridicat de către sarcinile aduse pe conductorii liniei, la valoari foarte mari care periclitează izolația prin conturnări și străpungeri.

Cele două unde care pornesc din locul în care a căzut trăznetul sînt identice ca formă.

După teoria generală a undelor formulată încă de d'Alembert expresia matematică a undelor de tensiune este:

$$u = F(x+vt) + F(x-vt), \tag{1,5}$$

Ele au o amplitudine $U_0$ care depinde direct de potențialul maxim la care a ajuns linia:

$$U_0 F(x) = \frac{1}{2} V \tag{1,6}$$

Cum sarcinile legate de linie nu se eliberează instantaneu, ci după funcția $f(t)$ a desfășurării descărcării, undele de tensiune care rezultă au în general o expresie matematică, dată de teorema lui Duhamel:

$$u = \int_0^t \left\{ [x + v(t-\tau)] + F[x - v(t-\tau)] \right\} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \, d\tau$$

Aplicațiile acestei formule sînt reduse, deoarece integrala se poate calcula numai pentru un număr redus de funcții $f(t)$ și $F(x)$.

Totuși, prin metode grafice și numerice de integrare s-a reușit să se obțină date suficiente, din punct de vedere practic pentru a se stabili forma undelor de impuls care se propagă dealungul liniilor [2]. Aceste date au fost completate și confirmate prin măsurători cu osciloscopul catodic.

Din teorie, rezultă că în cazul cînd funcția $F(x)$ este rectangulară deci potențialul liniei este constant pe porțiunea sub nor, atunci funcția de timp a undelor călătoare este aceeași ca și funcția $f(t)$ a descărcării. Chiar dacă repartizarea în spațiu $F(x)$ este de forma unei curbe de clopot, încă funcția de timp a frunții undelor este foarte apropiată de funcția $f(t)$.

In fig. 4 a se arată o repartizare spaţială teoretică în formă de clopot care este liberată prin descărcare, după o funcţie de timp experimentală 4b de forma (1.1) în trei variante, anume cu timpul de descărcare a 95% din sarcina norului în 0, 1 şi 3 microsecunde. In aceste trei cazuri, forma undelor călătoare este dată în diagrama 4c. Se vede că panta undei se adaptează la panta funcţiei de descărcare şi că amplitudinea ei scade cînd această pantă scade.

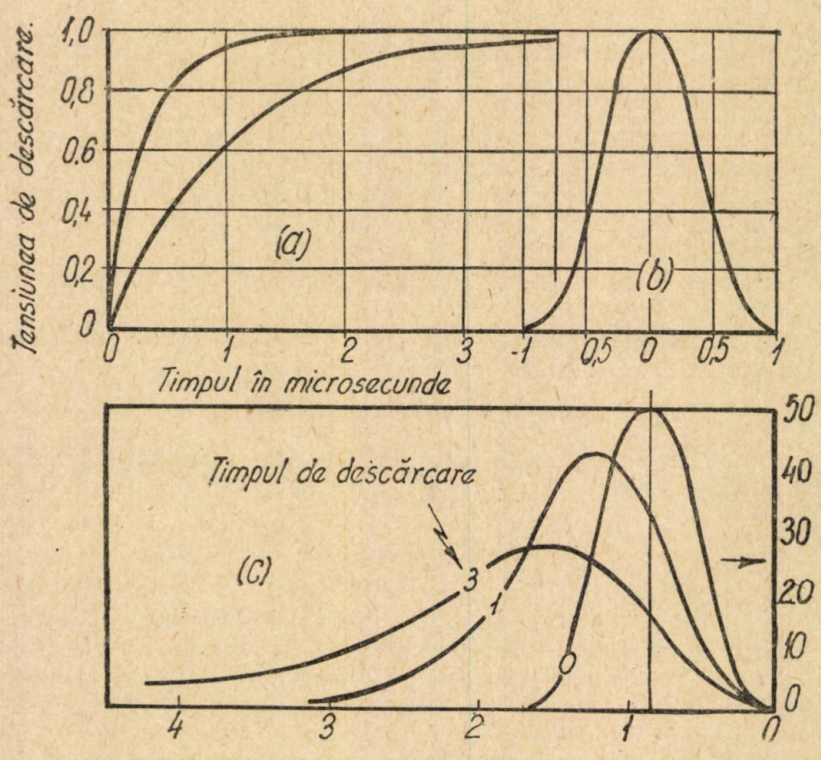



Fig. 4—Influenţa funcţiei de timp şi duratei descărcării (a) şi a repartizării spaţiale a sarciuilor legate (b) asupra undelor călătoare (c) (după Bewley)

Cum unda călătoare se deplasează cu viteza constantă $v$ apropiată de viteza luminii, funcţia de timp a tensiunii într-un punct fix al liniei variază similar cu curbele 4c, dacă în abscisă se consideră timpul în microsecunde pentru fiecare 300 m deplasare. Se vede că spatele undei se lungeşte faţă de fruntea ei, proporţional cu durata descărcării.

Forma undei călătoare mai este influenţată de repartizarea pe linie a sarcinilor legate şi anume cu atît mai mult, cu cît lungimea pe care sînt repartizate este mai mare. Totuşi, această influenţă nu întrece pe aceea a funcţiei de timp a descărcării prin canalul de trăznet. Cu alte cuvinte, influenţa majoră asupra formei undei o are funcţia de timp a descărcării principale, cu pantele ei ascendente şi descendente. De aceea, se poate calcula fără erori apreciabile cu repar-

tizări dreptunghiulare ale sarcinilor legate. Mai este de observat că, într-un punct, unda nu crește inițial cu o pantă finită în timp, tangenta inițială fiind orizontală.

Intradevăr, din numeroase oscilograme înregistrate în condiții foarte favorabile, s-a constatat că forma undelor pe linii se apropie mult de formele reprezentate în fig. 4c. .

## 1.4 DEFORMAREA UNDELOR CĂLĂTOARE

Undele călătoare care se deplasează dealungul liniilor electrice suferă deformări, datorită efectelor de atenuare și de distorsiune [16].

Atenuarea înseamnă descreșterea exponențială a ordonatelor curbei și se datorește rezistențelor electrice ale conductelor. Aici se includ toate efectele care contribuie la mărirea rezistenței efective, între altele și descărcările luminescente. Dintre acestea, cel mai important este efectul pelicular, care la variații atît de rapide în timp, cum apar la trăznet, poate să modifice esențial rezistența. Dacă s-ar considera o frecvență armonică echivalentă cu aceea a trăznetelor medii, ar rezulta o majorare de 2,5 ori față de valoarea rezistenței de curent continuu. Tabloul fenomenologic este însă în totul altul și nu poate fi elucidat decît prin urmărirea variației rezistenței efective în funcție de variația aperiodică a tensiunii aplicate conductorului, caracteristică undelor călătoare. Pentru aceasta, se cere să se calculeze întîi efectul pelicular la aplicarea treptei unitare a cîmpului electric exterior tangențial. In rezolvarea acestei probleme, cercetătorii romîni au adus contribuții originale importante prin lucrările lor [17], astfel încît în prezent se poate urmări prin calcul precis variația în timp a rezistenței efective și a puterii disipate în conductor la forme aperiodice caracteristice ale tensiunii [18] sau ale curentului [19].

Distorsiunea undelor pe linii are ca urmare schimbarea formei undei de impuls și apare din cauza neîndeplinirii condiției lui Heaviside între parametrii pe unitatea de lungime $RC=GL$, din cauza efectului corona și din cauza reflexiilor. Se înregistrează o scădere a pantei frontale și o alungire progresivă a spatelui din cauza primului efect.

Distorsiunea prin corona de impuls este mai neregulată, ea apărînd numai la tensiuni care întrec o limită (limita corona) și este cu atît mai mare, cu cît tensiunea întrece această limită, [20]. Deformările aduse undelor de efectul corona de impuls sînt în general mai importante decît cele datorite efectului pelicular.

Cercetările în domeniul coronei de impuls sînt în plin progres, mai ales în Uniunea Sovietică [21]. Cercetătorii sovietici au adus contribuții importante la elucidarea din punct de vedere teoretic și experimental a acestui efect.

In puncte de neomogenitate a parametrilor liniei, la coturi, derivații, treceri din linii aeriene în cabluri apar reflexii ale undelor călătoare cu și fără disipație de energie [1]. Undele inverse interferează cu cele directe și astfel pe linii apar unele deformații. Acestea sînt și mai evidente dacă apar conturnări ale izolației, datorite supratensiunilor de impuls sau dacă pe linii funcționează eclatori de protecție.

In general deci, forma undelor care pot să apară pe linii este foarte variată [16]. Totuși cercetările teoretice și experimentale trebuie să se limiteze la cîteva forme simple pentru a putea elucida fenomene conexe și a da un ajutor pentru calcule aproximative practice.

## 2. REPRODUCEREA UNDELOR PROVOCATE DE TRĂZNET

### 2.1 DEFINIREA UNDELOR NORMALE

Marea varietate a undelor de impuls (chiar a celor aperiodice) impune uniformizarea nomenclaturii parametrilor principali ai undelor și standardizarea definițiilor lor. In țara noastră acest lucru a fost făcut prin STAS 3999-54. In fond, o undă de impuls se definește prin raportul dintre timpul de front ( $t_f$ ) și cel de semiamplitudine ( $t_s$ ) la care se adaugă amplitudinea [2]. Trebuie să menționăm că în ceea ce privește definirea primilor doi parametri există mai multe criterii care diferă de la o țară la alta.

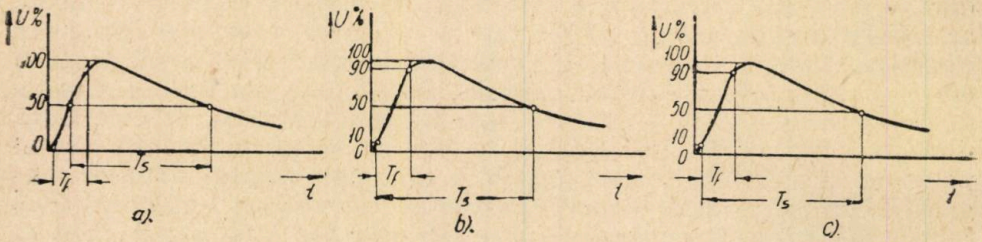



Fig. 5—Forma normalizată și parametrii undelor de impuls:
a — VDE
b — IEC
c — SUA

Aceste definiții s-au stabilit cu luarea în considerație a unui mare număr de unde de impuls și au ca elemente comune cei doi parametri sus amintiți.

In fig. 5 se arată cum a fost definită o undă de impuls de tensiune în diverse țări printre care: Germania (VDE—0450/1938), U.R.S.S., Anglia [3] (Comisia Internațională Electrotehnică — IEC) și America.— Astfel în Germania [23], se definește atît durata frunții, cît și aceea de semiamplitudine cu ajutorul tangentei în primul punct de semiamplitudine (fig. 5 a). — IEC a definit cei doi parametri ai unei unde de impuls cu ajutorul dreptei trecînd prin punctele 0,1 respectiv 0,9 din amplitudinea undei (fig. 5b). In America s-a adoptat aceeași definiție ca cea a IEC, cu deosebirea că durata frunții se consideră începînd din punctul care marchează abscisa lui 0,1 $U_{max}$ iar nu din punctul unde dreapta amintită mai sus taie axa absciselor (fig. 5c).

Diferența între aceste definiții ale parametrilor undelor de impuls, nu este așa de mare cum s-ar părea la prima vedere. Sînt cazuri cînd definițiile mai sus amintite conduc la rezultate foarte apropiate sau chiar confundate (unde cu frunte foarte abruptă, ceea ce corespunde bine cu mare majoritate a undelor datorate la lovituri de trăznet).

## 2.2 CIRCUITE ECHIVALENTE

In studiul descărcărilor electrice din atmosferă, s-a încercat de multe ori [2,4] a se stabili schema electrică echivalentă, care la o scară redusă, să reproducă fenomenele mai mult sau mai puțin fidel. Procesul constă în descărcarea unui condesator, printr-o scînteie electrică, într-un circuit liniar simplu, format dintr-o rezistență în serie cu o inductanță și un eclator. Această schemă este valabilă în faza de streamer, adică din momentul începerii descărcării principale și în ipoteza că se neglijează fenomenul de avansare progresivă a descărcării principale în această fază.

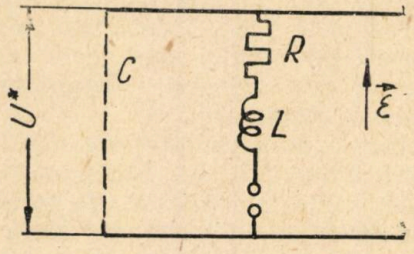



Fig. 6—Schema echivalentă simplificată a descărcării de trăznet

In fig. 6 este arătată o schemă electrică echivalentă simplificată a circuitului natural nor — pămînt, care se descarcă prin trăznet. (după J. Biermanns).

Bineînțeles că sub această formă circuitul nu poate reproduce decît în mod rudimentar și aproximativ fenomenul originar, dar avantajul, de a-l schematiza și simplifica rămîne. Cu ajutorul unor astfel de scheme s-a reușit să se lămurească numeroase particularități ale descărcărilor atmosferice.

## 2. 3. CIRCUITE DE ÎNCERCARE

**2. 3. 1. — Generalități.** Solicitările instalațiilor electrice, datorate descărcărilor atmosferice pot îmbrăca forme diferite după intensitatea loviturii de trăznet și după locul loviturii. Aceste solicitări sînt cu atît mai intense, cu cît trăznetul cade mai aproape de conductoarele liniei și ating maximul cînd descărcarea are loc chiar pe conductoare. Ele periclitează siguranța în funcționare a instalațiilor. Cele mai multe întreruperi și avarii în instalațiile electrice se datoresc trăznetelor directe prin conturnarea și uneori chiar străpungerea izolației. Studiind efectele grave pentru instalațiile electrice ale acestor solicitări naturale, constructorii de materiale și aparate s-au preocupat de reproducerea în laborator a trăznetului, pentru a putea supune materialul electrotehnic în mod sistematic unor studii și a-i putea conferi prin modificări de structură sau de construcție o rezistență cît mai mare, față de efectele trăznetului. In vederea studiului comportării la impuls a instalațiilor, mașinilor și aparatelor electrice, cum și a materialelor care intră în fabricația acestora, s-au conceput și dezvoltat generatori de impuls [3]. Acești generatori, realizează la o scară redusă reproducerea descărcărilor electrice atmosferice.

Au fost creaţi generatori de impuls de tensiune şi generatori de impuls de curent. In ceea ce priveşte generatorii de impuls de tensiune, deşi progresul realizat a fost însemnat, totuşi performanţele izolanţilor actuali nu au permis obţinerea unor tensiuni de impuls mai mari decît 3,5-4 MV, ceea ce reprezintă o valoare inferioară celei care apare în cursul descărcărilor în atmosferă.

In schimb, generatorii de impuls de curent au atins performanţe superioare. Prin mărirea capacităţii (crearea de baterii uriaşe) şi reducerea inductanţei circuitului s-a ajuns la valori considerabile ale curentului, valori care se cifrează astăzi la 150 kA [25], ceea ce reproduce foarte bine solicitările cele mai puternice datorate loviturilor de trăznet. Prin experienţe de laborator s-au confirmat toate efectele circuitului trăznetelor naturale [26]. Există mai multe scheme după care se realizează generatori de impuls, dar toate acestea pot fi socotite variante a două scheme fundamentale, denumite după creatorii lor : schema Marx şi schema Marguerre.

In realizarea schemei unui generator de impuls intră condensatoare, rezistenţe şi eclatoare. Principiul de funcţionare a unui generator de acest fel este în mare parte independent de varianta aleasă.

**2. 3. 2. Schema Marx** se bazează pe ideia de a încărca o serie de condesatori în paralel şi a-i descărca prin eclatori, în serie [27].

In schema din fig. 7, condesatorii de impuls $C_1$—$C_4$ se încarcă în paralel de la o sursă de curent continu prin rezistenţele de încărcare $R_1$—$R_4$ de valoare ohmică indicată, pînă la eclatarea lui $F_1$—$F_4$. Rezistenţele $R_a$ servesc pentru fixarea potenţialelor. Deoarece forma undei de impuls depinde de $R_a$, acestea se fac variabile.

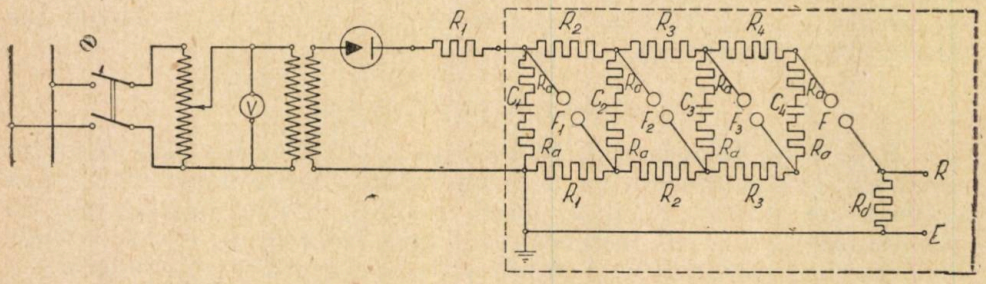



Fig. 7—Schema de reproducere a descărcării de trăznet după Marx

Prin aceasta, condensatorii de impuls sînt înseriaţi, aşa că între clemele $A$ şi $E$ ale generatorului de impuls apare pentru scurt timp tensiunea însumată a tuturor treptelor.

Tensiunea unei trepte depinde de tensiunea continuă aplicată de către elementul redresor (la Kenotron 200-800 kV, la redresor mecanic 700-1000 kV). Capacitatea rezultată trebuie să fie de cel putin 5 ori mai mare decît aceea a obiectului de încercat, pentru ca obiectul să nu influenţeze generatorul.

2. 3. 3. **Schema Marguerre** [28] este similară cu aceea a lui Marx, dar comportă capacităţi în paralel cu eclatorii (fig. 8). Prin aceasta schema nu mai este practic dependentă de capacitatea obiectului de încercat.

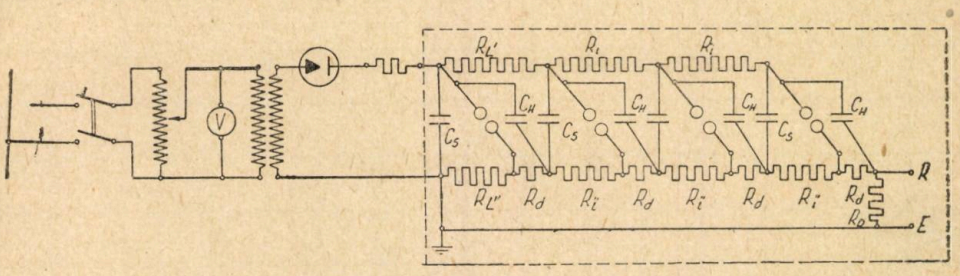



Fig. 8—Schema de reproducere a descărcării de trăznet după Marguerre

In acelaşi timp, randamentul exprimat prin factorul de utilizare a instalaţiei este mai mare ca la schema Marx şi independent de capacitatea de sarcină. Recent, în Anglia, Edwards a propus o nouă schemă pentru un generator de impuls care este în fond o modificare a schemei Marguerre [29].

Intre parametrii circuitului de încercare şi forma undei de impuls există relaţii bine determinate [23].

Elementele circuitului se calculează [30] şi se proiectează astfel ca să poată debita o anumită formă de undă pe un anumit obiect de încercare [31]. Instalaţiile de încercare la impuls [32] fac azi parte integrantă din orice laborator de înaltă tensiune [23]. Ele permit să se studieze şi să se cerceteze amănunţit fenomenele de scîntei electrice [34] şi de unde călătoare pe linii [35, 36] cît şi efectul lor în staţii şi instalaţii electrice [37].

Pe baza acestor cercetări s-a cîştigat o experienţă suficientă pentru proiectarea liniilor şi instalaţiilor electrice, din punct de vedere al siguranţei faţă de efectele trăznetelor [38, 39].

2. 3. 4. **Procesul de încărcare** (în general lent) a generatorului de tip Marx se poate urmări uşor prin calcul, dacă seria de trepte se consideră un lanţ infinit de cuadripoli în T egali. Fie rezistenţe de încărcare egale între ele : $R_1 = R_2 = R_n = R$, iar $c$ şi $r$ capacitatea şi rezistenţa seriei pe unitatea de lungime. Atunci ecuaţiile telegrafiştilor care dau propagarea tensiunii şi curentului dealungul lanţului se scriu :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ir \quad \text{şi} \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -c\frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.1}$$

unde $u$ şi $i$ reprezintă tensiunea şi curentul înt-un punct oarecare al lanţului.

Eliminînd curentul (sau tensiunea) din ecuaţiile de mai sus, rezultă pentru tensiune (sau curent) ecuaţia cu derivate parţiale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{cr}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

de forma parabolică, cunoscută din teoria analitică a căldurii (ecuaţia Fourier).

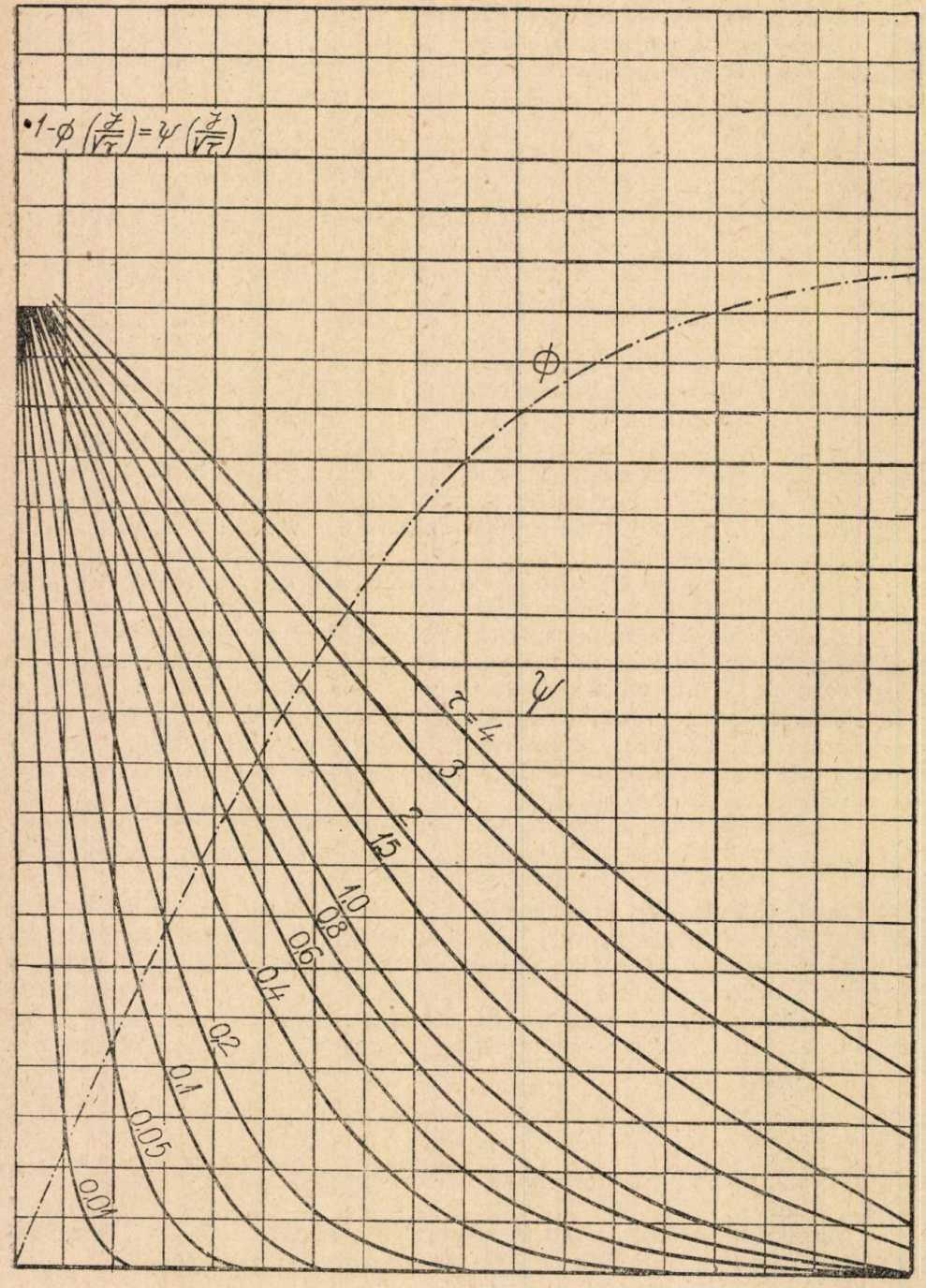



Fig. 9 - Funcţia complimentară a erorilor erfc $z$

Condiţiile iniţiale şi la frontieră sînt :

$$\begin{aligned} u &= 0 \qquad && t < 0 \\ u &= u_0 \quad \text{la} \quad && x = 0 \\ u &= 0 \qquad && x = \infty \end{aligned} \tag{2,3}$$

Soluţia este cunoscută din teoria căldurii [40,41] şi se scrie

$$\frac{U}{U_0} = \operatorname{erfc}\left(x \sqrt{\frac{cr}{4t}}\right) , \tag{2,4}$$

cu notaţia următoare a complimentării integralei erorilor :

$$\operatorname{erfc} z = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{u^2} du \quad . \tag{2.5}$$

Calculul rămîne valabil dacă cuadripolul este finit sau se închide cu impedanţa sa caracteristică.

Funcţia erfc $z$ fiind tabulată [42], desenarea curbelor integrale nu prezintă dificultăţi (fig. 9). Ele permit să se stabilească repartizarea în spaţiu a tensiunii pe diferite elemente sau urcarea în timp a tensiunii oricărui element. Pentru un număr mic de trepte, calculul se poate efectua pe cale elementară şi cu ajutorul diferenţelor finite [3].

2, 3, 5, **Procesul de descărcare**. Pentru a vedea cum realizează generatorul de impuls forma dorită a undei adică o undă similară celei de trăznet, trebuie cunoscut procesul de descărcare.

Acest proces se poate urmări pe schema simplificată din fig. 10 care în fond nu este decît schema electrică echivalentă a unui generator Marx, în perioada de descărcare.

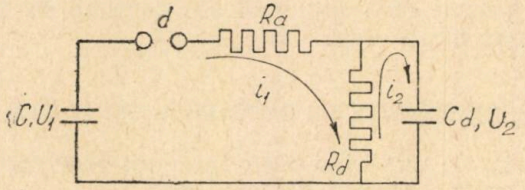



Fig. 10—Schema electrică echivalentă a generatorului Marx (la descărcare).

In această schemă, rezistenţele $R_a$ şi $R_d$ sunt considerate antiinductive. Operaţii relativ simple permit deducerea formei undei generate, scriind legea a II-a a lui Kirchhoff pentru cele două circuite şi aplicînd calculul operaţional. Rezultatul final, care exprimă ecuaţia undei de impuls de tensiune este :

$$U_2 = U_0 \left(e^{-at} - e^{-bt}\right) *, \tag{2,6}$$

ceea ce reprezintă ecuaţia unei unde de impuls de tensiune sub forma diferenţei a două exponenţiale.

*) Deducţia matematică a acestei expresii este dată în anexa I

## 2. 4, — CURBE REALE OBŢINUTE IN LABORATOR

După cum am arătat în sub capitolul precedent, o predeterminare a parametrilor undei de impuls (şi implicit a formei undei) este posibilă atunci cînd se cunosc mărimile care caracterizează circuitul generator şi schema generatorului. Practic, există diferenţe, înregistrate cu ajutorul oscilografului catodic. Diferenţele se datoresc unor fenomene şi elemente de circuit, neluate în considerare în premizele de calcul. Cauze determinante pot fi timpul finit de propagare a scînteii între eclatoare, eventuale cuplaje capacitive şi inductive cu alte circuite, cum şi capacităţi şi inductanţe parazite.

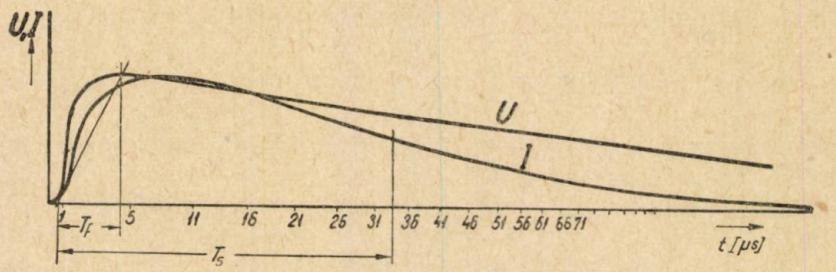



Fig. 11—Undă de curent şi de tensiune obţinută cu osciloscraful catodic la descărcarea unei staţii de impuls (realizată în laboratorul Institutului de Cercetări şi Proiectări Electrotehnice).

In fig. 11 se arată oscilogramele unei descărcări de impuls (printr-o rezistenţă neliniară) realizate în laboratorul de înaltă tensiune al Institutului de Cercetări şi Proiectări Electrotehnice (ICPET) Scara de timp este logaritmică. Curba *a* este a tensiunii iar curba *b* este a curentului care s-a scurs prin rezistenţa neliniară. — Defazarea între tensiune şi curent care apare în oscilogramă se datoreşte tocmai caracterului neliniar al sarcinii.

## 2. 5. EXPERIENŢE DE CAPTARE A TRĂZNETULUI

Urmărind primele experienţe cu trăznete efectuate de Franklin şi Lomonosov s-au găsit experimentatori care au încercat să capteze trăznetul şi să-l aplice direct în experienţa cu caracter de laborator. Astfel, în vîrful celei mai înalte clădiri din New-York, (Empire—State—Building) s-a instalat un laborator de înaltă tensiune dotat cu mai multe oscilografe catodice [43].

Cu ajutorul acestui laborator s-au făcut numeroase înregistrări care au fost supuse unui studiu tehnic şi statistic. Aceste rezultate nu se pot extrapola numaidecît, asupra fenomenelor ce apar pe liniile electrice din cauza enormei diferenţe de înălţime. Intre altele, înregistrările au arătat o frecvenţă mai mare a trăznetelor negative, decît în observaţiile efectuate pe linii aeriene în SUA, Germania şi Uniunea Sovietică.

In Elveţia, în cursul unor cercetări extinse asupra trăznetului [44], s-a încercat captarea trăznetului cu ajutorul unei antene mari

întinse între două piscuri pe Monte – Generoso [45]. Antena era izolată cu lanțuri de izolator, la o tensiune de impuls de 4—5 MV. O derivație de pe partea izolată a fost condusă la obiectele de încercat. S-au făcut cercetări de conturnare și străpungerea izolațiilor, cît și de procese nucleare. Observațiile au fost interesante, însă nu se puteau continua din cauza frecvenței mici a trăznetelor directe pe antenă. De aceea, instalațiile de impuls de laborator au o superioritate incontestabilă, ele fiind oricînd la dispoziția cercetătorilor și experiențele putînd fi la nevoie repetate.

### 3. EXPRESII ANALITICE ALE UNDELOR DE IMPULS

Pentru reprezentarea undelor de impuls de curent sau tensiune, în funcție de timp*, se folosesc în teorie mai multe forme (expresii) analitice. Majoritatea acestor forme pot fi considerate ca derivînd din forma fundamentală de undă, a cărei ecuație — pentru unda de impuls de tensiune, de exemplu — este :

$$U = U_0 \, (e^{-at} - e^{-bt}), \qquad \text{unde } \frac{b}{a} = m$$

și care poate fi pusă de asemenea sub forma :

$$U = 2 \, U_0 \, e^{-a_2 t} \, \text{sh} \, a_1 t \tag{3.1}$$

Dacă punem :

$$u = \frac{U}{U_0} \text{ , mai putem scrie}$$

$$u = e^{-at} - e^{-mat} \, . \tag{3.2}$$

Această formă a expresiei undei de impuls este o ecuație în unități relative sau adimensională.

Pentru ușurința notației vom însemna :

$$at = \tau \tag{3.3}$$

Iată care sînt ecuațiile formelor principale de unde de impuls :

$$u = \sin \tau \, ; \tag{3.4}$$

$$u = e^{-\tau} \sin \tau \, ; \tag{3.5}$$

$$u = \tau^m \, e^{-m\tau} \, ; \tag{3.6}$$

$$u = 2 \, e^{-m_2 \tau} \, \text{sh} m_1 \tau = e^{-\tau} - e^{-m\tau} \, ; \tag{3.7}$$

$$u = e^{-\tau} \, ; \tag{3.8}$$

$$u = (m - 1) \left[ \tau - \frac{1}{2} \, (m + 1) \, \tau^2 \right] \, . \tag{3.9}$$

*) In lucrarea de față nu s-a luat în considerație desfășurarea în spațiu a undei de impuls.

In afară de aceste forme de undă, care pot fi considerate ca fundamentele, mai pot fi luate în discuţie o serie de forme printre care citǎm [2] :

$$u = 1 \tag{3.10}$$

care reprezintă unda rectangulară (fig. 12 a) Aici $u$ are aceeaşi semnificaţie ca mai sus.

$$\left.\begin{aligned} u &= \tau, \quad \text{pentru} \quad t \leqq t_1 \\ u &= 1, \quad \text{pentru} \quad t > t_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

reprezentînd unda trapezoidală (fig. 12 b)

$$\left.\begin{aligned} u &= \tau, \quad \text{pentru} \quad t \leqq t_1 \\ u &= -\tau + C, \quad \text{pentru} \quad t > t_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

denumită şi unda triunghiulară (fig. 12 c).

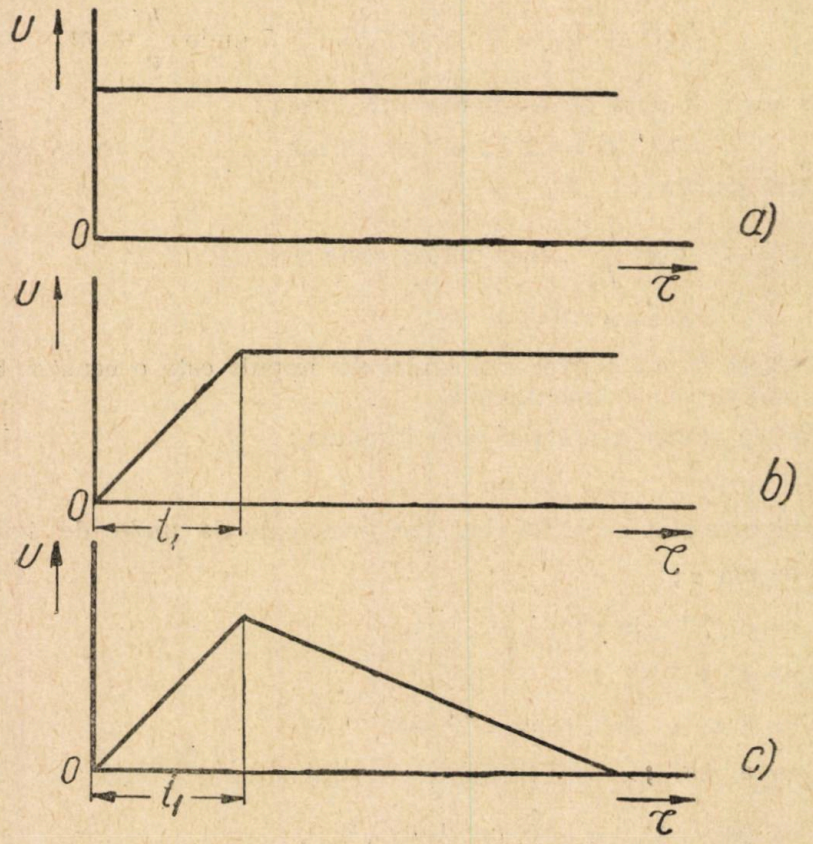



Fig. 12—Forme de undă simplificată :
a — unda rectangulară
b — unda trapezoidală
c — unda triunghiulară

Aceste forme de undă simplificate au fost utilizate în aplicațiile care nu cer o precizie prea mare a determinării.

Asupra formelor fundamentale de undă este necesar să se facă următoarele

*Observații:*

*a.* In privința primelor două forme de undă:

$$u = \sin\tau$$

$$u = e^{-\tau} \sin \tau$$

trebuie să menționăm că ele:

nu corespund cu caracterul fizic al fenomenului de descărcare electrică (trăznet) care este aperiodic;

sînt în detaliu studiate în toate tratatele de electrotehnică teoretică.

Pentru aceste motive nu vom insista asupra lor în cadrul lucrării de față.

*b.* In relația (3.6), parametrul $m$ poate lua orice valoare din domeniul numerelor reale dar pozitive, adică:

$$0 < m < \infty$$

*c.* In relația (3.7), același parametru nu poate lua decît valori supraunitare

$$m > 1$$

Calcule simple arată că trecerea dela forma parabolo-exponențială (36) la forma cu două exponențiale (37) se face cu ajutorul relațiilor:

$$a_1 = m_1 \cdot a \quad \text{și} \quad a_2 = m_2 \cdot a, \quad \text{unde}$$

$$m_1 = \frac{m-1}{2} \quad \text{și} \quad m_2 = \frac{m+1}{2}.$$

*d.* Formele (3.8) și (3,9) derivă din (3.7). Prima, pentru $m = \infty$ (unde cu front foarte abrupt), iar a doua prin dezvoltarea în serie a lui $e^{-\tau}$ (respectiv $e^{-m\tau}$) și reținerea primilor trei termeni.

*Precizare.* Toate relațiile pe care le vom stabili pentru unda de impuls de tensiune sînt valabile și pentru unda de impuls de curent. Pentru aceasta, este suficient ca în ecuațiile respective să înlocuim pe $U$ cu $I$ și pe $u$ cu $i$.

## 4. STUDIUL FORMEI DE UNDĂ CU DOUĂ EXPONENȚIALE

### 4.1. STRUCTURA FORMULEI

Am arătat că expresia analitică a undei de impuls se poate pune sub forma diferenței a două exponențiale.

$$u = e^{-\tau} - e^{-m\tau},$$

sau cu notaţiile anterioare:

$$u = f(\tau) = f_1(\tau) - f_2(\tau)$$

unde:

$$f_1(\tau) = e^{-\tau} \quad \text{şi}$$

$$f_2(\tau) = e^{-m\tau}$$

De notat că:

$$f_1(o) = f_2(o) = 1$$

Observăm că putem considera unda de impuls ca fiind rezultanta a două unde exponenţiale fictive de forma (3.8). Această consideraţie poate fi privită ca o ficţiune matematică, dar ea este de un real folos pentru calcule, dat fiind că în afară de unda rectangulară, unda exponenţială conduce în general la calcule mai simple.

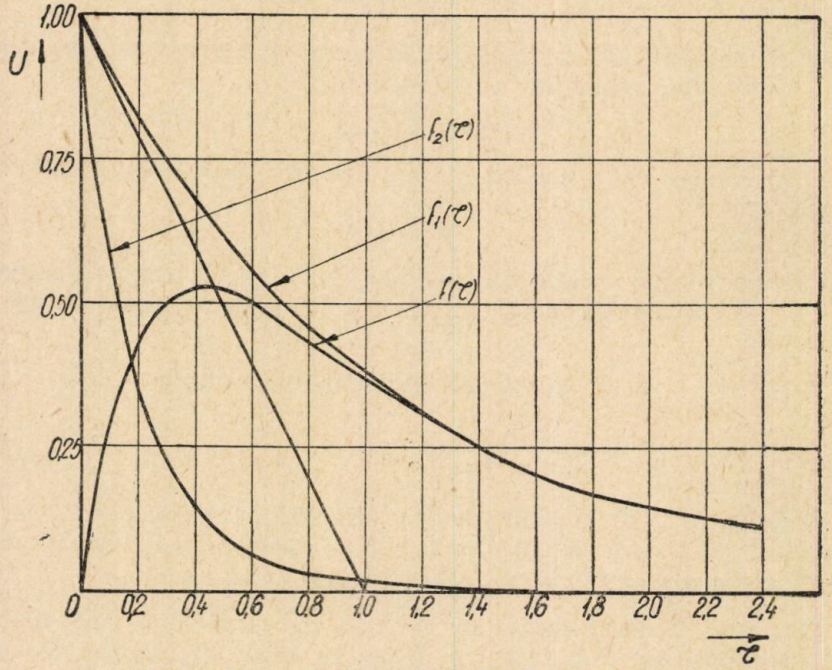



Fig. 13—Reprezentarea grafică a unei unde de impuls:

$$f(t) = e^{-at} - e^{-mat}$$

$$f_1(t) = e^{-at}$$

$$f_2(t) = e^{-mat}$$

In fig. 13. Se arată care este reprezetarea grafică a unei unde de impuls aperiodice care, datorită faptului că apare în majoritatea cazurilor, poate fi considerată ca forma fundamentală de undă.

Pentru uniformitatea nomenclaturii, s-au adoptat următoarele relaţii şi simboluri:

$t_f$ = durata frunţii;
$t_1$ = timpul de maxim;
$t_2$ = timpul de inflexiune;
$t_s$ = durata de semiamplitudine.
Toate aceste simboluri se pot vedea în fig. 14.

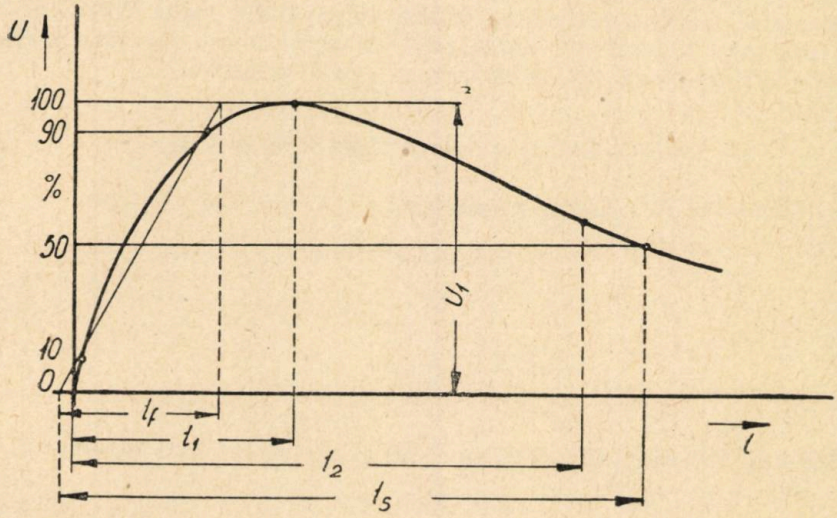



Fig. 14—Unda de impuls. Nomenclatura standard.

*Observaţie.* Intre ecuaţia care descrie fenomenul de descompunere a unui corp radioactiv A, în unul B, care trece în C:

$$f_2(t) = \frac{K_1\ \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\left[ e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t} \right]^*$$

şi expresia analitică a undei de impuls, scrisă sub forma:

$$U = \frac{U_1}{R_a C_d}\ \frac{1}{b-a}\left( e^{-at} - e^{-bt} \right)$$

există o mare asemănare.

Din comparaţia lor reiese clar o echivalenţă între:

$a$, $b$ şi $\frac{U_1}{R_a\ C_d}$, pe de o parte şi:

$\alpha_1$, $\alpha_2$ şi $K_1\ \alpha_1$, pe de altă parte.

* Deducţia matematică a acestei formule, care ne dă numărul de atomi B la momentul $t$ este dată în anexa II.

Acest lucru ne permite să ne gîndim la o descompunere a fenomenului de descărcare electrică în două fenomene fizice distincte corespunzătoare următoarelor procese:

— o descărcare într-un circuit cu o rezistență în serie;
— o descărcare într-un circuit cu o rezistență în paralel.

Aceste două fenomene ar corespunde prin analogie celor două stări diferite prin care trece corpul radioactiv A în decursul descompunerii sale în B și apoi în C.

Dealtfel, acest lucru reiese și din schema din fig 9. Circuitul serie este acela care determină caracterul frunții undei, pe cînd circuitul derivație influențează mai ales asupra spatelui undei.

### 4.2. SEMNIFICAȚIA PARAMETRILOR $a$, $m$ ȘI $U_0$

*a*, Derivata în origine a funcției:

$$f_1(\tau) = e^{-\tau}$$

este:

$$\left(\frac{df_1}{d\tau}\right)_{\tau=0} = -1 \tag{4.1}$$

Scriind ecuația tangentei la $f_1$ în punctul cel mai de sus:

$$\left.\begin{aligned} u - 1 &= -\tau \\ u &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

și intersectînd cu:

obținem:

$$\tau = at - 1 \rightarrow a = \frac{1}{t} \tag{4.3}$$

$a$ poartă numele de factor de atenuare a undei.

Se mai poate scrie:

$$T = \frac{1}{a} = t, \tag{4.4}$$

adică constanta de timp a undei de impuls ($T$) este egală cu subtangenta în origine la curba $f_1$ (fig. 13).

*b*. După cum am arătat anterior:

$$m = \frac{b}{a}.$$

deci cu raportul coeficientului de atenuare a celor două unde fictive respectiv raportul invers al subtangentelor la cele două unde fictive.

*c*. $U_0$ este denumită amplitudinea fictivă a undei și reprezintă valoarea pe care fiecare dintre cele două unde fictive le ia la $t = 0$.

### 4.3. — STUDIUL ANALITIC

Se observă că derivata de ordinul $n$ a acestei funcțiuni se poate scrie sub forma:

$$\frac{d^n f}{d\tau^n} = (-1)^n [e^{-\tau} - m^n e^{-m\tau}], \tag{4.5}$$

Anularea acestei derivate conduce la :

$$e^{-\tau} - m^n e^{-m\tau} = 0$$

sau :

$$e^{-\tau}[1 - m^n e^{-(m-1)\tau}] = 0$$

Din anularea acestei expresii rezultă :

$$\tau_n = \frac{n \ln m}{m-1} \tag{4.6}$$

($\tau = \infty$, care este de asemenea o soluție, conduce la $f$ minim)

*Timpul de maxim* se obține făcînd $n = 1$ în expresia lui $\tau_n$ .

Rezultă atunci :

$$t_1 = \frac{\ln m}{a(m-1)} \tag{4.7}$$

*Determinarea punctului de inflexiune* se face observînd că acesta rezultă cînd în expresia lui $\tau_n$ se pune $n = 2$. Se obține imediat :

$$t_2 = \frac{2 \ln m}{a(m-1)} \tag{4.8}$$

*Domeniul de variație al timpului de maxim.* Să considerăm expresia timpului de maxim, sub forma :

$$\tau_1 = \frac{\ln m}{m-1} \tag{4.9}$$

Derivarea în raport cu parametrul $m$, conduce la :

$$\frac{d\tau_1}{dm} = \frac{1 - \frac{1}{m} - \ln m}{(m-1)^2} \tag{4.10}$$

Anulînd această expresie, rezultă

$$1 - \frac{1}{m} - \ln m = 0 \tag{4.11}$$

care conduce la soluţia : $m = 1$. Introducînd în (4.9) această valoare, rezultă :

$$\lim_{m \to 1} \tau_{1\ max} = \frac{0}{0} .$$

Ridicînd nedeterminarea (l' Hôpital)

$$\tau_1 = \lim_{m \to 1} \tau_{1\ max} = \lim_{m \to 1} \frac{1}{m} = 1 . \tag{4.12}$$

Rezultă că atunci cînd $m$ variază între $\infty$ şi 1, timpul de maxim ($\tau_1$) variază între 0 şi 1.

Valoarea maximă a lui $f(t)$ se calculează introducînd în expresia (3.7), timpul de maxim ($t_1$). Atunci :

$$u_1 = e^{-\frac{\ln m}{m-1}} - e^{-\frac{m \ln m}{m-1}}$$

sau :

$$u_1 = m^{-\frac{1}{m-1}} - m^{-\frac{m}{m-1}} .$$

Rezultă după o serie de transformări :

$$U_1 = m^{-\frac{1}{m-1}} \left[ 1 - \frac{1}{m} \right]$$

de unde deducem o relaţie fundamentală între parametrii undei de impuls :

$$u_1 = \frac{m - 1}{m^{\frac{m}{m-1}}} \tag{4.13}$$

Se vede din această relaţie că :

$$\lim_{m \to \infty} u_1 = \lim_{m \to \infty} \frac{U_1}{U_0} = 1 . \tag{4.14}$$

Deci cînd $m \to \infty$, valoarea maximă a funcţiei $f(t)$ tinde către amplitudinea fictivă a undei.

## 4. 4. = LOCUL GEOMETRIC AL MAXIMULUI FUNCȚIEI REPREZENTATIVE

După cum am arătat, maximul funcției:

$$u = e^{-\tau} - e^{-m\tau}$$

are loc la timpul numeric:

$$\tau = \frac{\ln m}{m - 1}$$

și are valoarea:

$$u = \frac{m - 1}{\sqrt[m-1]{m^m}}$$

Aceste două mărimi, exprimînd coordonatele carteziene ale punctelor de maxim, pot fi privite ca coordonate curente dacă $m$ este considerat ca un parametru variabil. In acest caz, punctul curent se deplasează de-a lungul unei curbe, care constituie locul geometric al punctelor de maxim.

Ne propunem să găsim expresia analitică a locului geometric al acestor puncte. In literatură nu am găsit rezolvarea acestei probleme, dar ea este pusă de unii autori [47].

$$\ln u = \ln (m - 1) - m \frac{\ln m}{m - 1} \tag{4.15}$$

Substituind aici pe $\frac{\ln m}{m-1}$,

$$\ln u = \ln (m - 1) - m\tau$$

sau:

$$\frac{u}{m-1} = e^{-m\tau}.$$

Dar din ecuația fundamentală a undei de impuls:

$$e^{-m\tau} = e^{-\tau} - u \tag{4.16}$$

și egalînd cele două expresii:

$$\frac{u}{m-1} = e^{-\tau} - u$$

sau:

$$m - 1 = \frac{u}{e^{-\tau} - u}$$

de unde:

$$m = \frac{e^{-\tau}}{e^{-\tau} - u}$$

Substituind această valoare în expresia timpului de maxim, obţinem

$$\frac{\tau u}{e^{-\tau} - u} = \ln \frac{e^{-\tau}}{e^{-\tau} - u} \tag{4.17}$$

sau desvoltînd ln şi făcînd toate reducerile se obţine

$$(e^{-\tau} - u) \ln (e^{-\tau} - u) + \tau e^{-\tau} = 0 \tag{4.18}$$

ecuaţia transcedentă a locului geometric al punctelor de maxim. fig. 15.

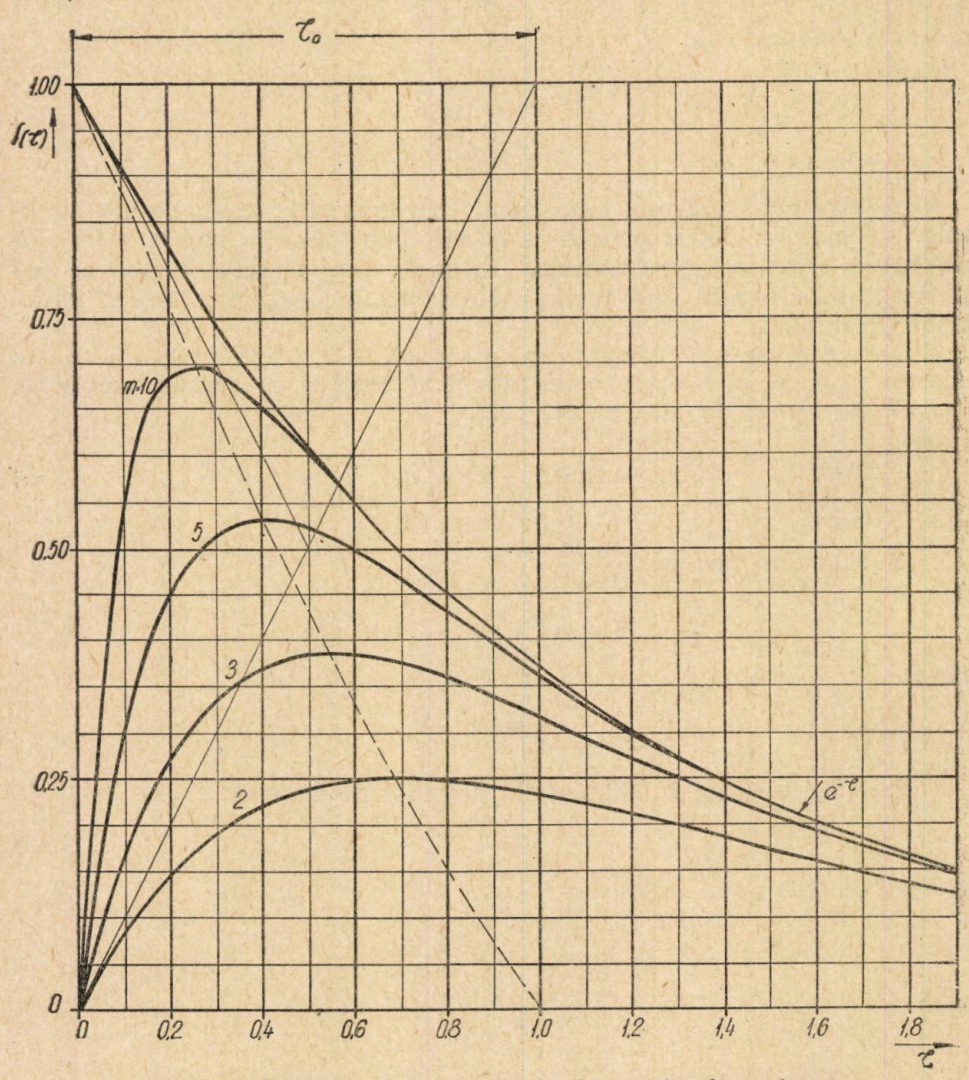



Fig. 15—Diagrama locului geometric al punctelor de maxim.

## 4.5 CORELAȚIILE DINTRE PARAMETRII UNDEI

Determinarea corelațiilor dintre parametrii undelor de impuls conduce la expresii transcedente. Utilitatea pentru calculul acestor formule este foarte redusă date fiind dificultățile pe care le întîmpină cel ce le utilizează.

In cele ce urmează vom încerca a rezolva această problemă spinoasă despărțind-o în două părți.

1. Vom stabili, mai întîi, o serie de relații exacte, care nu vor fi însă rezolvabile decît pentru valori mici ale lui $m$.

2. Pentru valori mai mari ale lui $m$, vom face o ipoteză simplificatoare care va ușura calculul fără însă a influența asupra rezultatului în mod esențial.

Sinteza acestor două serii de relații o vor forma mai multe curbe constituind reprezentările grafice ale acestor funcțiuni.

## 4.6 — STABILIREA RELAȚIILOR PENTRU VALORI MICI ALE LUI $m$

4.6.1—*Durata de semiamplitudine.* Dacă notăm cu $t_s$ acest timp din (3.7.) rezultă:

$$\frac{u_1}{2} = e^{-\tau_s} - e^{-m\tau_s} \tag{4.19}$$

Notînd: $$e^{-\tau_s} = y \tag{4.20}$$

se poate scrie:

$$y^m - y + k = 0 \tag{4.21}$$

unde $k$ nu depinde de $m$.

In general, ecuația admite $m$ soluții distincte, dintre care însă vom reține numai două, restul de $m - 2$ fiind inacceptabile.

Este evident că pentru $m = 2$ sau $m = 3$ se obțin ecuații rezolvabile ușor.

Fie $y_1$ și $y_2$ cele două soluții acceptabile ale ecuației.

Atunci, după (4.19) vom scrie:

$$\left.\begin{aligned} e^{-\tau_{s1}} &= y_1 \\ e^{-\tau_{s2}} &= y_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

și deci:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{s1} &= \ln \frac{1}{y_1} \\ \tau_{s2} &= \ln \frac{1}{y_2} \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

Este evident că dacă $y_2 < y_1$, ceea ce și convenim, durata de semiamplitudine:

$$\tau_s = \ln \frac{1}{y_2} \tag{4.24}$$

4.6.2. *Durata frunţii.* Pentru determinarea duratei frunţii scriem cele două ecuaţii care determină timpul cînd unda trece prin valorile $0{,}1\ u_m$ şi $0{,}9\ u_m$ :

$$0{,}1\ u_1 = e^{-\tau_{f1}} - e^{-m\tau_{f1}}$$

$$0{,}9\ u_1 = e^{-\tau_{f9}} - e^{-m\tau_{f9}}$$

Cunoscînd că :

$$\left.\begin{aligned} \tau_{f9} + \tau_{f1} &= \tau_{f1} \quad \text{şi} \\ \tau_{f1} &= \frac{\tau_f}{10} \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

ori care din ecuaţiile de mai sus conduce la ecuaţie de forma :

$$y^m - y + K_1 = 0, \tag{4,26}$$

ale cărei soluţii acceptabile $y_1'$ şi $y_1''$ ne dau imediat

$$\left.\begin{aligned} \tau_{f1} &= \ln \frac{1}{y_1'} \\ \tau_{f9} &= \ln \frac{1}{y_1''} \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

dacă, de exemplu,

$$y_1'' < y_1' \ .$$

Rezultă de aici că :

$$\tau_f = 10 \ln \frac{1}{y_1'} = \frac{10}{9} \ln \frac{1}{y_1''} \ . \tag{4.28}$$

Putem scrie acum unul dintre parametrii fundamentali ai undei de impuls :

$$\frac{t_s}{t_f} = \frac{1}{10} \frac{\ln \frac{1}{y_2}}{\ln \frac{1}{y_1'}} = \frac{9}{10} \frac{\ln \frac{1}{y_2}}{\ln \frac{1}{y_1''}} \tag{4.29}$$

Cu ajutorul relaţiilor (4.23), (4.28) şi (4.29), parametrii ecuaţiei analitice a undei de impuls pot fi complet determinaţi. Acest lucru se poate face uşor pentru valorile mici ale lui $m$.

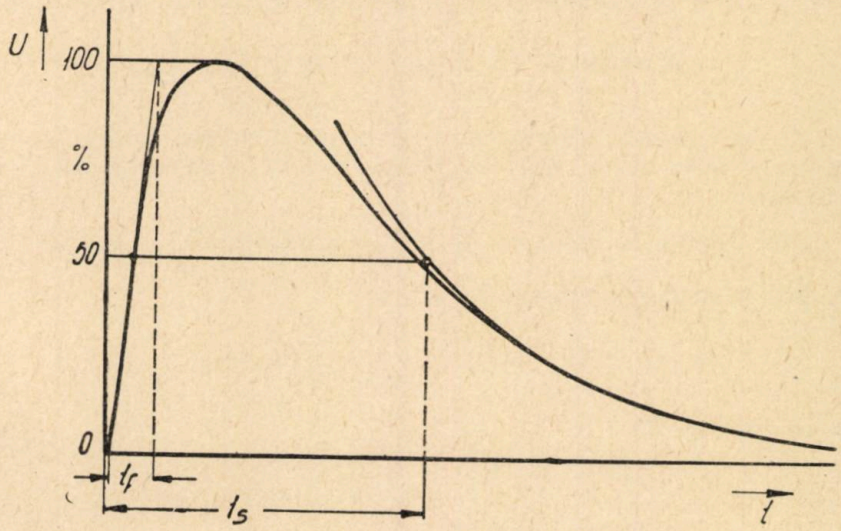
In cele ce urmează vom arăta cum poate fi rezolvată problema pentru cazul valorilor mari ale lui $m$.

## 4.7. STABILIREA RELAŢIILOR PENTRU VALORI MARI ALE LUI m.

4.7.1 — *Durata de semiamplitudine.* Mai întîi vom face o ipoteză care simplifică simţitor calculele fără a influenţa rezultatul din punct de vedere practic. Vom spune că, după un timp $t_s$, echivalentul duratei de semiaplitudine, diferenţa :

$$f_1 (t) - f (t_s)$$

este suficient de mică, ceea ce ne permite a înlocui pe $f (t)$ cu de la $t_s$ înainte [48]. Fig. 16 ne indică acest lucru.




áig. 16—Unda de impuls. Nomenclatura simplificată.

Vom scrie deci după (3.8) :

$$f (\tau) = e^{-\tau}$$

$$f (t_s) = \frac{u_1}{2} = e^{-\tau_s}$$

Logaritmînd obţinem :

$$\tau_s = \ln \frac{2}{u_1} = \ln \; 2 \frac{m^{\frac{m}{m-1}}}{m-1} \qquad (4.30)$$

care ne permite determinarea lui $a$ sau $t_s$ (nefiind dat).

*Observaţie.* Comparînd această expresie cu aceea a timpului de inflexiune ovservăm că :

$$\lim_{m \to \infty} \frac{t_2}{t_s} = \lim_{m \to \infty} \frac{2 \frac{\ln m}{m-1}}{\ln 2 \; \frac{m^{\frac{\ln m}{m-1}}}{m-1}} = 0 \qquad (4.31)$$

Deci, independent de parametrii undei, timpul de infexiune are loc înaintea celui de semiamplitudine.

4. 7. 2. — *Durata frunţii.* Aşa cum am amintit, problema este destul de dificilă, deoarece conform definiţiei IEC trebuie determinate punctele 0,1 $U_m$ şi 0,9 $U_m$, ceea ce nu este convenabil, ecuaţia fiind transcendentă.

In acest caz, este preferabil să se recurgă la definiţia duratei frunţii după V D E, care asimilează dreapta trecînd prin punctele mai sus amintite, cu tangenta în primul punct de semiamplitudine [3].

Pentru determinarea punctului unde are loc prima semiamplitudine a undei plecăm de la ecuaţia undei scrisă sub forma (3.9) :

$$u = (m - 1)\left[\tau - \frac{1}{2}(m + 1)\tau^2\right],$$

obţinută desvoltînd în serie pe $e^{\tau}$ şi reţinînd numai primii trei termeni, ceea ce la valori mici ale timpului $t$ dă o suficient de bună aproximaţie.

Cînd funcţia ia valoarea de semiamplitudine $\frac{u_m}{2}$, ecuaţia (3,9) devine, ordonînd după puterile lui $\tau_s$ :

$$(m + 1)\tau_s^2 - 2\tau_s + \frac{1}{m - 1}u_1 = 0 , \qquad (4.32)$$

ceea ce conduce la :

$$\tau_s = 1 \pm \frac{\sqrt{1 - \frac{m + 1}{m - 1}u_1}}{m + 1} . \qquad (4.33)$$

Deoarece ne interesează primul timp de semiamplitudine, reţinem semnul minus din faţa radicalului

$$\tau_{s1} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{m + 1}{m^{\frac{m}{m-1}}}}}{m + 1} = K_1 . \qquad (4.34)$$

Ecuaţia tangentei în punctul de semiamplitudine

$$u - \frac{u_1}{2} = u'(\tau_s')\,[\tau - \tau_{s1}] \qquad (4.35)$$

unde : $u'(\tau_s') = (m - 1)\sqrt{1 - \frac{m + 1}{m^{\frac{1}{m-1}}}} = K_2$ (4.36)

Rezultă :

$$u - \frac{u_1}{2} = K_2\,[\tau - K_1] . \qquad (4.37)$$

Intersectînd cu :

$$u = u_1$$

obţinem expresia analitică a timpului de front sub forma :

$$\tau_f = \frac{u_2}{2\ K_2} + K_1 \quad . \tag{4.38}$$

Dacă raportăm cele două expresii (4.50) şi 4.58) obţinem o altă relaţie fundamentală a undei de impuls :

$$\frac{t_s}{t_f} = \frac{\ln \frac{2}{u_1}}{\frac{u_1}{2\,K_2} + K_1} \quad . \tag{4.39}$$

Reprezentarea grafică a funcţiunilor : $\frac{U_o}{U_m}$ , $\frac{t_s}{t_f}$ , $at_s$ şi $at_f$ în funcţie de parametrul $m$, a fost făcută în fig. 17 şi 18.

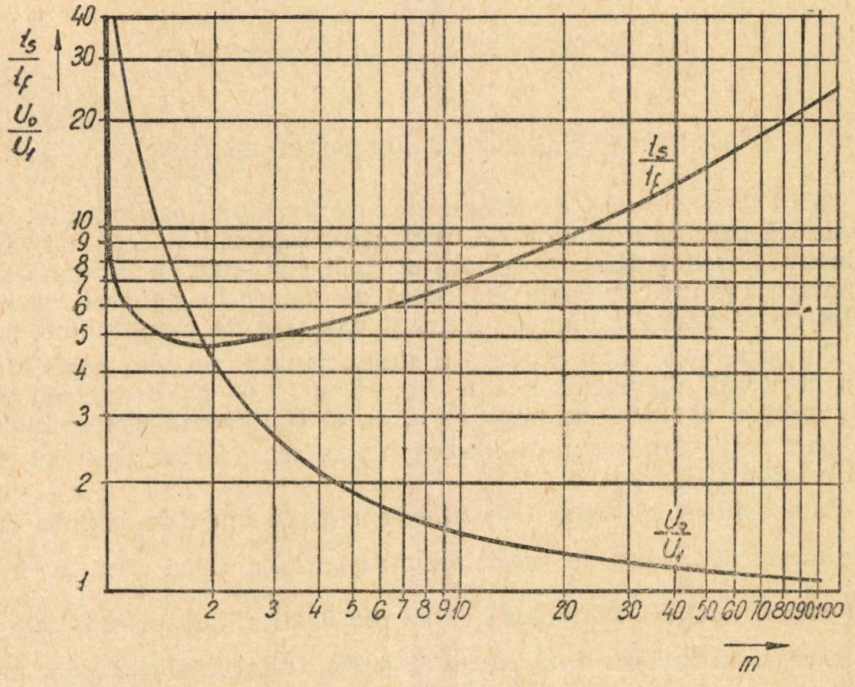



Fig. 17—Variaţia lui $\frac{U_0}{U_1}$ şi $\frac{t_s}{t_f}$, în funcţie de $m$.

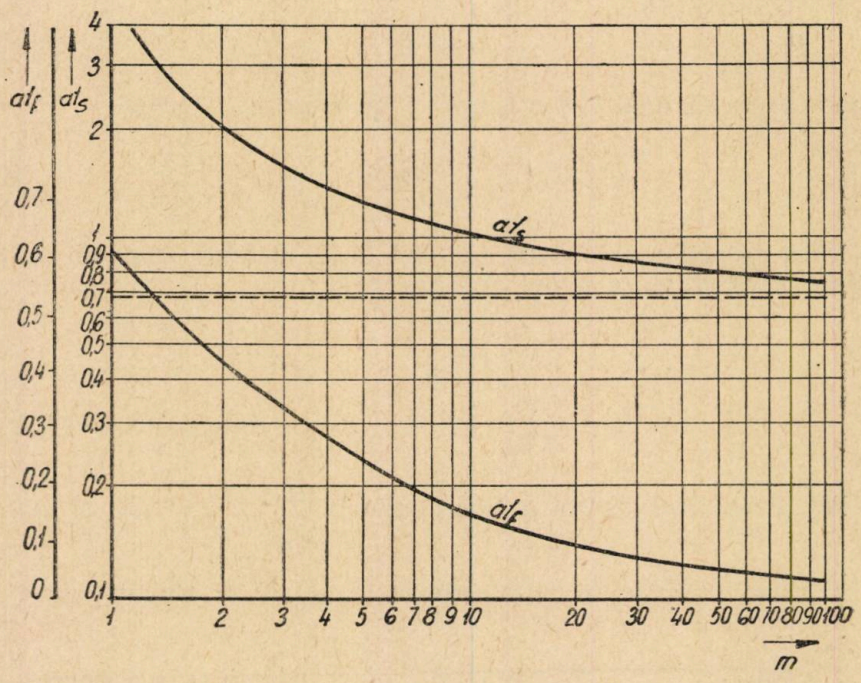



Fig. 18—Variaţia lui $at$ şi $at_s$ în funcţie de $m$.

## 4.8. EXPRESIA ANALITICĂ A CURBELOR DE CURENT

Fiind dată o curbă de curent sau de tensiune oscilografiată, ne interesează care este funcţia de timp care reprezintă cel mai exact fenomenul oscilografiat. Am arătat mai sus cum o asemenea reprezentare analitică se poate face dacă se cunosc în general raportul duratei de semiamplitudine de front şi valoarea de amplitudine.

Cunoaşterea acestor parametri fundamentali ne dă posibilitatea — cu ajutorul diagramelor din fig. 16 şi 17 — să deducem parametrii proprii ai undei de impuls : $a$, $m$, şi $U_0$. Odată determinaţi aceşti parametri, ecuaţia undei de impuls se scrie foarte uşor cu ajutorul relaţiei (2.6).

Este evident că această ecuaţie reprezintă unda de impuls cu o aproximaţie depinzînd de precizia cunoaşterii lui $U_0$ şi $\frac{t'_s}{t_f}$ şi a întregului calcul analitic. In ipoteza că se fac determinări precise ale lui $\frac{t_s}{t_f}$, cum şi în ipoteza unui calcul îngrijit, diferenţele dintre curba oscilografiată şi aceea calculată sînt minime.

In fig. 19 este indicată înlocuirea unei curbe de curent oscilografiate [49].

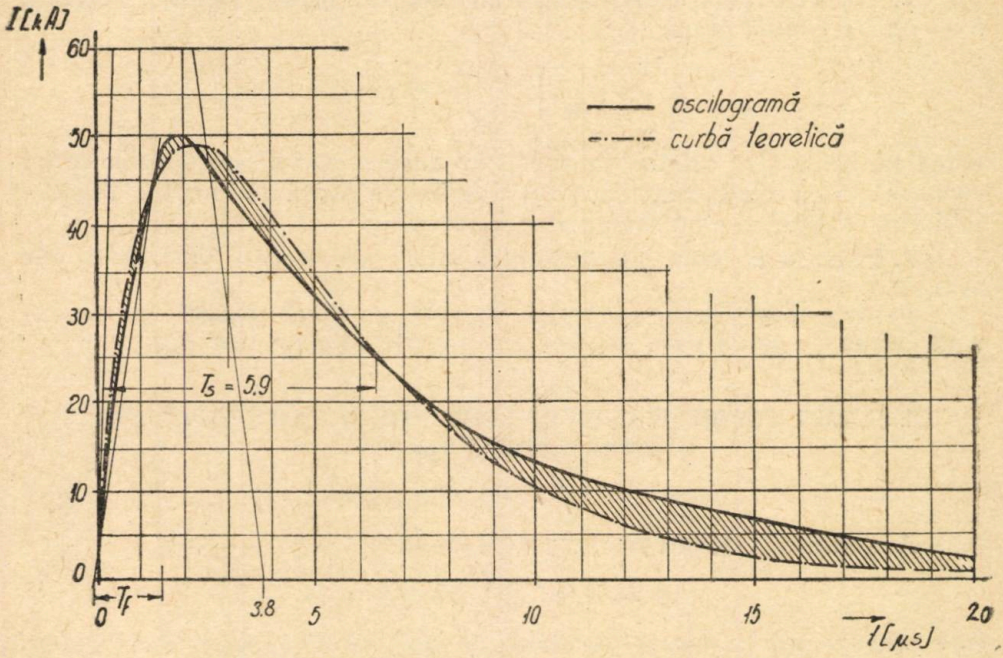



Fig. 19—Inlocuirea unei curbe de curent oscilografiate.

In exemplul de mai sus au rezultat următoarele valori :

$$I_o = 145 \text{ kA} ;$$

$$a = 0{,}263 ;$$

$$m = 2{,}7 .$$

Cu aceste valori expresia analitică a curbei de curent oscilografiate se scrie :

$$I = 145 \, (e^{-0{,}263\,t} - e^{-0710\,t}) \text{ , kA} \qquad (4.40)$$

Această reprezentare ne arată că în unele porțiuni valorile indicate de curba teoretică întrec pe cele rezultate din curba oscilografiată, iar în alte porțiuni se află sub aceasta. In general, există o compensare, astfel încît suprafața închisă de fiecare din cele două curbe este aproape constantă. Ori, de această suprafață depinde în general valoarea medie și efectul energetic.

*Observații generale.* Din studiul formei fundamentaie de undă reiese posibilitatea de a reprezenta analitic orice fenomen tranzitoriu a cărui

desfăşurare în timp se face după o undă de impuls (aperiodică). Ecuaţia reprezentativă (3.7) prezintă însă două deficienţe :

1. Nu reproduce fidel fenomenul fizic, în jurul originiii (adică la $t = o$). In adevăr după (3.7)

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)_{\tau=o} = m - 1$$

adică tangenta în origine la curbă ar avea o pantă finită, ceea ce nu corespunde cu realitatea fizică (oscilogramele arată că funcţia respectivă este tangentă axei timpurilor în origine).

2. Funcţia nu este logaritmabilă, din care cauză este greu de tabulat.

Pentru acest lucru, va trebui să studiem două funcţii reprezentînd forma de undă care elimină inconvenientele de mai sus.

## 5. STUDIUL FORMEI DE UNDĂ CU DOUĂ EXPONENŢIALE EXPRIMATĂ INTR-UN SINGUR TERMEN

### 5.1 STRUCTURA FORMULEI.

Am arătat anterior că forma de undă :

$$u = 2\, e^{-m_2\tau}\, \mathrm{sh}\, m_1\tau$$

este echivalentă cu forma de undă pe care am denumit-o fundamentală. Această expresie prezintă avantajul de a fi logaritmabilă, ceea ce este adeseori foarte util pentru calcule.

Nici această formulă nu reuşeşte însă se reprezinte suficient de bine fenomenul fizic în jurul originei, avînd tangenta la $t = o$ cu panta finită.

### 5.2 — STUDIUL ANALITIC

Această formă de undă se poate considera ca fiind produsul a două unde fictive (fig. 20).

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= e^{-m_2\tau} \quad ; \\ f_2(\tau) &= \mathrm{sh}\, m_1\tau \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dacă se calculează derivatele succesive ale funcţiei pînă la ordinul $n$ inclusiv, se obţine :

$$\frac{d^n f}{d\tau^n} = 2\ (-1)^n\ e^{-m_2\tau}\left[\mathrm{sh}\, m_1\tau \sum_{p=0}^{2k} C_n^p\, m_2^{\,n-p}\, m_1^{\,p} - \right.$$

$$\left. - \mathrm{ch}\, m_1\tau \sum_{q=0}^{2k+1} C_n^q\, m_2^{\,n-q}\, m_1^{\,q}\right] \tag{5.2}$$

$$k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ \frac{n}{2}$$

Anularea derivatei are loc pentru :

$$\tau_n = \frac{1}{m_1} \operatorname{arg\,th} \frac{\sum_{q=0}^{n} C_n^q \, m_2^{n-q} \, m_1^q}{\sum_{p=0}^{n} C_n^p \, m_2^{n-p} \, m_1^p} \tag{5.3}$$

sau pentru : $\tau = \infty$ , ceea ce conduce la $f(t) = 0$.

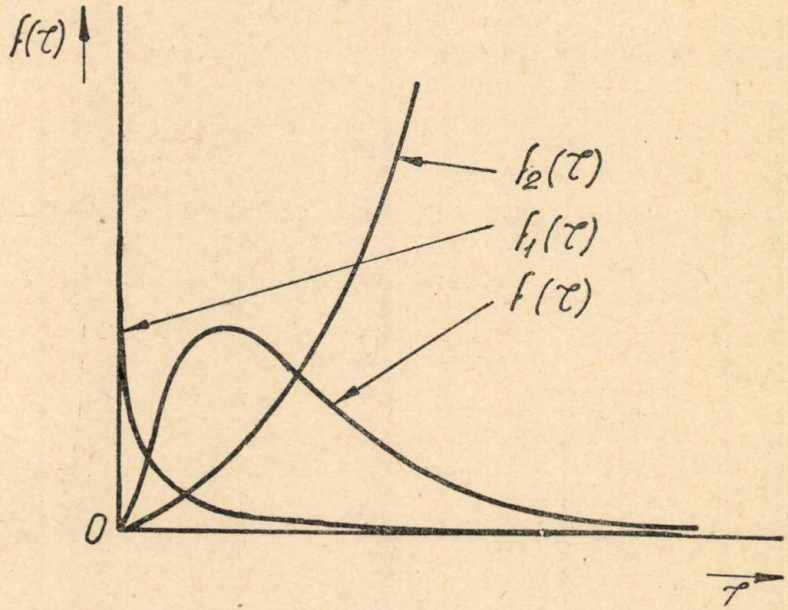



Fig. 20—Reprezentarea grafică a formei de undă cu două exponenţiale, exprimată într-un singur termen.

*Timpul de maxim şi timpul ae inflexiune.* Expresia timpului de maxim se obţine făcînd $n = 1$ în relaţia (5.3), rezultînd :

$$\tau_1 = \frac{1}{m_1} \operatorname{arg\,th} \frac{m_2}{m_1}. \tag{5.4}$$

Sau dacă ţinem seamă de expresiile lui $m_1$ şi $m_2$,

$$t_1 = \frac{1}{a_1} \operatorname{arg\,th} \frac{m-1}{m+1}. \tag{5.5}$$

In acelaş mod, obţinem :

$$t_2 = \frac{1}{a_1} \operatorname{arg\,th} \frac{m_2 - 1}{m_2 + 1}. \tag{5.6}$$

### 5.3 CORELAȚIILE DINTRE PARAMETRII UNDEI

Vom da o metodă graficoanalitică. Pornind de la forma :

$$u = e^{-m_2 \tau} \operatorname{sh} m_1 \tau$$

rezultă că la

$$\tau = \tau_s ,$$

$$\frac{u_1}{2} = e^{-m_2 \tau_s} \operatorname{sh} m_1 \tau_s \tag{5.7}$$

sau punînd : $K = \frac{u_1}{2}$ , avem :

$$K. e^{m_2 \tau_s} = \operatorname{sh} m_1 \tau_s$$

Punctul căutat se află la intersecția curbelor :

$$y_1 = K. e^{m_2 \tau_s}$$

și

$$y_2 = \operatorname{sh} m_1 \tau_s \tag{5.8}$$

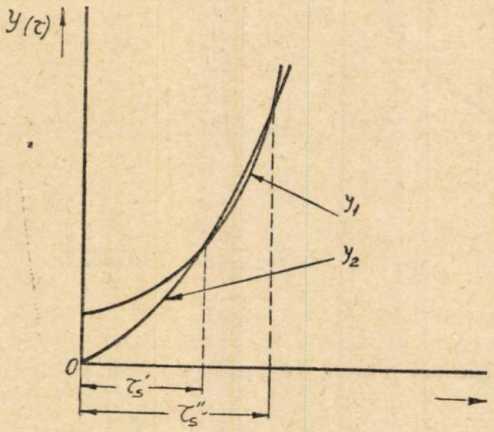



Fig. 21—Metoda grafico-analitică de determinare a lui $\tau_s$

care pot fi ușor reprezentate (fig. 21), valorile lui $e^{\tau}$ și sh $\tau$ fiind tabelate.

Fie $\tau_s'$ primul punct de semiaplitudine și $\tau_s''$ cel de al doilea punct de acest fel. Dacă scriem ecuația tangentei în primul dintre aceste puncte, obținem :

$$u - \frac{u_1}{2} = u'(\tau_s') \left[\tau - \tau_s'\right] \tag{5.9}$$

unde:

$$u' = -m_2\, e^{-m_2 \tau} \operatorname{sh} m_1 \tau + m_1 e^{-m_2 \tau} \operatorname{ch} m_1 \tau$$

şi cum:

$$\operatorname{ch} m_1 \tau = e^{-m_1 \tau} - \operatorname{sh} m_1 \tau$$

$$u' = m_1 e^{(m_2 - m_1)\tau} - (m_1 + m_2).\, e^{-m_2 \tau} \operatorname{sh} m_1 \tau,$$

$$u'(\tau'_s) = m_1 e^{-\tau'_s} - \frac{m}{2} u_1 = k' \,. \tag{5.10}$$

Rezultă:

$$\left.\begin{aligned} u - \frac{u_1}{2} &= k'(\tau - \tau'_s) \\ u &= u_1 \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Intersecţia cu:

conduce la:

$$\tau_f = \frac{u_1}{2k'} + \tau'_s \tag{5.12}$$

şi:

$$\frac{t_s}{t_f} = \frac{\tau''_s}{\tau_f} = \frac{\tau''_s}{\frac{u_1}{2k'} + \tau'_s} \,. \tag{5.13}$$

## 6. STUDIUL FORMEI DE UNDĂ PARABOLOEXPONENŢIALE

### 6.1. STRUCTURA FORMULEI

Forma de undă:

$$u = \tau^m e^{-m\tau}$$

pe care o vom considera acum, elimină ambele defecţiuni pe care le prezintă forma fundamentală de undă.

Pentru a da o imagine acestei relaţii, vom presupune că ea este produsul a două unde fictive

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= \tau^m \\ f_2(\tau) &= e^{-m\tau} \end{aligned} \tag{6.1}$$

## 6 2. — STUDIUL ANALITIC

Dacă se calculează derivatele pînă la ordinul $n$ inclusiv rezultă relaţia :

$$\frac{d^n f}{d\tau_n} = e^{-m\tau}\left[(-1)^n m^n \tau^m + \right.$$

$$\left. + m^{n-p} \sum_{q=1}^{q=n} (-1)^{-q} C_m^q \frac{m!}{(m-q)!} \tau^{m-q}\right] \tag{6.2}$$

Darivata de ordinul 1 este :

$$\frac{df}{d\tau} = -e^{-m\tau}\left[m\tau^m - m\,\tau^{m-1}\right] \tag{6.3}$$

Anularea ei conduce la relaţia :

$$\tau_1 = 1 \tag{6.4}$$

sau ceeace este echivalent :

$$t_1 = \frac{1}{a} \tag{6.5}$$

care ne dă timpul de maxim *).

Derivata de ordinul 2 :

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} = e^{-m\tau}\left[m^2\tau^m - 2\,m^2\tau^{m-1} + m\,(m-1)\,\tau^{m-2}\right] \tag{6.6}$$

Anularea acestuia conduce la :

$$m\tau^2 - 2\,m\,\tau + m - 1 = 0 \tag{6·7}$$

Rezolvarea ecuaţiei ne dă :

$$\tau_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{m}}{m} \tag{6.8}$$

Aceste două valori ale lui $\tau$ reprezintă abscisele celor două puncte de inflexiune.

*Valoarea maximă* se obţine înlocuind în (3.6) $\tau = 1$. Rezultă :

$$u_1 = f_{max}(\tau) = e^{-m} \tag{6.9}$$

Din cele arătate reiese că toate curbele care formează familia definită prin ecuaţia (3.6) au maximul pe aceeaşi verticală (fig. 22). Ecuaţia analitică a locului geometric al punctelor de maxim se scrie :

$$\tau = 1 \tag{6.10}$$

*) Relaţia (6.5) defineşte în acelaşi timp şi factorul de atenuare a undei $a$.

Din (4.87) rezultă imediat :

$$m = \ln \frac{1}{f_{max}} \tag{6.11}$$

care definește pe $m$, fiind în același timp și o metodă de determinare a acestuia.

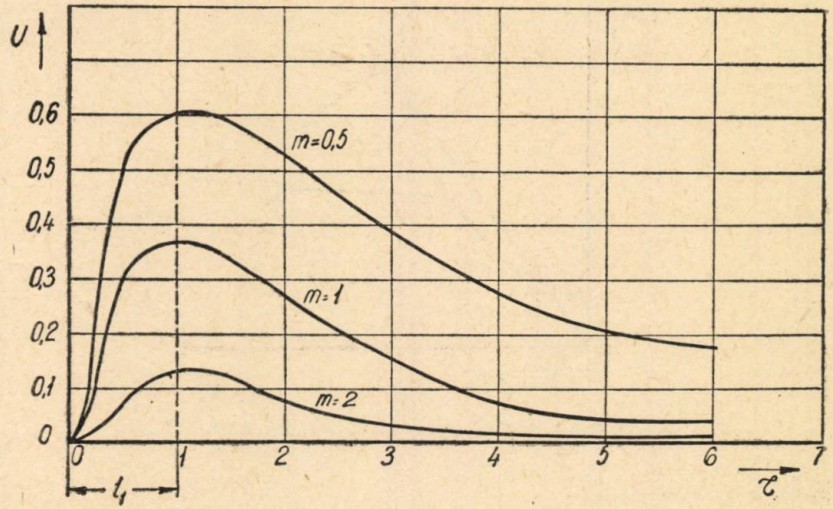



Fig. 22—Reprezentarea grafică a formei de undă parabolo-exponențiale.

## 6.3. CORELAȚIILE DINTRE PARAMETRII UNDEI

La timpul de semiamplitudine :

$$f(\tau_s) = \tau_s^m \; e^{-m\tau_s} = \frac{e^{-m}}{2} \tag{6.12}$$

Rezultă imediat :

$$\frac{e^{-1}}{\sqrt[m]{2}} = \tau_s e^{-\tau_s} \; , \tag{6.13}$$

Această ecuație poate fi rezolvată ușor în mod analitico-grafic, observînd că ea se mai poate pune sub forma :

$$\sqrt[m]{2} \; . \; e \; \tau_s = e^{\tau_s} \tag{6.14}$$

Reprezentînd grafic cele două curbe (fig. 23)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[m]{2} \; . \; e \; . \; \tau_s \\ y_2 &= e^{\tau_s} \; , \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

obținem la intersecția lor soluțiile căutate, fie ele $\tau$ și $\tau_s''$ astfel încît :

$$\tau_s'' > \tau_s' \; .$$

După procedeul urmat în cazul celor două forme de undă vom scrie tangenta în punctul de semiamplitudine de pe frunte a cărei pantă este :

$$u'(\tau_s') = -m\, u(\tau_s')\left[1 - \frac{1}{\tau_s'}\right] = -m\,\frac{e^{-m}}{2}\left[1 - \frac{1}{\tau_s'}\right].$$

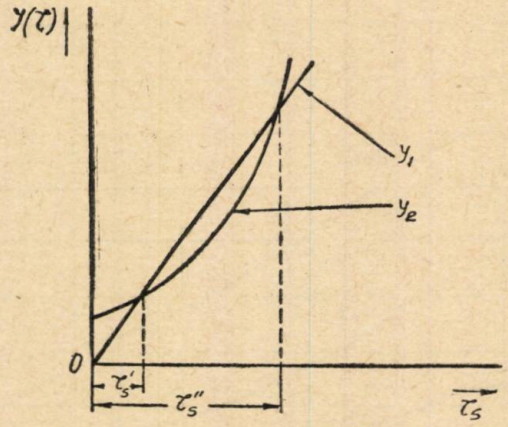



Fig. 23—Metoda grafico-analitică de determinare a lui $\tau_s$

Ecuaţia tangentei :

$$u - \frac{e^{-m}}{2} = -m\,\frac{e^{-m}}{2}\left[1 - \frac{1}{\tau_s'}\right]\left[\tau - \tau_s'\right] \tag{6.16}$$

Intersectînd cu :

$$u = e^{-m},$$

obţinem :

$$\frac{e^{-m}}{2} = -m\,\frac{e^{-m}}{2}\left[1 - \frac{1}{\tau_s'}\right]\left[\tau_f - \tau_s'\right]$$

$$\tau_f = \tau_s' - \frac{1}{m\left[1 - \frac{1}{\tau_s'}\right]}. \tag{6.17}$$

De unde, deducem relaţia între $t_s$ şi $t_f$ prin intermediul lui $\tau_2''$ şi $\tau_f$ :

$$\frac{t_s}{t_f} = \frac{\tau_2''}{\tau_f} = \frac{\tau_s''}{\tau_s' - m\left[1 - \frac{1}{\tau_s'}\right]}. \tag{6.18}$$

*Observaţii generale:* Această formă de undă reprezintă foarte bine unda călătoare la timpul iniţial dat fiind că:

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0$$

adică tangenta în origine este orizontală, ceea ce corespunde pe deplin cu oscilogramele obținute în cazul descărcărilor de trăznet.

Ca un punct negativ trebuie să menționăm însă că această formă de undă nu permite o adaptabilitate prea mare, întrucît maximul funcției reprezentative se mișcă pe o verticală, Aceasta în comparație cu forma fundamentală de undă, care permite o mare adaptabilitate la forme variate ale undei.

## 7. DOMENII DE APLICARE

### 7,1. ECUAȚII DIFERENȚIALE ALE CIRCUITELOR DE IMPULS

Deplasarea undelor de impuls pe liniile de transmisie împreună cu atenuarea și deformarea lor se poate urmări prin calcul, cu ajutorul ecuației telegrafiștilor. După cum se știe, această ecuație este cu derivate parțiale, de tip hiperbolic și de ordinul 2, ea avînd aceeași formă atît pentru curent cît și pentru tensiune. Ea se scrie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -Z(p)\frac{\partial i}{\partial z} = Y(p)\,Z(p)\cdot u \qquad (7.1)$$

$$= [RG + (RC + GL)\,p + LCp^2]\,u$$

unde s-a notat: $p = \frac{\partial}{\partial t}$ iar $R$, $L$, $C$ și $G$ sînt rezistența, inductanța, capacitatea și conductanța laterală pe unitățile de lungime. Soluția generală are forma:

$$u = U_0\, e^{-(R/L)t}\,[\,f_1(x + vt) + f_2(x - vt)\,] \qquad (7.2)$$

Forma undei de trăznet se introduce în problemă printr-o condiție la frontieră, impunînd desfășurarea după o anumită funcție de timp a tensiunii și curentului în punctul liniei unde a căzut trăznetul.

Expresia analitică a acestei funcții de timp nu este indiferentă peutru rezolvarea problemei. Funcția exponențială este desigur cea mai simplă dintre toate, date fiind proprietățile cunoscute de derivare, integrare și trecere la exponenți complecși. Aceste avantaje se manifestă în plin atîta timp cît soluția generală a problemei omogene se exprimă cu ajutorul funcțiilor armonice exponențiale sau a seriilor Fourier.

Dacă $\varphi_1(p)$ este funcția imagine a soluției unei probleme, în cazul aplicării treptei unitare și, dacă funcția de timp a tensiunii aplicate este $f_2(t)$ cu imaginea $\varphi_2(p)$, atunci soluția imagine dată este de expresia operațională

$$\varphi(p) = \varphi_1(p)\cdot\varphi_2(p). \qquad (7.3)$$

Găsirea funcției de timp depinde de posibilitatea inversării acestei expresii. Dacă $f_1(t)$ se exprimă cu ajutorul funcției exponențiale de timp $e^{-at}$ unde a este real, atunci imaginea are forma

$$\varphi_1(p) = \frac{p}{p+a}. \qquad (7.4.)$$

Dacă şi $f_2$ are formă similară, de exemplu $e^{-bt}$, atunci soluţia imagine este

$$\varphi(p) = \frac{p}{(p+a)} \cdot \frac{p}{(p+b)} = \mathcal{C}\, \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b}, \tag{7.5.}$$

care se inversează uşor, cu $\mathcal{C}$ notîndu-se operaţia integralei Laplace—Carson

$$\mathcal{C} f(t) = p \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt. \tag{7.6.}$$

Funcţia exponenţială are avantajul că şi derivatele succesive ale ei au expresii operaţionale simple:

$$\mathcal{C} \frac{d^n}{dt^n} e^{-at} = \frac{p^{n+1}}{p+a}. \tag{7.7.}$$

Funcţia liniară-exponenţială, are de asemenea imagini simple:

$$\mathcal{C}\, at.e^{-at} = \frac{ap}{(p+a)^2}, \tag{7.8}$$

împreună cu derivatele sale succesive

$$\frac{d^n}{df^n}(at.e^{-at}) = (-1)^{n-1} a^n e^{-at}(n-at)^* \tag{7.9}$$

anume:

$$\mathcal{C}\left\{\frac{d^n}{dt^n}(at.\, e^{-at})\right\} = \frac{a\, p^{n+1}}{(p+a)^2}, \tag{7.10}$$

unde polul dublu $p = -a$ este singurul care poate produce complicaţii în calcule. Inversarea acestor funcţii se poate efectua sau prin teorema desvotării a lui Heaviside sau prin integrala Mellin-Wagner în planul complex $p$, care se evaluează cu ajutorul teoremei reziduurilor.

Mai dificilă este găsirea transformatei Laplace-Carson a funcţiei parabolo-exponenţiale şi a derivatelor succesive. Această funcţie se scrie după cum am spus:

$$f(t) = (at)^m e^{-mat}\ ; \tag{7.11}$$

aplicînd metoda de integrare prin părţi se obţine după $m+1$ integrări succesive:

$$\mathcal{C} f(t) = \frac{m \cdot a^m \cdot p}{(ma+p)^{m+1}}, \tag{7.12}$$

*) Este interesant de observat că dacă în formula (7.9) se pune $n = -1$, rezultă functia primitivă.

unde eventualele complicaţii în calcule pot interveni din cauza polului de ordinul $m + 1$ :

$$p = -m\,a\ .$$

Derivata de ordinul $n$ a funcţiei, a cărei expresie am dat-o odată cu (6.2) se transformă şi ea cu ajutorul relaţiei :

$$\mathcal{C}\frac{d^n f}{dt^n} = (-1)^n m^n \mathcal{C} f(t) + m^{n-q} \sum_{q=1}^{q=n} (-1)^{n-q} C_n^q \frac{m!}{(m-q)!} \mathcal{C}\left\{\frac{f(t)}{\tau^q}\right\}$$

unde expresia:

$$\mathcal{C}\left\{\frac{f(t)}{\tau^q}\right\}$$

se transformă în unda de forma (7.13).

Există însă cazuri cînd soluţia se exprimă mai convenabil prin alte funcţii. De exemplu, în cazul cablurilor lungi, cu constanta de timp $T = RC$ şi cu condiţiile : $L = 0$ şi $G = 0$, soluţia se exprimă cu ajutorul funcţiei integrale a erorilor în cazul aplicării treptei unitare a tensiunii. Dacă, în acest caz se încearcă trecerea la o funcţie de impuls cu termeni exponenţiali, integrala Duhamel, care dă soluţia:

$$u = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t e^{-a(t-\tau)}\,\mathrm{erfc}\left[\frac{CRx}{2\sqrt{\tau}}\right]d\tau, \qquad (7.13)$$

nu se poate rezolva decît numeric sau grafic, aşa cum s-a arătat de către autor, într-o lucrare anterioară [50]. Este probabil că dacă funcţia de timp a impulsului iniţial s-ar putea exprima cu ajutorul funcţiei erorilor, iniţiind o analiză similară cu aceea a lui Fourier, ar fi posibil să se rezolve integralele Duhamel care intervin. Această problemă ar merita un studiu teoretic mai aprofundat.

Instalaţiile de producere a impulsiunilor se pot echivala din punct de vedere electrocinetic cu circuite relativ simple prin care se descarcă o baterie de condensatoare. In astfel de instalaţii, intervin mult mai rar fenomene de propagare şi de aceea în calcule se ia în consideraţie numai desfăşurarea în timp a parametrilor.

Ecuaţia cea mai simplă tip RLC în serie se scrie după cum se ştie:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{du}{dt} \qquad (7.14)$$

în care $u$ înseamnă tensiunea aplicată circuitului serie. Fenomenul de descărcare se calculează din ipoteza $U = o$, în momentul $t = o$, după ce pentru $t < o$, circuitului i s-a aplicat o tensiune constantă : $U = U_o$ şi deci capacitatea din circuit este încărcată. Soluţia problemei se cunoaşte. Parametrii se reglează în aşa fel, încît să rezulte o descărcare aperiodică.

Pentru a obţine forme de unde normalizate, circuitul se completează cu capacităţi şi rezistenţe în paralel, luînd caracterul general al cadripolului în $T$. Calculul undei de impuls pentru acest caz s-a arătat la punctul 2.3.5. Acest împuls de tensiune exprimat analitic prin diferenţa a două funcţiuni exponenţiale se aplică obiectului de încărcat care poate să fie un izolator, un eclator, un descărcător catodic, un cablu, un transformator etc. Aceste obiecte de încercare se pot echivala uneori cu elemente simple de circuit ca rezistenţe, capacităţi etc. Alteori, ca în cazul transformatoarelor, ele se echivalează cu scheme mai complexe din inductanţe şi capacităţi compuse într-un mod convenabil. Acest circuit complex reacţionează asupra generatorului de impuls şi poate modifica forma undei. Calculul, în astfel de cazuri, trebuie să înglobeze în circuitul de descărcare schema obiectului de încercat.

In anumite cazuri, cînd capacitatea generatorului de impuls este mare faţă de aceea a obiectului, obiectul nu influenţează în mod esenţial forma undei de impuls, care este de obicei precizată de norme şi trebuie să fie realizată ca atare.

## 7.2. — DETERMINAREA PARAMETRILOR OBIECTELOR DE INCERCAT

Pentru a putea determina parametrii obiectelor de încercat în regim de impuls, este necesară înglobarea acestor obiecte în circuitul respectiv, sub forma unor combinaţii relativ simple. Cunoaşterea expresiei analitice a undei de impuls, permite determinarea parametrilor mai sus amintiţi cu mare exactitate. Astfel, se pot deduce : mărimea şi forma curentului care trece prin obiectul încercat, căderea de tensiune pe acest obiect sau pe părţile lui, capacitatea de trecere (descărcare) la unde de impuls etc. Se creează astfel posibilitatea predeterminării prin calcul a unor caracteristici esenţiale ale elementelor lucrînd în regim de impuls.

In acest sens, un bun exemplu îl constituie cazul descărcătoarelor catodice (în general acela al aparatelor care utilizează rezistenţe neliniare). Cunoaşterea precisă a formei de undă de curent care trece prin descărcător permite găsirea expresiei analitice a tensiunii reziduale, maximului acestei tensiuni, capacitatea de trecere cum şi o serie de observaţii asupra încălzirii.

Dar acest exemplu nu este suficient, întrucît el nu epuizează decît un aspect al problemei, aşa cum am amintit şi la subcapitolul precedent. De asemenea se impune problema izolatorilor a căror comportare la unde de impuls este diferită de aceea la unde sinusoidale. Repartiţia complet diferită a tensiunii pe lanţul de izolatori se datoreşte în special variaţiei in luenţei capacităţii lanţului la impuls, foarte pronunţată mai ales în primele momente ale impulsului. Aceasta pune probleme speciale (în parte rezolvate prin aşa numita „dirijare a potenţialelor").

In sfîrşit, o ultimă problemă importantă în acest sens (ca să ne limităm aici) o constituie studiul comportării înfăşurărilor transformatoarelor de putere la acţiunea undelor de impuls.

Această problemă a fost supusă unui studiu matematic precis, numai într-un număr limitat de cazuri. Aceasta a permis, totuşi, să se

tragă o serie de concluzii importante, mai ales în ceea ce privește căderea de tensiune pe primele spire ale înfășurării transformatorului. Cunoașterea expresiei analitice a undei de impuls, cum și o adîncă pătrundere a fenomenelor care au loc în transformator, ar putea contribui la stabilirea unei scheme reale și crearea unei teorii unitare a transformatoarelor electrice în regim de impuls.

## 7.3.—CALCULUL EFECTULUI ELECTROCALORIC

In orice problemă de electrotehnică, aspectul energetic al fenomenului joacă un rol esențial. In legătură cu aceasta se definește pentru elementele care lucrează în regim de impuls așa numita „capacitate de trecere" (descărcare) la unde de impuls, care echivalează cu capacitatea acelui element de a rezista acțiunii termoenergetice a undelor.

Problema este mai simplă în cazul în care avem de a face cu rezistențe simple sau cu supape de tensiune ($U = ct$) [51]. Ea se complică — mai ales din punct de vedere al calculului — cînd este vorba de rezistențe neliniare, care formează dealtfel o mare categorie de elemente care lucrează în regim de impuls. In acest caz soluția a fost dată de coautor [52]. Pentru a găsi expresia analitică a energiei dezvoltată într-o rezistență oarecare de către o undă de impuls, este necesar să cunoaștem pe lîngă ecuația undei și caracteristica tensiune-curent a rezistenței respective.

Expresia energiei dezvoltate într-o rezistență neliniară, a cărei caracteristică tensiune-curent se scrie:

$$U = C\, I^{\alpha}, \tag{7.15}$$

de către un curent de impuls aperiodic

$$I = \hat{I}_0 \left(e^{-at} - e^{-mat}\right)$$

este [53];

$$E = \frac{C.\, I_0^{\alpha}}{a} \left[\frac{1}{1+\alpha} - \frac{1+\alpha}{m+\alpha} + \frac{(1+\alpha)\,\alpha}{2\,(2m+\alpha-1)}\right], \text{ [Ws]} \tag{7.16}$$

Formula de mai sus arată că energia depinde atît de parametrii rezistenței neliniare ($C$ și $\alpha$), cît și de parametrii undei de impuls ($I_0$, $a$ și $m$). Determinarea cu precizie a acestor parametri, influențează în cel mai înalt grad cunoașterea cu exactitate a energiei dezvoltate în rezistența neliniară, iar această energie este esențială pentru stabilirea duratei de viață a descărcătoarelor cu rezistențe neliniare.

### 7.4. CALCULUL EFECTULUI PELICULAR

In capitolul 1.4 s-a atras atenţia asupra faptului că una din cauzele atenuării undelor de impuls pe linie este efectul pelicular care măreşte considerabil (de 5 ori) rezistenţa conductelor şi prin aceasta implicit energia disipată prin efect Joule-Lenz. Pentru oscilaţii armonice, efectul pelicular a fost dedus din ecuaţiile lui Maxwell, rezultînd formulele şi tabelele cunoscute ale rezistenţei efective, în funcţie de un parametru care conţine frecvenţa curentului, rezistivitatea şi permeabilitatea materialului conductorului. Pentru undele de impuls, calculul devine dificil. S-au făcut numeroase încercări de a deduce efectul pelicular la undele de impuls, din ecuaţiile lui Maxwell, dar soluţiile obţinute de alţi autori au fost numai aproximative. Am amintit că cercetătorii romîni, [17,19] au dat contribuţii esenţiale la lămurirea acestei probleme, reuşind pînă la sfîrşit să deducă soluţia exactă a efectului pelicular tranzitoriu [18], pentru treapta unitară a tensiunii aplicate. Comportarea la unde de impuls reale se deduce din această solutie, după cum se ştie printr-o integrală de tip Duhamel. Această integrală se poate rezolva dacă funcţia de timp pr n care se reprezintă unda de impuls reală, are contigenţe cu funcţiile din care se compune soluţia.

Rămîne ca o chestiune de studiu în continuare de a găsi soluţia pentru rezistenţa eficace conductoarelor în cazul aplicării unor unde de impuls de diferite forme. Pentru această problemă, studiul de mai sus aduce contribuţii importante prin precizarea proprietăţilor unor expresii analitice care pot reprezenta forma undelor de impuls.

## 8. CONCLUZII

8. 1. Anumite efecte ale trăznetului pe liniile electrice, ca amortizarea undelor şi încălzirea conductoarelor, nu se pot urmări experimental şi necesită un calcul analitic, care serveşte între altele şi la dimensionarea conductelor şi instalaţiilor de laborator care reproduc undele provocate de trăznet. Studiul matematic al undelor de impuls impune o cunoaştere temeinică a fenomenelor electrice din atmosferă şi a efectelor provocate de trăznet pe liniile electrice, cît şi a instalaţiilor de laborator destinate reproducerii acestor efecte.

8. 2. Forma principială a undelor care se deplasează pe linii se poate deduce cauzal şi analitic din fenomenele electro-magnetice conexe cu trăznetul şi din proprietăţile liniei. De asemenea este posibil de a predetermina prin calcul, cu o exactitate suficientă, forma undelor produse în laboratoarele de înaltă tensiune de către instalaţiile de impuls, în funcţie de parametrii acestor instalaţii şi ai obiectelor de încercat.

8. 3. Se pot găsi o serie de expresii analitice care să reproducă, cu o exactitate suficientă, formele undelor de impuls, cele mai frecvente, în speţă ale undelor normalizate prin prescripţii.

8. 4. Ca formă de undă fundamentală, se poate considera cea exprimată prin diferenţa a două funcţiuni exponenţiale. În lucrare se redau şi se stabilesc noi relaţii între parametrii acestei expresii, în

speță între amplitudine, factorul de amortizare, durata frunții și semiamplitudinii. Aceste relații se concretizează prin diagrame, care ușurează rezolvarea unor probleme practice. Dezavantajele acestei formule sînt de a nu respecta exact fenomenul de descărcare în jurul originii (t = o) și de a nu fi logaritmabile.

8. 5. Forma de undă dublă exponențială scrisă într-un singur termen, deși mai ușor calculabilă, prezintă aceeași lacună, în jurul originii.

8. 6. Forma de undă paraboloexponențială, deși îndepărtează neajunsul semnalat, nu are în schimb aceeași maleabilitate ca primele două forme.

8. 7. Găsirea expresiei analitice a unei unde de impuls, care se pune adesea în cazul unei unde reale de trăznet sau unei unde de impuls oscilografiate este posibilă. Expresia analitică astfel găsită reprezintă cu atît mai fidel fenomenul oscilografiat, cu cît parametrii fundamentali ai formei undei se pot stabili mai exact.

Rezolvarea anumitor probleme teoretice și practice, referitoare la undele de impuls, se ușurează considerabil dacă expresia analitică a undei se alege în mod convenabil.

## Anexa I

Scrierea legii a II-a a lui Kirchhoff pentru fiecare circuit în parte conduce la:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{C}\int i_1\,dt + R_a i_1 + R_d\, i_1 - R_d i_2 = 0 \\ \frac{1}{C_d}\int i_2\,dt + R_d i_2 - R_d i_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.)$$

Aplicarea calculului operațional transformă ecuațiile 1.1. în:

$$\left.\begin{aligned} \frac{i_1}{pC_d} + (R_a + R_d)\, i_1 - R_d\, i_1 = 0 \\ \frac{i_2}{pC_d} + (R_a + R_d)\, i_1 - R_d\, i_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.)$$

sau încă

$$\left.\begin{aligned} Z_1\, i_1 - R_d\, i_2 = 0 \\ -R_d\, i_1 + Z_2\, i_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

Pentru ca sistemul (1.3) să fie compatibil trebuie ca;

$$Z_1 Z_2 - R_d^2 = 0 \qquad (1.4)$$

Inlocuind, se obține o ecuație de gradul II în p:

$$p^2 + \alpha p + \beta = 9 \qquad (1,5.)$$

$\alpha$ și $\beta$ fiind funcții de: $R_a$, $R_d$ $C$ și $C_d$.

Soluțiile ecuației (1.5) sînt:

$$P_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha_2}{4} - \beta} \qquad (1.6)$$

Pentru a nu aven oscilaţii trebuie ca discriminantul să fie poxitiv, adică:

$$\alpha^2 > 4\ \beta\ . \tag{1. 7}$$

In acest caz, se poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= A_1\ e^{p_1 t} + B_1\ e^{p_2 t} \\ i_2 &= A_1\ e^{p_1 t} + B_2\ e^{p_2 t} \end{aligned}\right\} \tag{1. 8}$$

Intereseaxă tensiunea la bornele condensatorului $C_d$:

$$U_2 = \frac{q_2}{C_d} = \frac{1}{C_d}\int i_2\, dt = \frac{1}{C_d}\left[\frac{A_2}{p_1}\, e^{p_1 t} + \frac{B_2}{p_1}\, e^{g_2 t}\right] \tag{1.9}$$

Determinarea constantelor se face pe baza condiţiilor iniţiale:

$$\text{La } t = 0,\ I_2\ (0) = \frac{U_1}{R_a}$$

$$U_2 = 0\ . \tag{1. 10}$$

Rezultă:

$$A_2 = \frac{U_1}{R_a}\ \frac{p_1}{p_1 - p_2}$$

$$B_2 = \frac{U_1}{R_a}\ \frac{p_2}{p_1 - p_2}$$

Se poate scrie, deci:

$$U_1 = \frac{U_1}{R_p C_d}\ \frac{1}{p_1 - p_2}\left[\, e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\,\right] \tag{I.12}$$

Dacă notăm:

$$\frac{U_1}{R_a\ C_d}\ \cdot\ \frac{1}{p_1 - p_2} = U_o \qquad \begin{aligned} p_1 &= -a \\ p_2 &= -b \end{aligned}$$

Se mai poate scrie:

$$U_2 = U_o\ \ (e^{-at} - e^{-bt})$$

## Anexa II

Dacă un corp radioactiv $A$ se decompune în $B$, care la rîndul său trece în $C$ (stabil), avem $f_1$ (t) atomi din $A$. Atunci [4.6]:

$$d f_1 = -\alpha_1\ \ f_1\ (t)\ .\ dt \tag{II.1.}$$

$$f_1 = K_1\ \ e^{-\alpha_1 t} \tag{II.2.}$$

Evaluarea numărului $f_2$ de atomi $B$ la momentul $t$ ne obligă ca la:

$$d f_2 = -\alpha_2\ f_2\ (t)\ dt \tag{II.3}$$

care se referă la un corp $B$ pur să adăugăm atomii care se formează din $A$ :

$$d f_2 + d f_1 = - \alpha_2 f_2 (t)\, dt \qquad \text{sau}$$

$$d f_2 = - d f_1 - \alpha_2 f_2\, dt = (\alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2)\, dt \ ;$$

$$\frac{d f_2}{d t} = \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 = \alpha_1 K_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 f_2 \ ;$$

$$\frac{df_2}{dt} + \alpha_2 f_2 = \alpha_1 K_1 \overset{e=\tau_1}{} t \ . \qquad (II.4)$$

A cărei soluţie este :

$$f_2 = f_{20} + K_2 e^{-\alpha_2 t} \cdot \frac{K_1 \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_1} + K_2 e^{-\alpha_2 t} \qquad (I5)$$

pe de altă parte :

$$K_2 = - \frac{K_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \ , \text{ deoarece } f_2 (o) = 0 \qquad (II.6)$$

deci :

$$f_2 (t) = \frac{K_1 \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[ e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t} \right] \qquad (II.7)$$

## BIBLIOGRAFIE


1. *Avramescu, A.* — Principiile protecţiei contra supratensiunilor atmosferice. Electricitatea 3 (1952) 4—5, 10—17.
2. *Bewley L. V.* — Traveling waves on transmission systems J. Wiley, New-York 1933.
3. *Strigel R.* — Elektrische Stossfestigkeit. Springer, Berlin 1940.
4. *Sirotinski L. I.* — Tehnica tensiunilor înalte. Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad, 1951 şi Ed. Energ. St. Bucureşti 1954.
5. *VDE/0450/1933* — Leitsätze für die Prüfung mit Spannungsstössen.
6. *GOST 1516 — 42* — Tensiuni de încercare pentru aparate de înaltă tensiune. şi Ed. Energ. Stat Bucureşti 1954.
7. *Babicov, M. A.* — Aparate electrice. Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad, 1951
8. *Captov N. A.* — Fenomene electrice în gaze şi vid. Gosenergoizdat Moscova-Leningrad 1950 şi Ed. Tehnică Bucureşti 1955.
9. *Peek, M. F. W.* — La foudre. C. R. Congr. Intern. Electricité, Paris 1932 6, 465—511—522.
10. *Shonland B. F. J.* — Progressive lightning. Proc. roy. Soc. London A. 164 (1938) 132.
11. *Walter, B.* — Uber die Ermittlung der zeitlichen Aufeinanderfolge zusammengehöriger Blitze, sowie über ein bemerkenswertes Beispiel dieser Art Entladungen. Phys. Z. 69 (1918) 273.
12. *Stekolnikov I. S. şi alţii* — Grozazişcita promîşlennâh coorujenii i zdanii. Izd. Akad. Nauc U.R.S.S. Moscova 1951.
13. *Norinder, H.* — Lightning currents and their variation. J. Franklin Inst. 220 (1935) 69.
14. *Binder, L.* — Einige Untersuchungen über den Blitz. Elektrotechn. Z. (ETZ) 49 (1938) 503.
15. *Lewis, W. W.* — The protection of transmission systems against lightning. J. Wiley, New-York 1950.
16. *Fallou, J.* — La forme probable des soutensions induites par les décharges orageuses sur les lignes aériennes. Rev. gén. Électr. 23 (1928) 957.
17. *Răduleţ, R.* — Rechteckige Wanderwellen auf Ubertragungsleitungen Bull. sc. Ec. polytechn. Timişoara 9 (1939) (3—4.
18. *Avramescu, A.* — Efectul pelicular transitoriu. Bul. ştiinţific. Secţ. 3 Acad. R.P.R. 4 (1952) 3—4, 225—239.

19. *Constantinescu E.* — Calculul efectului pelicular şi determinarea stabilităţii termice a conductorilor cilindrici masivi la curenţi de şoc. Bul. ştiinţific. Secţ. 3. Acad. R.P.R. 4 (1952) 3—4, 255 — 270.
20. *Vörste F.* — Die Verformung und Dämpfung von Wanderwellen durch Coronaverluste nach Aufnahmen mit dem Kathodenstrahl-Oszillographen. Diss. T. H. Dresden 1932.
21. *Kostenko, M. E.* — Atmosferniie perenaprajenia i grozozaşcita vîsocovoltnih ustanova. Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad, 1949.
22. *STAS 3999—54* — Aparate de protecţie contra supratensiunilor. Terminologie.
223. *VDE 0675/1939* — Leitsätze für Überspannungsschutzgeräte.
24. *Biermanns J.* — Hochspannung und Hochleistung. C. Hauser, München 1949.
25. *Bellaschi, P. L.* — Ricerca di laboratorio sui fulmini. Elettrotecn 26 (1939) 732—734.
26. *Foitzik R.* — Über künstlich erzeugte stromstarke Stossentladungen bis 300 000 A. VDE — Fachb. 10 (1938) 35.
27. *Marx E.* — Versuche über die Prüfung von Isolatoren mit Spannungsstössen. Elektrotechn. Z. (ETZ) 45 (1924), 652.
28. *Marguerre W.* — Die Berechnung des Stosskreises für eine gegebene Form der Stosspannung. Elektrotechn. Z. (ETZ) 60 (1939), 837.
29. *Edwards A. S. Husbands Perry F. R.* — The developement and design of high voltage impulse generators. Proc. Inst. electr. Engrs 98 (1951) I—111, 155—180.
30. *Angelini A. M.* — Calcolo rapido degli elementi e delle forme d'onda dei generatori di impulsi. Elettrotecn. 28 (1941) ,252.
31. *Höfer R.* — Die konstanten des Stossgenerators für eine gegebene Welle. Arch. Elektrotechn. 32 (1938), 275.
32. *Liechti A.* — Stossgeneratoren. Micafil Nachr. 1939, 21.
33. *Marx E.* — Hochspannungspraktikum. Springer Berlin 1941.
34. *Toepler M.* — Lange Funken, Blitze. Wiss. Z. T. H. Dreden 2 (1952/53 2, 159.
35. *Lewis W. W. Foust C. M.* — Lightning Investigation on Transmission Lines. Transact. A.I.E.E. 49 (1930), 917—928.
36. *Bugsdorff V.* — Cercetarea protecţiei contra descărcărilor atmosferice a unui sistem energetic. Electricestvo 1949, 2.
37. *Binder, L.* — Wanderwellen auf experimenteller Grundlage. Springer, Berlin 1928
38. *Monteith, A. C.* — Line Design Based upon Direct Strokes. Electrical Transmission and Distribution Reference Book. Donnelly, Chicago 1942.
39. *Burgsdorff V.* — Protecţia liniilor electrice de transport împotriva supratensiunilor atmosferice şi protecţia exploatărilor. In „Exploatarea liniilor electrice de transport". Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad 1952.
40. *Gröber H. Erck S.* — Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer, Berlin 1933.
41. *Miheev, M. A.* — Osnovîi teploperedaci. Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad, 1947.
42. *Emde F.* — Tafeln höherer Funktionen. Teubner, Leipzig 1949.
43. *McEachron, K. B.* — Lightning to the Empire State Building. J. Franklin Inst. 27 (1939), 2.
44. *Berger K.* — Recherches suisses sur la foudre. Bull. Asoc. suis. Electr. 37 (1948) 12, 319.
45. *Brasch Lange* — Hochspannungsversuche am Monte — Generoso Z. Phys. 70 (1931), 10.
46. *Brillouin L.* — Mathématiques. P.C.B. Paris, 1947, p. 178.
47. *Ohman G. P.* — Square Wave Differentiating Circuit Analysis. Electronics (1945) 8, 132—134.
48. *Avramescu A.* — Die Wärmewirkung der Schalt— und Stossströme. Elektrotechn. Z. (ETZ) 62 1941) 26, 1—4.
49. *Müller H.* — Blitzströme. Elektrotechn. Z. (ETZ) 57 (1936) 415—417.
50. *Avramescu A.* — Beiträge zur Erwärmungsberechnung elektrischer Leiter. Habil — Diss. T. H. Dresden 1943.
51. *Avramescu A.* — Über die Berechnung der Wärmewirkung von Ausgleick- und Überströmen. Arch. Elektrotechn. 35 (1941) 6, 344-53.
52. *Stănciulescu F.* — Aspectul energetic al descărcărilor electrice prin rezistenţe nelinare. Electrotehnica 2 (1955) 8, 308.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ БОЛН

(Краткое содержание)

После обзора электрических явлений, вызываемых молнией на дини электрорередач, рассматривастся форма импульсных волн рри наблюдении на осцилографе и методы воспроизводства таких волн в лаборатории, Исследуются потом аналитические выражения нормаьных импульсных волн и выводится ряд новых соотношений между параметрами соответствуюших функций.

## LES EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES ONDES DE CHOC

(Résumé)

Après une courte revue des phénomènes électriques qui surviennent sur les lignes de transmission pendant les orages, on discute la forme des ondes de choc oscillographiées et les méthodes de leur reproduction en laboratoire. On étudie les expressions analytiques des ondes de choc normales, en déduisant toute série de nouvelles relations entre les paramètres de ces fonctions.

Ensuite, on indique les différents domaines d'application de ces expressions.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.313.32

# ELEMENTELE FUNDAMENTALE ALE TEORIEI CELOR DOUA REACŢII A MAŞINII SINCRONE

de Ing. V. NEDELCU
Candidat în Ştiinţe Tehnice

## INTRODUCERE

Ecuaţiile fundamentale ale teoriei celor două reacţii cunoscute sub numele de ecuaţile „Park — Gorev" constituie un instrument eficace pentru analiza proceselor tranzitorii în maşina sincronă cu referinţă, precum şi în celelalte maşini electrice.

Aceste ecuaţii au fost publicate pentru prima dată de către R.H. Park [5]. Mai tîrziu A. A. Gorev dă o nouă formă acestor ecuaţii aplicînd o metodă matematică originală, care poate oferi unele avantaje în studierea anumitor probleme. Atît în literatura sovietică, cît şi în cea apuseană ecuaţiile maşinii sincrone date de Park se bucură de o largă răspîndire

Aceste ecuaţii sînt cu atît mai comode, cu cît expresia elementelor operaţionale $x_d\,(p)$, $x_q\,(p)$, $G\,(p)$ este mai compactă. Necesitatea unor expresii cît mai compacte se ridică cu multă acuitate în rezolvarea problemelor maşinilor sincrone cu înfăşurări de amortizare.

Scopul acestei lucrări este de a face o expunere succintă asupra elementelor fundamentale ale teoriei celor două reacţii a maşinii sincrone, luînd în consideraţie materialul documentar din acest domeniu, evitîndu-se unele greşeli, care adesea se întîlnesc în literatură (expresia puterii, cuplului). In această expunere s-au respectat momentele mai principale care se întîlnesc în lucrările lui R.H. Park referitor la ecuaţiile fundamentale, iar elementele operaţionale sînt date în forma expusă de E. I. Kazovski [7].

Pentru deducerea expresiilor operatorilor se foloseşte metoda de mers în gol şi de scurtcircuit care subliniază mai puternic semnificaţia fizică a operatorilor şi reduce calculele matematice. In lucrare se foloseşte sistemul nr. 1 al unităţilor relative. [11], precum şi sistemul reciproc.

## 1. ECUAŢIILE FUNDAMENTALE PARK — GOREV

### 1.1. MAŞINA SINCRONĂ IDEALIZATĂ

Teoria matematică a maşinii sincrone a căpătat o amplă dezvoltare, decînd la baza examinării teoretice a proceselor fizice care se petrec în maşină stă aşa numita «teorie a celor două reacţii».

Punctul de plecare al teoriei celor două reacţii îl constituie «maşina sincronă idea izată».

Particularităţile fundamentale ale maşinii sincrone idealizate în raport cu maşina sincronă reală constau în următoarele:

1. In maşina sincronă idealizată toate înfăşurările statorului sînt dispuse sinusoidal, dealungul întrefierului. Această presupunere este echivalentă presupunerii că fluxul magnetic rezultant în întrefier, condiţionat de curenţii statorici, are o repartiţie sinusoidală, adică în afara armonicei fundamentale în întrefier nu mai apar armonice spaţiale de ordin superior.

In maşinile electrice corect proiectate armonicele de ordin superior nu influenţează în mod practic comportarea acestora deoarece, repartizarea specială a bobinelor pe suprafaţa statorului are de scop reducerea amplitudinii armonicelor spaţiale de ordin superior.

Datorită acestor măsuri constructive, luate pentru distrugerea sau reducerea armonicelor spaţiale ale forţelor magnetomotoare ale înfăşurării statorice practic, între maşina idealizată şi cea reală nu se constată mari deosebiri din punctul de vedere al presupunerii enunţate mai sus.

Astfel armonicile spaţiale influenţează numai fluxul de scăpări al înfăşurării statorice. De asemenea ele măresc pierderile prin curenţi Foucault la suprafaţa polilor, deoarece viteza de rotaţie a acestor armonici faţă de rotor este diferită de viteza acestuia.

Din aceste considerente se cere ca polii rotorului să fie confecţionaţi din tole de oţel şi nu din oţel masiv, ceea ce asigură pierderi minime prin curenţi Foucault.

2. A doua particularitate a maşinii idealizate faţă de maşina reală constă în aceea că, suprafaţa statorului se consideră netedă, adică nu se ia în consideraţie influenţa crestăturilor asupra rezistenţei inductive a circuitelor rotorice în funcţie de poziţia rotorului.

O astfel de presupunere conduce la o eroare neînsemnată în cazul maşinilor cu un mare număr de crestături pe arcul polar.

3. A treia particularitate—neglijarea saturaţiei dealungul întregului circuit magnetic pe care se închid liniile de forţă magnetice ale circuitelor electrice.

Influenţa saturaţiei poate fi luată în consideraţie separat.

Particularităţile maşinii idealizate expuse mai sus uşurează în mod substanţial rezolvarea analitică a problemelor maşinii sincrone, iar confruntarea datelor teoretice cu cele obţinute la încercări arată rezultate satisfăcătoare.

## 1,2. MAŞINA SINCRONĂ CU POLI APARENŢI TRIFAZATĂ, IDEALIZATĂ, SE INLOCUIEŞTE CU O MAŞINĂ BIFAZATA ECHIVALENTĂ, ALE CĂREI INFĂŞURĂRI STATORICE SINT DISPUSE DEALUNGUL AXELOR LONGITUDINALĂ ŞI TRANSVERSALĂ ŞI SE INVIRTESC SOLIDAR CU ROTORUL

Al doilea moment esenţial în teoria modernă a maşinii sincrone cu poli aparenţi îl constituie examinarea proceselor elecromagnetice care au loc în maşină dealungul a două axe de simetrie dintre care una coincide cu axa geometrică a polilor, iar alta cu axa geometrică interpolară.

Axa polară se obișnuește să fie denumită—axă longitudinală—(*d*) iar axa interpolară—axă transversală (*q*) și se notează respectiv cu literele *d*, *q*.

Această metodă de examinare a fenomenelor electomagnetice se numește metoda celor două reacții a mașinii sincrone.

In mașina sincronă autoinductanțele și inductanțele mutuale ale fazelor înfășurării statorului ca și inductanțele mutuale dintre circuitele statorice și rotorice sînt funcții periodice de timp sau de unghiul de rotație al rotorului. (unghiul dintre axa geometrică a unei faze și axa polară).

Din această cauză relațiile fundamentale dintre fluxurile rezultante și curenții care circulă în înfășurări se obțin ca niște funcții neliniare complicate, ceea ce îngreunează destul de mult studiul problemelor.

Autoinductanța unei faze a statorului variază periodic între o valoare maximă—axa polară coincide cu axa geometrică a fazei respective.-și o valoare minimă, care are loc cînd axa geometrică a fazei respective coincide cu axa interpolară.

Avîndu-se în vedere simetria constructivă a rotorului se poate considera că perioada acestei variabile (*L*) în raport cu poziția rotorului este egală cu 180° electrice și deci ea poate fi descompusă în serie Fourier, avînd ca argument unghiuri multiple unghiului 2 θ (fig. 1).

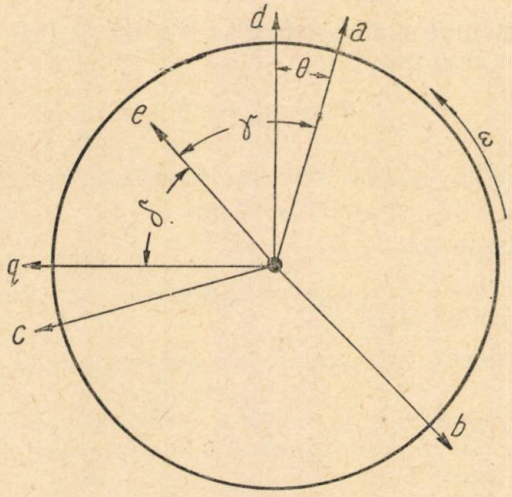



Fig. 1 – Schema mașinei sincrone trifazate

Deoarece autoinductanța nu depinde de semnul unghiului θ, această serie poate să conțină numai termeni pari.

Astfel autoinductanța unei faze statorice poate fi reprezentată:

$$L = L_0 + L_2 \cos 2\theta + L_4 \cos 4\theta + \ldots$$

Inductanțele mutuale dintre fazele statorului pot fi reprezentate într-o formă asemănătoare.

Inductanţele mutuale dintre circuitele statorului şi ale rotorului, dacă se ia in consideraţie presupunerea că numai armonica fundamentală a fluxului rotoric taie înfăşurările fazelor statorului sinusoidal repartizate dealungul întrefierului, se schimbă de asemenea după o lege sinusoidală în funcţie de unghiul $\theta$, iar valoarea maximă a acestor mărimi se obţine în acel moment, cînd axele geometrice ale înfăşurărilor respective coincid.

Prin descompunerea în serie Fouríer aceste funcţii vor conţine numai termeni cosinusoidali, deoarece la o deplasare a rotorului cu unghiul $\pm\theta$, fluxul rezultant care îmbrăţişează o anumită fază va avea aceeaşi valoare şi va conţine numai armonici de ordin impar, fiindcă la o deplasare a rotorului cu unghiul $\theta = \pm\pi$, fluxul rezultant al fazei respective îşi schimbă direcţia.

Astfel pentru inductanţa mutuală dintre circuitele statorului şi rotorului se poate scrie:

$$m = m_1 \cos\theta + m_3 \cos 3\theta + \ldots,.$$

In cazul maşinii sincrone idealizate, prima presupunere (repartizarea sinusoidală a fluxului rezultant în întrefier) este echivalentă următoarelor simplificări:

a) autoinductanţa circuitelor statorice poate fi exprimată prin următoarea expresie:

$$L = L_0 + L_2 \cos 2\theta;$$

b) inductanţa mutuală dintre o fază a statorului şi orice circuit rotoric poate fi exprimată:

$$m = m_1 \cos\theta.$$

Să ne imaginăm maşina sincronă idealizată astfel cum este reprezentată în fig. 1.

Dacă se notează prin:

$i_a$, $i_b$, $i_c$ — valorile instantanee, exprimate în sistemul de unităţi relative, ale curenţilor statorici;

$e_a$, $e_b$, $e_c$ — valorile instantanee ale tensiunilor la bornele fazelor $a$, $b$, $c$, în $u.\,r$ (unităţi relative);

$e_{fd}$ — tensiunea la bornele înfăşurării de excitaţie în $u.\,r$;

$\psi_a$, $\psi_b$, $\psi_c$ — valorile instantanee ale fluxurilor rezultante în fazele $a.\ b,\ c$;

$t$ — timpul exprimat în radiani electrici;

$\psi_{fd}$ — valoarea instantanee a fluxului rezultant în înfăşurarea de excitaţie. în $u.\ r$;

$\psi_{1d}$ — valoarea instantanee a fluxului rezultant în înfăşurarea de amortizare plasată pe axa longitudinală $(d)$, în $u.\ r$;

$\psi_{1q}$ — valoarea instantanee a fluxului rezultant în înfăşurarea de amortizare, plasată pe axa transversală în $u.\,r$;

$r, r_f, r_{1d}. r_{1q}.$ — rezistenţele statorului, înfăşurării de excitaţie şi ale înfăşurărilor de amortizare exprimate în unităţi relative,

atunci pentru circuitele electrice ale mașinii se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} e_a &= p\psi_a - ri_a \\ e_b &= p\psi_b - ri_b \\ e_c &= p\psi_c - ri_c \\ e_{fd} &= p\psi_{fd} + r_{fd}\, i_{fd} \\ 0 &= p\psi_{1d} + r_{1d}\, i_{1d} \\ 0 &= p\psi_{1q} + r_{1q}\, i_{1q} \end{aligned} \qquad (1)$$

unde : $p$ — operatorul Heaveside.

Ecuațiile fluxurilor magnetice rezultante ale tuturor înfășurărilor în funcție de valorile instantanee ale curenților care circulă în înfășurările respective și de parametrii geometrici ai mașinii se pot determina în modul următor :

*a*) Deoarece în mașina idealizată permeabilitatea magnetică rămîne totdeauna constantă, influența curenților circuitelor rotorice asupra fluxurilor rezultante în fazele statorului i poate fi examinată in mod separat ;

*b*) In mașinile trifazate, cînd în fazele statorului circulă curenți sinusoidali defazați unul față de altul cu unghiul $2\pi/3$, se creează o forță magnetomotoare a cărei amplitudine este de 3/2 ori mai mare, decît amplitudinea f.m.m. pulsatorii, creată de curentul dintr-o fază și care se învîrte în spațiu cu viteza unghiulară egală cu pulsația curenților care circulă în fazele respective

Această f.m.m. creează unda de inducție care conține armonica fundamentală, cît și armonici de ordin superior. In cazul mașinii idealizate armonicile de ordin superior lipsesc astfel că se poate lua în considerație numai armonica fundamentală a fluxulu rezultant.

Forța magnetomotoare rezultantă poate fi determinată în orice moment, dacă sînt cunoscute proiecțiile acesteia pe două axe decalate cu un unghi de 90°.

Particularitatea simetriei constructive a mașinii sincrone cu poli aparenți impune ca aceste axe să coincidă cu axa longitudinală și transversală.

Din cele spuse mai sus rezultă, că fluxul rezultant al oricărei faze a statorului poate fi privit ca suma fluxurilor de scăpări și fluxurilor mutuale, create de curenții tuturor fazelor și care sînt cunoscute prin proiecțiile lor pe axele $d$, $q$.

In metoda expusă mai sus, rezidă toată comoditatea și eficacitatea aplicării teoriei celor două reacții în cazul mașinii sincrone cu poli aparenți.

Trebuie subliniat faptul, că raționamentele de mai sus sînt valabile atît pentru cazul cînd în sistem nu sînt componente de succesiune nulă ($i_a + i_b + i_c = 0$), cît și pentru cazul, cînd aceste componente există.

Acest lucru poate fi explicat prin aceea, că sistemul de curenți de succesiune nulă nu creează f.m.m. învîrtitoare, ci numai influențează asupra fluxurilor de scăpări ale înfășurărilor.

De aceea influența lor poate fi considerată aparte.

Pentru obținerea expresiilor analitice trebuie adoptate următoarele convenții :

1) direcția pozitivă a curenților statorici se consideră direcția acestor curenți în regim de generator ;

2) axa de origină a unghiurilor se consideră axa geometrică a fazei a ;

3) axa transversală este decalată cu unghiul $\pi/2$ față de axa longitudinală în sensul de rotație ;

4) f.m.m. nominală este considerată f.m.m. creată de curenții nominali de succesiune directă.

In baza celor spuse mai sus, pentru componentele longitudinală și transversală a f.m.m. rezultante se pot scrie urmotoarele ecuații :

$$A_d = -2/3\ [i_a \cos\theta + i_b \cos(\theta - 120) + i_c \cos(\theta + 120)]$$
$$A_q = -2/3\ [i_a \cos(\theta + 90) + i_b \cos(\theta + 90 - 120) + i_c \cos(\theta + 90 + 120)] \quad (2)$$

sau

$$A_q = 2/3\ [i_a \sin\theta + i_b \sin(\theta - 120) + i_c \sin(\theta + 120)],$$

Unde $\theta$ este unghiul mișcării absolute (unghiul dintre axa $a$ și axa $d$).

Factorul 2/3 se introduce pentru că mărimile $A_d$ , $A_q$ să se obțină unitare, cînd curenții $i_a$ , $i_b$ , $i_c$ au valori unitare.

Astfel fluxurile rezultante create de sistemul trifazat al curenților $i_a$ , $i_b$ , $i_c$ pe axele $d$, $q$ se exprimă prin ecuațiile următoare :

$$\psi_{ad} = x_{ad} A_d$$
$$\psi_{aq} = x_{aq} A_q \quad (3)$$

unde :

$x_{ad}$, $x_{aq}$ — coeficienții de proporționalitate între $\psi_{ad}$ și $\psi_{aq}$ și f. m. m. corespunzătoare.

Acum se pot scrie ușor ecuațiile fluxurilor rezultante în fazele statorului. In orice fază fluxul rezultant se compune din fluxul de scăpări și din fluxul util.

Fluxul de scăpări la rîndul său se compune din fluxul de scăpări propriu al fazei respective și din fluxul de scăpări mutual dintre faza dată și celelalte două faze.

Pentru a obține fluxul de inducție mutuală rezultant în orice fază, trebuie însumate proiecțiile componentelor $\psi_{ad}$, $\psi_{aq}$, pe axa fazei respective. In acest fel expresia fluxului rezultant în faza $a$, determinat de curenții statorici, se poate scrie :

$$\psi_{as} = \psi_\sigma + \psi_{\mu s} = -x_e i_a + x_{Ml}(i_a + i_b) - \psi_{ad} \cos\theta - \psi_{aq} \sin\theta, \quad (4)$$

unde :

$\psi_{as}$ — fluxul rezultant al fazei a ($e_{ad} = o$) ;

$\psi_\sigma$ — fluxul de scăpări ;

$\psi_{\mu s}$ — fluxul inducției mutuale.

Deschizînd parantezele și transformînd produsele trigonometrice se obține :

$$\psi_{as} = -x_e\, i_a + x_{Ml}\,(i_b + i_c) - (x_{ad} + x_{aq})/3\ [i_a - \\ -(i_b + i_c)/2] - (x_{ad} - x_{aq})/3\ .\ [i_a \cos 2\theta + \\ + i_b \cos(2\theta - 120) + i_c \cos(2\theta + 120)] \tag{5}$$

unde :

$x_l$ — reactanța de scăpări a fazei $a$ ;

$x_{Ml}$ — reactanța de scăpări determinată de inducția mutuală dintre faza $a$ și fazele $b$, $c$.

Cînd statorul este încărcat simetric și curenții au valorile nominale. se poate scrie :

$$i_a = \cos t$$
$$i_b = \cos(t - 120)$$
$$i_c = \cos(t + 120)$$
$$-i_a = i_b + i_c$$

deoarece în sistemul de unități relative $\omega = 1$.

După aceasta expresia $\psi_{as}$ se poate scrie :

$$\psi_{as} = -(x_l + x_{Ml})\cos t - (x_{ad} + x_{aq})/2 \cdot \cos t - (x_{ad} - x_{aq})/2 \cdot \cos(t + 2\theta) \tag{6}$$

dacă se iau în considerație următoarele relații :

$$i_a - (i_b + i_c)/2 = 3/2 \cos t$$

$$\cos t \cos 2\theta + \cos(t - 120)\cos(2\theta - 120) + \cos(t + 120)\cos(2\theta + 120) = \\ = 3/2 \cos(t + 2\theta).$$

Cînd $\theta = 0$, axa fazei $a$ coincide cu axa logitudinală. Inlocuind în (6) această valoare, se obține pentru $\psi_{as}$ :

$$\psi_{as} = -(x_l + x_{Ml} + x_{ad})\cos t = -x_d \cos t$$

unde :

$x_d$ — reactanța sincronă longitudinală a mașinii.

Cînd $\theta = \pi/2$, axa transversală coincide cu axa fazei $a$. Pentru această valoare a unghiului $\theta$, se obține pentru $\psi_{as}$ următoarea expresie :

$$\psi_{as} = -(x_l + x_{Ml} + x_{aq})\cos t = -x_q \cos t$$

unde :

$x_q$ — reactanța sincronă transversală a mașinii.

Dacă prin înfășurările statorului circulă numai curenți homopolari, adică :

$$i_a = i_b = i_c ,$$

atunci prin înlocuirea acestor curenți în ecuația lui $\psi_{as}$, avem :

$$\psi_{as} = -(x_l - 2x_{Ml})\cos t = -x_0 \cos t \tag{9}$$

unde :

$x_0$ — reactanţa homopolară a maşinii.

Din ecuaţiile (7), (8), (9) se deduc următoarele egalităţi :

$$x_d = x_l + x_{Ml} + x_{ad}$$
$$x_q = x_l + x_{Ml} + x_{aq}$$
$$x_o = x_l - 2\,x_{Ml}$$

In baza acestor egalităţi pentru suma şi diferenţa reactanţelor longitudinală şi transversală, se găsesc următoarele valori :

$$x_{ad} - x_{aq} = x_d - x_q$$
$$x_{ad} + x_{aq} = x_d + x_q - 2\,(x_l + x_{Ml})$$

Prin înlocuirea în (5) a acestor valori şi după efectuarea unor transformări algebrice, se obţine pentru $\psi_{as}$ următoarea relaţie :

$$\psi_{as} = -\frac{x_o}{3}\,[i_a + i_b + i_c] - \frac{x_d + x_q}{3}\cdot\left[i_a - \frac{i_b + i_c}{3}\right] -$$
$$- \frac{x_d - x_q}{3}\left[i_a \cos 2\,\theta + i_b \cos (2\,\theta - 120) + i_c \cos (2\,\theta + 120)\right] \quad (10)$$

Fluxul în faza $a$, determinat de curentul de excitaţie pe axa $d$, poate fi reprezentat prin următoarea expresie :

$$\psi_{ar} = x_{ad}\, I_f \cos\theta \quad (11)$$

sau

$$\psi_{ar} = i_f \cos\theta \quad (12)$$

dacă se ia drept curent de bază, curentul nominal de excitatie la funcţionarea în gol.

Astfel în cazul general pentru fluxul rezultant al fazei $a$, se poate scrie următoarea relaţie :

$$\psi_a = \psi_{ar} + \psi_{as} = i_f \cos\theta - x_o/3\cdot[i_a + i_b + i_c] - (x_d + x_q)/3\cdot$$
$$\cdot[i_a - (i_b + i_c)/2] - (x_d - x_q)/3\cdot[i_a \cos 2\,\theta + i_b \cos (2\,\theta - 120) +$$
$$+ i_c \cos (2\,\theta + 120)] \quad (13)$$

In mod analog, pentru fluxurile rezultante ale fazelor $b$, $c$,

$$\psi_b = i_f \cos(\theta - 120) + x_0/3\cdot[i_a + i_b + i_c] -$$
$$- (x_d + x_q)/3\cdot[i_b - (i_c + i_a)/2] - \quad (14)$$
$$\psi_c = i_f \cos(\theta + 120) - x_0/3\cdot[i_a + i_b + i_c] -$$
$$(x_d + x_q)/3\cdot[i_c + (i_a + i_b)/2] -$$
$$- (x_d - x_q)/3\cdot[i_a \cos(2\,\theta + 120) + \quad (15)$$
$$i_b \cos\theta + i_c \cos(2\,\theta - 130)]$$

Din formulele (13), (14), (15), se vede că expresia fluxurilor rezultante, care îmbrățișează fazele statorului, este o funcție complicată de curenții care circulă prin înfășurările mașinii și de unghiul mișcării absolute.

Caracterul neliniar al acestei funcții îngreunează extrem de mult rezolvarea ecuațiilor tensiunilor circuitelor mașinii în forma clasică.

In scopul ușurării analizei teoretice a regimurilor staționare, cît și a regimurilor tranzitorii, care au loc în mașinile electrice, atît în cele cu poli aparenți cît și în cel cu poli înecați, ecuațiile diferențiale date în forma clasică, se transformă cu ajutorul transformărilor liniare, în ecuații cu coeficienți constanți.

Transformarea matematică a ecuațiilor diferențiale cu coeficienți periodici în ecuații cu coeficienți constanți, se reduce la substituirea variabilelor în ecuațiile respective.

Drept variabile noi se iau proiecțiile variabilelor anterioare pe axele de coordonate transformate; de aceea în sistemul noilor coordonate, în locul legilor de variație a variabilelor fundamentale, se examinează legile de schimbare a proiecțiilor acestor mărimi pe axele de coordonate. Axele de coordonate se aleg în așa fel, încît legile de variație a proiecțiilor mărimilor de studiat să fie cît se poate de simple. Transformarea coordonatelor este echivalentă substituirii tuturor circuitelor electrice sau a unor părți ale acestora prin conture transformate care se rotesc cu aceeași viteză ca și viteza axelor de coordonate.

La efectuarea transformării axelor de coordonate, este necesar să se respecte următoarele principii:

1. In sistemul de coordonate transformat, cît și în sistemul de coordonate inițial, puterea mașinii electrice și cuplul electromagnetic sînt invariante,

2. Este necesar de a se alege noile coordonate de așa manieră, încît înfășurările transformate ale statorului să fie în repaos față de înfășurările transformate ale rotorului, iar conductanța magnetică pe drumul de închidere a liniilor magnetice a circuitelor transformate să fie constantă.

Primul principiu va fi respectat dacă vectorii fluxurilor rezultante, curenților și tensiunilor rămîn neschimbați în ambele sisteme de coordonate. In acest caz, este necesar ca toate mărimile să fie privite atît în sistemul inițial, cît și în sistemul transformat, ca proiecții ale mărimilor rezultante pe axele de coordonate ale sistemului respectiv (cu condiția ca $i_a + i_b + i_c = 0$).

In cazul mașinii sincrone cu poli aparenți, foarte adesea pentru rezolvarea problemelor teoretice se aplică sistemul de coordonate, care se învîrtește în spațiu cu viteza de rotație a rotorului.

In acest sistem de coordonate circuite rotorice rămîn neschimbate, iar circuitele statorului se reduc la sistemul de coordonate, care se învîrtește solidar cu rotorul.

In afară de acest sistem se mai folosesc și următoarele sisteme:

1. Sistemul de coordonate legat solidar cu statorul.

Intr-un asemenea sistem de coordonate,circuitele statorului rămîn neschimbate, iar circuitele rotorului se reduc la sistemul de coordonate ale statorului.

2. Sistemul de coordonate care se învîrteşte în spaţiu cu viteză sincronă. In acest sistem se transformă şi circuitele statorului şi circuitele rotorului.

Ultimul sistem de coordonate este mai comod de aplicat la examinarea problemelor regimului staţionar de funcţionare a maşinii, deoarece în acest caz vectorii curenţilor şi tensiunilor sînt mărimi constante.

Referitor la celelalte sisteme de coordonate trebuie subliniat faptul că aplicarea unuia sau altuia se explică numai prin preferinţa cercetătorilor faţă de un anumit sistem, deoarece în cazul aplicaţiilor practice nu se relevă nici un avantaj deosebit al unui sistem faţă de celălalt.

In lucrarea de faţă se aplică sistemul de coordonate solidar cu rotorul.

### 1.3. ECUAŢIILE DE TRECERE LA SISTEMUL DE COORDONATE d, q, 0 (TRANSFORMAREA BLONDEL).

Trecerea de la variabilele de fază la noile variabile în sistemul de coordonate d, q, 0, se realizează cu ajutorul următoarelor ecuaţii:

$$\begin{aligned} i_o &= 1/3 \cdot [i_a + i_b + i_c] \\ i_d &= 2/3 \cdot [i_a \cos\theta + i_b \cos(\theta - 120) + i_c \cos(\theta + 120)] \\ i_q &= 2/3 \cdot [i_a \sin\theta + i_b \sin(\theta - 120) + i_c \sin(\theta + 120)] \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \psi_d &= 2/3 \cdot [\psi_a \cos\theta + \psi_b \cos(\theta - 120) + \psi_c \cos(\theta + 120)] \\ \psi_q &= 2/3 \cdot [\psi_a \sin\theta + \psi_b \sin(\theta - 120) + \psi_c \sin(\theta + 120)] \\ \psi_o &= 1/3 \cdot [\psi_a + \psi_b + \psi_c [ \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} e_d &= 2/3 \cdot [e_a \cos\theta + e_b \cos(\theta - 120) + e_c \cos(\theta + 120)] \\ e_q &= 2/3 \cdot [e_a \sin\theta + e_b \sin(\theta - 120) + e_c \sin(\theta + 120)] \\ e_o &= 1/3 \cdot [e_a + e_b + e_c] \end{aligned} \tag{18}$$

Privind ecuaţiile transformării liniare (16), (17), (18) ca un sistem de ecuaţii în raport cu necunoscutele de indici $a$, $b$, $c$, se găseşte că determinantul acestui sistem este identic, adică independent de unghiul $\theta$, egal cu $(2/3) \times \sqrt{3}$, ceea ce înseamnă că totdeauna este diferit de zero. De aceea totdeauna se pot găsi mărimi de indici $d$, $q$. $0$ în mod unic determinat, avînd mărimile de indici $a$, $b$, $c$,

Dacă se are în vedere ecuaţia (1), atunci sistemul de ecuaţii (18) se poate scrie:

$$\begin{aligned} e_d &= 2/3 \cdot [\cos\theta\, p\,\psi_a + \cos(\theta - 120)\, p\,\psi_b + \cos(\theta + 120)\, p\,\psi_c] - ri_d \\ e_q &= 2/3 \cdot [\sin\theta\, p\,\psi_a + \sin(\theta - 120)\, p\,\psi_b + \sin(\theta - 120)\, p\,\psi_c] - ri_q \\ e_o &= p\,\psi_o - ri_o \end{aligned} \tag{19}$$

Diferenţiind expresiile $\psi_d$, $\psi_q$, (17) şi luindu-se în consideraţie (19), $p\psi_d$, $p\psi_q$ pot fi scrise astfel:

$$p\psi_d = e_d + ri_d + \psi_q\, p\,\theta$$

$$p\psi_q = e_q + ri_q - \psi_d\, p\,\theta$$

de unde:

$$e_d = p\psi_d - \psi_q\ p\ \theta - ri_d$$

$$e_q = p\psi_q + \psi_d\ p\ \theta - ri_q$$

$$e_o = p\psi_o - ri_o$$

## 1.4—ECUAȚIILE FLUXURILOR REZULTANTE PE AXELE *d*, *q*

Expresia fluxurilor rezultante după axele *d*, *q*, se obține prin înlocuirea ecuațiilor (13), (14), (15) în ecuația (17).

Ecuațiile fluxurilor conțin patru componente. Mai jos, vom examina în ce se transformă fiecare componentă în noul sistem de coordonate *d*, *q*, *0*. Astfel:

$$\psi_{d1} = 2/3 \cdot [i_{fd} \cos\theta \cos\theta + i_{fd} \cos(\theta - 120) \cos(\theta - 120) +$$

$$i_{fd} \cos(\theta + 120) \cos(\theta + 120)] = i_{fd} \qquad (21)$$

După cum se vede din ecuația (21), componenta fluxului rezultant după axa longitudinală determinată de curentul de excitație în condiția, că drept curent de bază pentru curentul de excitație se adoptă acel curent, care este necesar pentru a induce la mersul în gol în stator tensiunea de bază, este egal cu curentul de excitație exprimat în unități relative.

In mod asemănător, pentru componenta fluxului rezultant pe axa longitudinală, condiționată de sistemul de curenți de succesiune nulă, se obține:

$$\Psi_{d2} = -2/3 \cdot x_o/3 \cdot [i_a + i_b + i_c][\cos\theta + \cos(\theta - 120) +$$

$$+ \cos(\theta + 120)] = o \qquad (22)$$

deoarece:

$$\cos\theta + \cos(\theta - 120) + \cos(\theta + 120) = o$$

De aci se vede că sistemul de curenți de succesiune nulă nu influențează fluxul rezultant longitudinal.

$$\Psi_{d3} = -2/3 \cdot [x_d + x_q]/3 \cdot 3/2 \cdot [i_a \cos\theta + i_b \cos(\theta + 120) +$$

$$+ i_c \cos(\theta + 120) = -(x_d + x_q)/2 \cdot i_d. \qquad (23)$$

In mod analog pentru $\Psi_{d4}$ se obține, avîndu-se în vedere următoarele relații trigonometrice:

$$\cos\theta \cos 20 + \cos(\theta - 120) \cos(2\theta - 120) +$$

$$+ \cos(\theta + 120) \cos(2\theta + 120) = 3/2 \cos\theta$$

$$\cos(2\theta - 120) + \cos(2\theta + 120) \cos(\theta - 120) +$$

$$+ \cos 2\theta \cos(\theta + 120) = 3/2 \cos(\theta - 120)$$

$$\cos(2\theta + 120) + \cos 2\theta \cos(\theta - 120) +$$

$$+ \cos(2\theta - 120) \cos(\theta + 120) = 3/2 \cos(\theta + 120) \qquad (24)$$

expresia:

$$\Psi_{d4} = -(x_d - x_q)/2 \cdot i_d \tag{25}$$

Expresia generală pentru $\Psi_d$ se obține prin însumarea tuturor componentelor.

Astfel:

$$\psi_d = i_{fd} - (x_d - x_q)/2 \cdot i_d - (x_d - x_q)/2 \cdot i_d =$$
$$= i_{fd} - x_d\, i_d$$

In sistemul unităților relative $i_{fd}$ poate fi transcris:

$$i_{fd} = \frac{x_{ad}}{r_{fd}} E_f = E_d \tag{27}$$

unde:

$E_f$ — tensiunea înfășurării de excitație;

$E_d$ — tensiunea, indusă de curentul de excitație în stator exprimată în unități relative.

Deci expresia $\psi_d$ poate fi scrisă în funcție de $E_f$ în forma următoare:

$$\psi_d = \frac{x_{ad}}{r_{fd}} E_f - x_d\, i_d \tag{28}$$

După efectuarea tuturor transformărilor pentru $\psi_q$ se găsește următoarea expresie:

$$\psi_q = -x_q\, i_q \cdot \tag{29}$$

In regim tranzitoriu, aspectul exterior al expresiilor (28), 29) pentru $\psi_d$, $\psi_q$ se păstrează ca și în regim staționar, dar în locul mărimilor $x_{ad}/r_{fd}$ și $x_q$, $x_d$ apar conductanța operațională și reactanțele operaționale, astfel că aceste relații se pot scrie într-o nouă formă:

$$\psi_d = G(p)\, E_f - x_d(p)\, i_d \tag{30}$$

$$\psi_q = -x_q(p)\, i_q \tag{31}$$

unde:

$G(p)$ — conductanța operațională a mașinii sincrone;

$x_d(p)$ — reactanța operațională longitudinală;

$x_q(p)$ — reactanța operațională transversală.

Operatorii mașinii sincrone cuprinși în formulele fluxului rezultant exprimă interdependența complicată care se creează între circuitele mașinii în timpul regimurilor tranzitorii din cauza fenomenelor de inducție.

Introducerea acestor elemente operaționale, ușurează extrem de mult rezolvarea pzoblemelor regimurilor tranzitorii, deoarece în acest fel se elimină din ecuațiile diferențiale toate necunoscutele circuitelor rotorice, permițînd examinarea proceselor tranzitorii din partea stato-

rului cu luarea în considerație a tuturor celorlalte circuite, ceea ce reprezintă o problemă de importanță primordială în asemenea cazuri.

(Expresiile operatorilor mașinii sincrone se dau în capitolul următor).

Dacă se cunosc valorile mărimilor care interesează pe axele $d,q$ și cele homopolare, atunci mărimile de fază (indicii $a$, $b$, $c$) se pot găsi cu ajutorul unor relații identice relațiilor (16), (17) și (18).

Pentru curenți și tensiuni se obțin următoarele relații, după ce ambele părți ale relațiilor (16), (17) și (18) se înmulțesc: $i_d$ respectiv

cu $\cos\theta$, $\cos(\theta-120)$, $\cos(\theta+120)$, $i_q$ —

— cu $\sin\theta$. $\sin(\theta-120)$, $\sin(\theta+120)$, și se adună:

$$\begin{aligned} i_a &= i_d\cos\theta - i_q\sin\theta + i_o \\ i_b &= i_d\cos(\theta-120) - i_q\sin(\theta-120) + i_o \\ i_c &= i_a\cos(\theta+120) - i_q\sin(\theta+120) + i_o \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} e_a &= e_d\cos\theta - e_q\sin\theta + e_o \\ e_b &= e_d\cos(\theta-120) - e_q\sin(\theta+120) + e_o \\ e_c &= e_d\cos(\theta+120) - e_q\sin(\theta+120) + e_o \end{aligned} \tag{33}$$

## 1.5 – EXPRESIA PUTERII

Puterea dată în rețea de generatorul sincron este egală cu suma puterilor date de cele trei faze.

In sistemul de unități relative, ca putere de bază se alege puterea nominală a generatorului. In cazul acesta, dacă prin fazele statorului circulă curenți unitari la tensiuni unitare, puterea trebuie să fie unitară.

Din aceste considerații în ecuația puterii, exprimată în funcție de mărimile de fază, se introduce coeficientul 2/3.

Astfel:

$$p = 2/3\,(e_a\,i_a + e_b\,i_b + e_c\,i_c) \tag{34}$$

Nu este greu de verificat ca atunci cînd:

$$\begin{aligned} e_a &= \cos t \quad ; \quad i_a = \cos(t-\varphi) \\ e_b &= \cos(t+120)\,; \quad i_b = \cos(t-\varphi-120) \\ e_c &= \cos(t+120)\,; \quad i_c = \cos(t-\varphi+120) \end{aligned}$$

Puterea generatorului este egală cu puterea de bază, adică este unitară.

Dacă în ecuația (34), în locul mărimilor de fază se pun mărimile transfosmate (32,33), atunci puterea mașinii va avea următoarea expresie:

$$p = e_d\,i_d + e_q\,i_q + 2\,e_o\,i_o \tag{35}$$

Din ecuația (35) se vede, că puterea cedată de generator rețelei în funcție de mărimile dispuse după axele $d$, $q$ și de cele de succesiune nulă reprezintă suma puterilor generate în axa longitudinală și transversală și a puterii, determinată de mărimile de succesiune nulă luată de două ori.

## 1.6—CUPLUL ELECTROMAGNETIC AL MAȘINII

Expresia generală a cuplului electromagnetic, care îacționează asupra statorului mașinii, atît în regim tranzitoriu cît și n regim staționar, se poate determina în două moduri ;

1) plecîndu-se de la ecuația puterii instantanee cedată de generator în rețea prin intermediul întrefierului ;

2) plecîndu-se de la expresia forțelor electromagnetice, care acționează asupra conductorilor statorului.

Primul mijloc pentru determinarea expresiei cuplului este cel mai comod.

Pentru a se înțelege natura cuplului electromagnetic, trebuie subliniat următorul fapt :

Cuplul electromagnetic al oricărei mașini electrice este legat numai de puterea mecanică, care se transmite prin întrefier. In timpul funcționării mașinii în regim tranzitoriu, puterea totală cedată de mașină în rețea este egală cu puterea mecanică transmisă prin întrefierul mașinii, plus puterea condiționată de variația în unitate de timp a energiei electromagnetice acumulată în înfășurările mașinii, minus pierderile electrice care au loc în fazele statorului.

Dacă în ecuația puterii (25) se înlocuiesc $e_d$ , $e_q$ , $e_o$ cu relațiile (20), atunci în funcție de fluxurile rezultante și de curenții pe axele $d$, $q$ și cele de succesiune nulă, se găsește pentru putere următoarea expresie :

$$p = [\psi_d i_q - \psi_q i_d]\, p\theta + p\,[\psi_d i_d + \psi_q i_q + 2\psi_o i_o] - \\ - r\,[i_d^2 + i_q^2 + 2 i_o^2]. \qquad (36)$$

Primul membru reprezintă puterea mecanică transmisă prin întrefier, al doilea—puterea care se naște din variația în unitate de timp a energiei cîmpurilor electromagnetice și al treilea — pierderile electrice în stator.

După cum s-a stabilit mai sus, cuplul electromagnetic este condiționat numai de puterea transmisă prin intermediul întrefierului.

Prin urmare, se poate scrie egalitatea :

$$Mp\theta = p_{mec} + r\,[i_d^2 + i_q^2 + 2 i_o^2] = [\psi_d i_q - \psi_q i_d]\, p\theta - r\,[i_d^2 + i_q^2 + 2 i_o^2] + \\ + r[i_d^2 + i_q^2 + 2 i_o^2] - \qquad (37)$$

de unde :

$$M = \psi_d i_q - \psi_q i_d \qquad (38)$$

sau :

$$\bar{M} = [\bar{\psi} \times \bar{i}]$$

unde :

$$\bar{\psi} = \psi_d \bar{d} + \psi_q \bar{q}$$

$$\bar{i} = i_d \bar{d} + i_q \bar{q}$$

Din ecuația (33) rezultă, că cuplul electromagnetic în orice regim de funcționare a mașinii depinde numai de valorile instantanee ale curenților și fluxurilor.

Acest lucru permite să se deducă formula de mai sus, plecîndu-se de la orice caz particular de funcționare a mașinii, cînd se pot presupune deci condiții arbitrare de variații ale acestor mărimi.

In timpul regimurilor tranzitorii, curenții $i_d$ , $i_q$ variază după legi mai complicate decît în regimuri staționare și deci, aceasta se reflectă asupra variației cuplului electromagnetic în timp.

In funcție de valorile instantanee ale curenților pe cele două axe $d$, $q$ în stator și rotor, cuplul electromagnetic poate fi exprimat prin următoarea ecuație:

$$M = I_d\, i_q - I_q\, i_d - i_d\, i_q\, (x_d - x_q) \qquad (38'')$$

unde:

$I_d$ , $I_q$ — valorile instantanee ale curenților rotorici pe axele $d$, $q$ exprimate în unități relative (raportate la curentul nominal de excitație la mersul în gol).

$i_d$ , $i_q$ — curenții statorici după axele $d$, $q$ exprimați în unități relative.

Formula (38'') coincide complet cu formula (38) dacă se au în vedere expresiile operaționale ale curenților. $I_d$ , $I_q$:

$$I_d = G\,(p)\, E_f + [x_d - x_d\,(p)]\, i_d \qquad (39)$$

$$I_q = [x_q - x_q\,(p)]\; i_q \qquad (40)$$

Dacă curenții $i_d$ , $i_q$ , $I_d$ , $I_q$ se cunosc ca funcții de timp, cel mai indicat drum pentru calculul cuplului electromagnetic este aplicarea formulei (38'').

In cazul cînd este mai comod să se determine $i_d$ , $i_q$ , $\psi_d$ , $\psi_q$ , pentru calculul cuplului electromagnetic, se poate folosi formula (38).

In concluzie, este necesar de subliniat că ecuațiile (30, (31), (35) și (38) se numesc ecuațiile fundamentale ale teoriei celor două reacții ale mașinii sincrone sau ecuațiile PARK-GOREV.

Dacă viteza rotorului nu este constantă, la aceste ecuații se mai adaugă încă ecuația echilibrului dinamic a rotorului, care poate fi scrisă astfel:

$$Hp^2\, \delta + M = T \qquad (41)$$

unde:

$H$ — constanta de inerție exprimată în radiani electrici a maselor rotitoare;

$p^2$ — operatorul HEAVESIDE;

$\delta$ — unghiul de funcționare a mașinii:

$T$ — cuplul exterior aplicat la axul mașinii;

$M$ — cuplul electromagnetic.

Astfel, ecuațiile de mai sus caracterizează comportarea mașinii sincrone, în orice regim de funcționare și rezolvarea diferitelor probleme, privind funcționarea mașinii în regim staționar sau tranzitoriu se reduce la rezolvarea acestor ecuații diferențiale.

In cazul mașinii care funcționează paralel cu un puternic sistem prin intermediul unei linii de transmisie, pentru rezolvarea problemelor se pot aplica aceleași ecuații în ipoteza că linia de transmisie de energie electrică se consideră ca o impedanță conectată în serie cu statorul mașinii.

## 2. OPERATORII MAŞINII SINCRONE

### 2.1—CONSIDERAŢII GENERALE

Interdependenţa complexă electromagnetică dintre înfăşurările maşinii sincrone condiţionează apariţia diverselor componente tranzitorii în aceste înfăşurări în timpul regimurilor tranzitorii de funcţionare a maşinii.

In perioada de amortizare a acestor curenţi, conductanţa magnetică pe circuitul de închidere a liniilor de forţă magnetice se schimbă (3), ceea ce înseamnă că se produce o schimbare atît a reactanţelor proprii, cît şi a reactanţelor mutuale ale înfăşurărilor.

Intrucît atît din punct de vedere practic cît şi teoretic majoritatea problemelor legate de comportarea maşinii, privită de la bornele statorului, prezintă un interes de prim ordin (maşina este legată cu sistemul energetic prin bornele statorului), parametrii caracteristici ai maşinii sînt consideraţi ca perametri statorici.

Pe de altă parte, analiza matematică a funcţionării maşinii în diverse regimuri, conduce la rezolarea unui sistem de $n$ ecuaţii cu $n$ necunoscute (în ipoteza că maşina are $n$ circuite electrice, fiecare ecuaţie exprimînd echilibrul electromagnetic al circuitului respectiv); acest sistem de ecuaţii se poate simplifica dacă se elimină mărimile rotorice. Astfel numărul ecuaţiilor se micşorează şi transcrierea relaţiilor dintre mărimile care în primul rînd interesează, devine mai compactă.

O astfel de transcriere se obţine prin introducerea operatorilor (reactanţelor şi conductanţelor operaţionale) maşinii sincrone.

Din acest punct de vedere circuitele rotorice sînt privite ca nişte şunturi magnetice, care schimbă conductanţa circuitului magnetic pe care se închid liniile de forţă ale f. m. m., ale statorului.

Aplicarea unor asemenea operatori, se întîlneşte pentru prima dată în lucrarea lui Park (5), în care se dă teoria generalizată a celor două reacţii a maşinii sincrone.

In anul 1932 apare articolul (6), după care aplicarea elementelor operaţionale devine foarte răspîndită.

In literatura tehnică publicată în limba rusă, reactanţele operaţionale sînt examinate în articolul (1).

O expunere originală şi completă îi aparţine lui E. I. Kazovski, a cărui lucrare a fost publicată în revista „Electrosila". (7,8).

Expresiile reactanţelor operaţionale, în forma în care au fost date de Kazovschi, sînt foarte comode pentru rezolvarea problemelor complicate ale regimurilor tranzitorii ale maşinii sincrone cu ajutorul calculului operaţional.

In baza teoriei celor două reacţii, înfăşurările statorului pot fi înlocuite cu două înfăşurări echivalente, care se rotesc împreună cu rotorul şi care sînt dispuse după axa longitudinală şi transversală a maşinii, iar fenomenele electromagnetice care se desfăşoară pe cele două axe pot fi analizate, plecîndu-se de la teoria transformatorului static cu multe înfăşurări.

In acest caz, schema echivalentă a circuitelor dispuse pe axa longitudinală a mașinii sincrone cu poli aparenți, fără înfășurări de amortizare (fig. 2), poate fi reprezentată prin schema expusă în (fig. 3), dacă

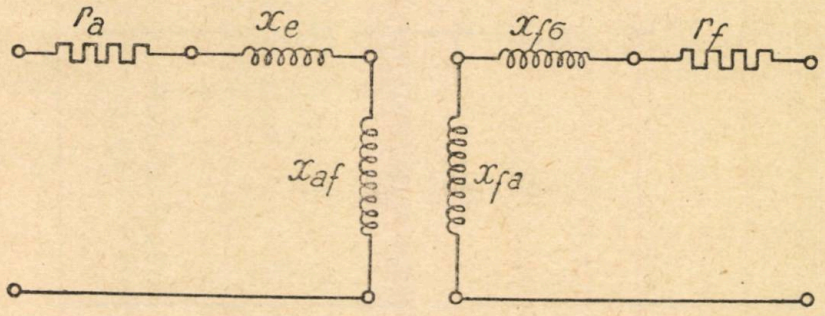



Fig. 2. — Circuitele plasate pe axa longitudinală a mașinii sincrone fără înfășurări de amortizare

se are în vedere faptul, că condiția pentru echivalența statică o constituie egalitatea inductanțelor mutuale.

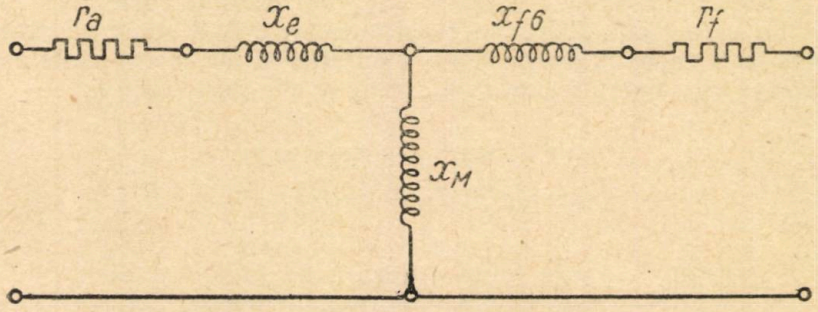



Fig. 3. — Schema echivalentă a circuitelor plasate pe axa longitudinală a mașinei sincrone fără înfășurări de amortizare

Cînd rotorul se armează cu înfășurări de amortizare, circuitele

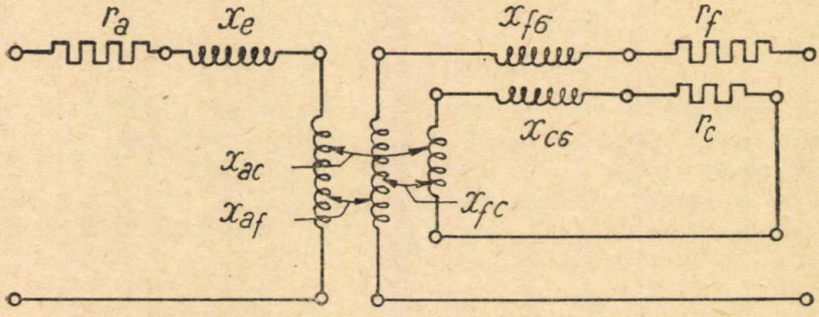



Fig. 4. — Circuitele plasate pe axa longitudinală a mașinei sincrone cu înfășurări de amortizare

de pe axa longitudinală sînt dispuse ca într-un transformator cu trei înfăşurări (fig. 4). Schema echivalentă este arătată (fig. 5).

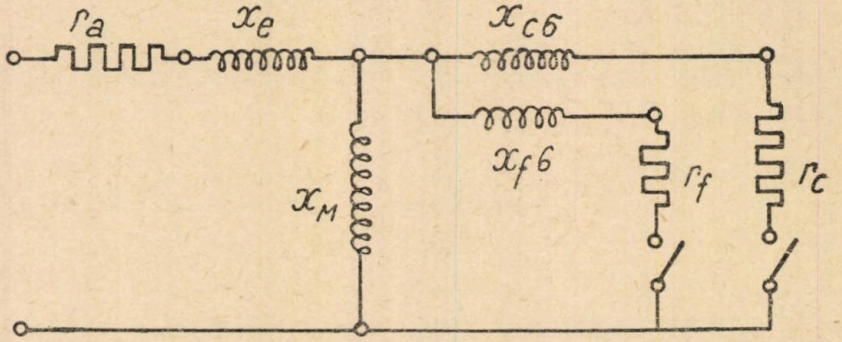



Fig. 5 — Schema echivalentă a circuitelor plasate pe axa longitudinală a maşinei sincrone cu înfăşurări de amortizare.

## 2.2—FOLOSIREA METODEI DE SCURTCIRCUIT ŞI MERS IN GOL PENTRU DETERMINAREA EXPRESIILOR OPERATORILOR MAŞINII SINCRONE

In teoria modernă a maşinii sincrone, în mod curent se folosesc expresiile care leagă fluxurile rezultante pe o axă dată cu tensiunea aplicată la bornele întăşurării de excitaţie, şi cu componentele corespunzătoare ale reacţiei indusului, care se pot scrie astfel:

$$\psi_d = G_d(p)\, E_{fd} - x_d(p)\, i_d$$

$$\psi_q = G_q(p)\, E_{fq} - x_q(p)\, i_q$$

unde:

$G_d(p)$ — conductanţa operaţională longitudinală;
$G_q(p)$ — conductanţa operaţională transversală;
$E_{fd}$ — tensiunea întăşurării de excitaţie de pe axa $d$;
$E_{fq}$ — tensiunea înfăşurării de excitaţie de pe axa $q$.

In maşinile sincrone, pe axa transversală nu există înfăşurare de excitaţie, deci $E_{fq} = 0$, şi expresiile pentru $\psi_d$, $\psi_q$ se pot scrie:

$$\psi_d = G(p)\, E_f - x_d(p)\, i_d \tag{30}$$

$$\psi_q = x_q(p)\, i_q \tag{31}$$

In mod direct din relaţia (31) rezultă că raportul $\psi_q / i_q$ reprezintă reactanţa operaţională $x_q(p)$ cu semn schimbat.

In acelaşi mod, dacă în expresia (30) se înlocuieşte $E_f = 0$ (înfăşurarea de excitaţie se scurtcircuitează), în ipoteza că prin înfăşurarea echivalentă circulă acelaşi curent $i_d$, fluxul rezultant în această înfăşurare va avea următoarea expresie:

$$\psi_{ds,c} = -x_d(p)\, i_d$$

de unde:

$$x_d(p) = -\psi_{ds,c} / i_d \tag{42}$$

De asemenea, nu este greu de observat că în cazul, cînd prin înfășurarea echivalentă statorică nu circulă nici un curent ($i_d = 0$) și la bornele bobinei de excitație este aplicată tensiunea $E_f$, fluxul rezultant în înfășurarea echivalentă se poate determina din relația:

$$\psi_{do} = G_{(p)} E_f$$

sau:

$$G(p) = \psi_{do}/E_f \tag{43}$$

astfel că $\psi_d$, în orice regim de funcționare a mașinii care se caracterizează prin mărimile $E_f$, $i_d$, se poate obține prin însumarea mărimilor $\psi_{do}$ și $\psi_{d.s.c}$:

$$\psi_d = \psi_{do} + \psi_{ds.c} = G(p) E_f - x_d(p) i_d$$

Folosirea metodei scurtcircuitului și a mersului în gol, simplifică în mod simțitor operațiile matematice, necesare pentru determinarea expresiilor operatorilor mașinii sincrone și permite o generalizare a problemelor.

## 2.3—DETERMINAREA OPERATORILOR MAȘINII SINCRONE FĂRĂ ÎNFĂȘURĂRI DE AMORTIZARE ÎN MOD OBIȘNUIT *

Ecuațiile de la care se poate pleca pentru a se efectua această determinare sînt ecuațiile fluxurilor rezultante în circuitele longitudinale:

$$\psi_d = x_{afd} i_{fd} - x_d i_d = x_M i_{fd} - x_d i_d \tag{44}$$

sau

$$p\psi_d = px_M i_{fd} - px_d i_d \tag{44'}$$

și

$$E_f = p\psi_{fd} + r_f i_{fd}$$

sau

$$p\psi_{fd} = E_f - r_f i_{fd} \tag{45}$$

unde:

$$\psi_{fd} = x_{ff} i_{fd} - x_M i_d . \tag{46}$$

Prin înlocuirea în ecuația (44) a valorii lui $i_{fd}$, găsită din ecuațiile (45), (46), $\psi_d$ se poate scrie:

$$\psi_d = \frac{x_M}{r_f + px_{ff}} E_f - x_d \cdot \frac{\left[ r_f + p\left( x_{ff} - \frac{x_M^2}{x_d} \right) \right]}{r_f + px_{ff}} i_d .$$

Expresia de felul $[x_{ff} - x_M^2/x_d]$ reprezintă reactanța tranzitorie (în cazul de față a înfășurării de excitație) și se notează:

$$x_{ff} - \frac{x_M^2}{x_d} = x'_{ff}.$$

*) Se folosește sistemul reciproc al unităților relative.

Astfel că expresia lui $\psi_d$, se poate scrie:

$$\psi_d = \frac{1}{1+p\frac{x_{ff}}{r_f}} \cdot \frac{x_M}{r_f} E_f - x_d \frac{1+p\frac{x'_{ff}}{r_f}}{1+p\frac{x_{ff}}{r_f}} i_d$$

Introducîndu-se următoarele notații:

$\frac{x_M}{r_f} E_f = E_d$ — f. e. m. indusă de curentul de excitație în fazele statorului, exprimată în u. r.

$\frac{x_{ff}}{r_f} = T_f$ — constanta de timp a înfășurării de excitație, cînd înfășurarea statorică erte deschisă;

$\frac{x'_{ff}}{r_f} = T'_d$ — constanta de timp a înfășurării de excitație cînd înfășurarea statorică este închisă,

expresia lui $\psi_d$ se poate scrie astfel:

$$\psi_d = \frac{1}{1+pT_f} E_d - x_d \frac{1+pT'_d}{1+pT_f} i_d \quad . \tag{47}$$

Comparîndu-se expresia lui $\psi_d$ (47) cu expresia generală (30), se obțin valorile operatorilor $G(p)$ și $x_d(p)$:

$$x_d(p) = \frac{1+pT'_d}{1+pT_f} \tag{42'}$$

$$G(p) = \frac{1}{1+pT_f} \cdot \frac{x_M}{r_f} \tag{43'}$$

sau dacă expresia (30) este scrisă în formă:

$$\psi_a = G(p) E_d - x_d(p) i_d$$

pentru $G(p)$ se găsește relația:

$$G(p) = \frac{1}{1+pT_f} \tag{43''}$$

## 2.4—DETERMINAREA EXPRESIILOR OPERATORILOR MAȘINII SINCRONE CU AJUTORUL METODEI DE SCURTCIRCUIT ȘI MERS IN GOL

*a.* Determinarea reactanței operaționale ($E_f = 0$)

Ecuațiile de plecare:

$$\psi_{ds.c} = x_M i_{fd} - x_d i_d \tag{48}$$

$$0 = p\psi_{fd} + r_f i_{fd} \tag{49}$$

$$\psi_{fd} = x_{ff} i_{fd} - x_M i_d \tag{50}$$

Din ecuațiile (49) și (50) se deduce :

$$i_{fd} = \frac{p x_M i_d}{r_f + p x_{ff}}$$

Inlocuindu-se valoarea lui $i_{fd}$ în (48) se găsește :

$$\psi_{dsc} = -\left(x_d - \frac{p x_M^2}{r_f + p x_{ff}}\right) i_d \ .$$

de unde, raportul $\psi_{dsc}/i_d$ va da reactanța operațională în aceeași formă în care a fost determinată și mai sus :

$$-\psi_{dsc} / i_d = x_d (1 + p\ T_d^1) / (1 + p T_f) \qquad (42')$$

b) Determinarea conductanței operaționale ($i_d = 0$).
Ecuațiile de plecare :

$$\psi_{do} = x_M\ i_{fd} \qquad (51)$$

$$E_f = p\ \psi_{fd} + r_f\ i_{fd} \qquad (45)$$

$$\psi_{fd} = x_{ff}\ i_{fd} \qquad (52)$$

Inlocuind în ecuația (51) pe $i_{fd}$ cu expresia :

$$i_{fd} = \frac{E_f}{r_f + p\ x_{ff}}$$

se obține :

$$\psi_{do} = \frac{x_M}{r_f + p x_{ff}} E_f = \frac{1}{1 + p\ T_f} \frac{x_M}{r_f} E_f \ . \qquad (43')$$

Expresia fluxului rezultant în înfășurarea echivalentă longitudinală a statorului în regimul de funcționare a mașinii care se caracterizează prin mărimile $E_f$ și $i_d$ :

$$\psi_d = \psi_{do} + \psi_{ds.c}\ G\ (p)\ E_f - x_d\ (p)\ i_d$$

ceea ce coincide în întregime cu rezolvarea dată în paragraful anterior.

## 2.5 CITEVA NOȚIUNI AJUTĂTOARE DIN TEORIA TRANSFORMATORILOR STATICI.

In teoria proceselor tranzitorii a mașinii sincrone expresiile reactanțelor tranzitorii sînt foarte larg întrebuințate de aceea, este necesar să se precizeze cîteva noțiuni, care sînt indisolubil legate de introducerea acestor expresii.

După cum s-a arătat în cazul transformatorului cu două înfășurări, reactanța tranzitorie are următoarea expresie (de ex. : pentru prima înfășurare ) :

$$x_{11}' = x_{11} - x_m^2 / x_{22}$$

unde :

$x'_{11}$ — este reactanța tranzitorie a primei înfășurări ;
$x_{11}$ — reactanța proprie a primei înfășurări ;
$x_M$ — reactanța mutuală dintre cele două înfășurări ;
$x_{22}$ — reactanța proprie a celei de a doua înfășurări.

Deoarece în literatura tehnică se întîlnesc adesea și alte expresii pentru această mărime, este indicat să se arate legătura dintre aceste expresii și expresia fundamentală de mai sus.

Astfel expresia $x'_{11}$ poate fi transcrisă în alt mod dacă se scoate în fața parantezei $x_{11}$ :

$$x'_{11} = x_{11}\left(1 - \frac{x_M^2}{x_{11} \cdot x_{22}}\right) = x_{11}\,\sigma_{12}$$

unde :

$\sigma_{12}$ — reprezintă coeficientul total de scăpări al sistemului magnetic după Rüdenberg. (L. 20.)

Acest coeficient, adunat cu coeficientul cuplajului magnetic dintre cele două înfășurări, a cărui expresie este :

$$\mu_{11} = \frac{x_M^2}{x_{11} \cdot x_{22}}$$

au o valoare unitară și deci se poate scrie relația :

$$\sigma_{12} + \mu_{12} = 1$$

In același fel, se determină pentru fiecare înfășurare coeficientul de scăpări ($\sigma_1$ , $\sigma_2$) și coeficientul cuplajului magnetic ($\mu_1$ , $\mu_2$), ca raportul dintre fluxul propriu de scăpări și fluxul total rezultant al fiecărei înfășurări și respectiv, ca raportul dintre fluxul inducției mutuale și fluxul total rezultant al înfășurării respective, iar între coeficienții totali și cei parțiali se pot scrie relațiile :

$$\mu_{12} = \mu_1\,\mu_2$$

$$\sigma_{12} = 1 - (1 - \sigma_1)\,(1 - \sigma_2) = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1\,\sigma_2 =$$

$$= 1 - \mu_1\,(1 - \sigma_2) = 1 - (1 - \sigma_1)\,\mu_2 =$$

$$\sigma_1 + \mu_1\,\sigma_2 = \sigma_2 + \mu_2\,\sigma_1$$

De asemenea expresia coeficientului total de scăpări al sistemului poate fi scrisă în funcție de constantele de timp ale înfășurărilor și anume, ca raportul a două constante de timp ale oricărei înfășurări, dintre care una este constanta de timp proprie a înfășurării respective, iar cealaltă se obține din prima prin conectarea în paralel a reactanței de scăpări a celei de a doua înfășurări cu reactanța mutuală.

Aceasta se poate arăta plecîndu-se de la formula coeficientului total de scăpări, unde se înlocuiesc reactanțele proprii prin reactanțele de scăpări și reactanțele mutuale :

$$\sigma_{12} = 1 - \frac{x_M^2}{x_{11}\, x_{22}} = 1 - \frac{x_M^2}{(x_1 + x_M)\, x_2 + x_M)} =$$

$$= \frac{x_1 + \dfrac{x_2 \cdot x_M}{x_2 + x_M}}{x_{11}} = x_{11}'/x_{11} = \frac{x_1 + x_M // x_2}{x_{11}} = \frac{T_{11}'}{T_{22}} =$$

$$= \frac{x_2 + x_m // x_1}{x_{22}} = \frac{T_{22}'}{T_{22}}$$

La același rezultat se poate ajunge, plecîndu-se de la expresia reactanței tranzitorii :

$$x_{11}' = x_{11}\, \sigma_{22}$$

de unde :

$$\sigma_{12} = \frac{x_{11}'}{x_{11}} = \frac{x_{22}'}{x_{22}} = \frac{T_{11}'}{T_{11}} = \frac{T_{22}'}{T_{22}}$$

$x_{22}'$ în același mod ca și $x_{11}'$, poate fi exprimat :

$$x_{22}' = x_{22}\, \sigma_{12}$$

După toate cele expuse, pentru reactanța tranzitorie a unei înfășurări a transformatorului cu două înfășurări se pot scrie următoarele formule :

$$x_{11}' = x_{11} - \frac{x_M^2}{x_{22}} = x_1 + x_M \frac{x_2}{x_{22}} = x_1 + x_M' =$$

$$= x_{11}\, \sigma_{12} = x_{11} \frac{x_{22}'}{x_{22}} = x_{11} \frac{T_{22}'}{T_{22}} = x_1 + \frac{1}{\dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_M}}$$

unde :

$x_1$ — reactanța de scăpări a primei înfășurări ;
$x_2$ — reactanța de scăpări a celei de a doua înfășurări ;
$T_{11}$— constanta de timp a primei înfășurări, cînd a doua înfășurare este deschisă ;
$T_{11}'$— constanta de timp a primei înfășurări, cind a doua înfășurare estc închisă ;
$T_{22}$— constanta de timp a celei de a doua înfășurări, cînd prima înfășurare este deschisă ;
$T_{22}'$— constanta de timp a celei de a doua înfășurări, cînd prima înfășurare este închisă.

## 2.6—DETERMINAREA OPERATORILOR MAȘINII SINCRONE CU INFĂȘURARE DE AMORTIZARE PE AXA LONGITUDINALĂ, CU AJUTORUL METODEI DE SCURTCIRCUIT ȘI MERS IN GOL

Ecuațiile de bază :

$$\psi_d = - x_d i_d + x_{fd} i_f + x_{dc} i_c \tag{53}$$

$$p \psi_{fd} = E_f - r_f i_c \tag{45}$$

$$p \psi_c = - i_c r_c \tag{54}$$

$$\psi_{fd} = - x_{df} i_d + x_{ff} i_f + x_{cf} i_c \tag{55}$$

$$\psi_c = - x_{de} i_d + x_{fc} i_f + x_c i_c \tag{56}$$

a. Determinarea reactanței operaționale ($E_f = 0$).

In acest caz ecuațiile de bază se pot scrie :

$$\psi_d = - x_d i_d + x_{fd} i_f + x_{cd} i_c \tag{53'}$$

$$0 = - p x_{df} i_d + (r_f + p x_{ff}) i_f + p x_{cf} i_c \tag{45'1}$$

$$0 = - p x_{dc} i_d + p x_{fc} i_f + (r_c + p x_c) i_c \tag{54'}$$

După cum s-a demonstrat mai sus, reactanța operațională se obține ca raportul dintre $\psi_{dsc}$ și $i_d$ cu semn schimbat.

Rezolvînd sistemul (53'), (45') și (54') în raport cu $i_d$, obținem :

$$i_d = - \frac{\begin{vmatrix} r_f + p x_{ff} & p x_{cf} \\ p x_{fc} & r_c + p x_c \end{vmatrix}}{\Delta}$$

de unde :

$$- \frac{\psi_{ds.c}}{i_d} = x_d(p) = \frac{\Delta}{\Delta_1}$$

Determinantul $\Delta_1$ are următoarea expresie :

$$\Delta_1 = \left[ 1 + p (T_c + T_f) + p^2 T_c T_f \left( 1 - \frac{x_{fc} x_{cf}}{x_{ff} x_c} \right) \right] r_f r_c$$

dar deoarece $x_{fc} = x_{cf} = x_M$, atunci

$$1 - x_{fc} x_{cf} / x_{ff} x_c = \sigma_{fc}$$

reprezintă coeficientul total de scăpări dintre circuitele rotorului cînd înfășurarea statorului este deschisă.

După aceasta minorul $\Delta_1$ poate fi scris :

$$\Delta_1 = [ 1 + p (T_c + T_f) + p^2 T_c T_f \sigma_{fc} ] r_c r_f$$

După efectuarea unor transformări matematice, pentru determinantul $\Delta$ se poate scrie următoarea expresie:

$$\Delta = x_d \begin{vmatrix} r_f + p\left[x_{ff} - \frac{x_{fd}\, x_{df}}{x_d}\right] & p\left[x_{fc} - \frac{x_{fd}\, x_{dc}}{x_d}\right] \\ p\left[x_{cf} - \frac{x_{df}\, x_{cd}}{x_d}\right] & r_c + p\left[x_c - \frac{x_{cd}\, x_{dc}}{x_d}\right] \end{vmatrix} = x_d\ \Delta'_1$$

Luîndu-se în considerație condiția echivalenței statice, adică egalitatea inductanțelor mutuale dintre toate circuitele:

și raporturile: $x_{fd} = x_{df}\ ;\ x_{cd} = x_{dc}\ ;\ x_{fc} = x_{cf}$

$$x'_{md} = x_{md} - \frac{x_{mn}\, x_{dn}}{x_{nn}}\ ;\ x'_{mn} = x_{mn} - \frac{x_{dn}\, x_{md}}{x_d}$$

$$x'_{nd} = x_{nd} - \frac{x_{nm}\, x_{dm}}{x_{mm}} \quad (m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots .\ k)$$

unde:

$x'_{md}$, $x'_{nd}$, $x'_{mn}$ — reactanțele tranzitorii,

pentru $\Delta'_1$ se poate scrie:

$$\Delta'_1 = \left[1 + p\left(T'_c + T'_d\right) + p^2\, T'_d\, T'_c\, \sigma'_{fc}\right] r_f\, r_c$$

unde:

$\sigma'_{fc}$ — coeficientul total de scăpări dintre înfășurările rotorice cînd înfășurarea statorică este închisă.

Expresia finală a lui $x_d(p)$

$$x_d(p) = x_d \frac{1 + p\left(T'_f + T'_c\right) + p^2\, T'_f\, T'_c\, \sigma'_{fc}}{1 + p\left(T_f + T_c\right) + p^2\, T_f\, T_c\, \sigma_{fc}}$$

După cum s-a arătat mai sus $\sigma_{fc}$ și $\sigma'_{fc}$, pot fi exprimați ca raportul a două constante de timp:

$$\sigma_{fc} = \frac{T''_{co}}{T_c} = \frac{T''_{fo}}{T_f},\ \sigma'_{fc} = \frac{T''_c}{T'_c} = \frac{T''_f}{T'_f}$$

unde:

$T_c$ — constanta de timp a înfășurării de amortizare, cînd înfășurarea statorului și cea de excitație sînt deschise;

$T''_{co}$ — constanta de timp a înfășurării de amortizare, cînd înfășurarea statorului este deschisă și cea de excitație închisă;

$T_f$ — constanta de timp a înfășurării de excitație, cînd celelalte înfășurări sînt deschise;

$T''_{fo}$ — constanta de timp a înfășurării de excitație, cînd înfășurarea statorului este deschisă și cea de amortizare este închisă;

$T''_f$ — constanta de timp a înfășurării de excitație, cînd celelalte înfășurări sînt închise;

$T'_f$ — constanta de timp a înfășurării de excitație, cînd înfășurarea statorului este închisă și cea de amortizare deschisă;

$T'_c$ — constanta de timp a înfășurării de amortizare, cînd înfășurarea statorului este închisă și cea de excitație deschisă;

$T'_c$ — constanta de timp a înfășurării de amortizare, cînd celelalte înfășurări sînt închise.

Dacă se înlocuiesc mărimile de mai sus în expresia lui $x_d(p)$:

$$x_d(p) = x_d \frac{1+p\left(T'_f+T'_c\right)+p^2\,T'_f\,T''_c}{1+p\left(T_f+T_c\right)+p^2\,T_f\,T''_{co}} \tag{57}$$

sau

$$x_d(p) = \frac{1+p\left(T'_f+T'_c\right)+p^2\,T''_f\,T'_c}{1+p\left(T_f+T_c\right)+p\,T''_{fo}\,T_c} \tag{57'}$$

b) Determinarea conductanței operaționale ($i_d = 0$).

Pentru acest caz ecuațiile de plecare sînt următoarele:

$$\psi_{do} = x_{fd}\,i_f + x_{cd}\,i_c \tag{58}$$

$$E_f = (r_f + p\,x_{ff})\,i_f + p\,x_{cf}\,i_c \tag{59}$$

$$o = p\,x_{fc}\,i_f + (r_c + p\,x_c)\,i_c \tag{60}$$

In ecuația (58) se înlocuiesc valorile lui $i_f$, $i_c$ obținute prin rezolvarea sistemului (59) și (60):

$$i_f = \frac{E_f\,(r_c + p\,x_c)}{\Delta_1}$$

$$i_c = -\frac{p\,x_{cf}\,E_f}{\Delta_1}$$

Mai sus s-a arătat că:

$$G(p) = \frac{\psi_{do}}{E_f} = \frac{1}{\Delta_1}\left\{x_{fd}\left[r_c + px_c\left(1 - \frac{x_{cf}\,x_{cd}}{x_f\,x_{fd}}\right)\right]\right\}$$

Deoarece $x_{fc} = x_{dc} = x_{df} = x_M$ coeficientul $x_{cf}\,x_{cd}/x_c\,x_{fd}$ se transformă în coeficientul propriu de cuplaj magnetic al înfășurării de amortizare, iar $(1 - x_{fc}\,x_{cd}/x_c\,x_{ff}) = 1 - \mu_c = \sigma_c$ — coeficientul propriu de scăpări al aceleiași înfășurări. După aceasta;

$$G(p) = \frac{1}{\Delta_1}\left[x_{fd}\,(r_c + px_c\,\sigma_c)\right].$$

După cum s-a arătat mai sus :

$$\Delta_1 = [1 + p\,(T_f + T_c) + p^2\,T_f\,T''_{do}]\,r_f\,r_e$$

iar expresia lui $G\,(p)$ poate fi scrisă :

$$G\,(p)\,\frac{1 + p\,T_e\,\sigma_c}{1 + p\,(T_f + T_c) + p^2\,T_f\,T''_{do}}\,\frac{x_M}{r_f} \qquad (61)$$

După examinarea acestor cazuri particulare, nu este greu de observat că rezultatele obținute se pot extinde la cazul, cînd pe rotor se poate afla un număr arbitrar de înfășurări.

In acest caz, dacă atribuim înfășurării statorice indicele $d$, înfășurării de excitație indicele $f$, înfășurării de amortizare, $c$ și celorlalte circuite scurtcircuitate, indicii 3, 4, 5,.... $h$, operatorii mașinii sincrone pot fi exprimați prin formulele :

$$x_d(p) = x_d\,\frac{|Z'_{mn}|}{|Z_{mn}|} \quad (m, n = f, c, 3, 4.... h) \qquad (62)$$

$$G\,(p) = \frac{|Z_{gn}|}{|Z_{kn}|}\,, \quad \begin{matrix}(g = d, c, 3.... h)\\ (k, n = f, c, 3....h)\end{matrix} \qquad (63)$$

unde :

$$Z_{mm} = r_{mm} + px_{mm}\,, \quad \text{cînd } m = n \qquad (64)$$

$$Z_{mn} = p\,x_{mn}\,, \quad \text{cînd } m \neq n \qquad (65)$$

In literatura tehnică, foarte adesea, coeficienții $T''_c$ , $T''_{co}$ , $T'_f$ , se notează prin următoarele simboluri :

$$T''_c \to T''_d\,, \quad T''_{co} \to T''_{do}\,, \quad T_f \to T'_d$$

De aceea, este mai de preferat să se scrie expresiile reactanțelor operaționale în funcție de aceste notații mai răspîndite.

Astfel, expresia (57) se poate retranscrie :

$$x_d\,(p) = x_d\,\frac{1 + p\,(T'_d + T'_c) + p^2\,T''_d\,T'_d}{1 + p\,(T_f + T_c) + p^2\,T_f\,T'_{do}} \qquad (66)$$

## 2.7. — EXPRESIILE REACTANȚELOR OPERAȚIONALE CIND OPERATORUL $p$ PRIMEȘTE CITEVA VALORI PARTICULARE

*a)* Pentru reactanța operațională a mașinii fără înfășurare de amortizare.

Formula acestei reactanțe este dată de (42)'). Valorile caracteristice ale operatorului $p$ în regimuri de funcționare tranzitorii sînt următoarele :

$$p = \infty \quad ; \quad p = j\,s$$

$$p = 0 \quad ; \quad p = j\,(1 - s)\,.$$

Prin înlocuirea în ecuațiile operaționale ale valorii operatorului $p = \infty$, se determină valorile instantanee ale mărimilor căutate în momentul apariției procesului tranzitoriu respectiv.

Prin înlocuirea $p = 0$, se determină valorile stabile ale mărimilor respective, adică acele valori, care se obțin după amortizarea tuturor componentelor tranzitorii.

Prin înlocuirea $p = \pm js$ și $p = \pm j\,(1-s)$ se determină valorile la mersul în regim asincron cu alunecare constantă $s$ și $(1-s)$.

In funcție de valorile particulare ale operatorului $p$, formula (42') se transformă corespunzător:

Cînd $p = \infty$ $(t = 0)$

$$\left[x_d(p)\right]_{p=\infty} = x_d \frac{T_d'}{T_f} = x_d\,\sigma_{fd} = x_d', \tag{67}$$

Deoarece s-a arătat (2. 5), că raportul $T_d'/T_f$ reprezintă coeficientul total de scăpări dintre înfășurarea statorului și cea de excitație:

Cînd $p = 0$; $(t = \infty)$:

$$\left[x_d(p)\right]_{p=0} = x_d\ ; \tag{68}$$

Cînd $p = js$:

$$\left[x_d(p)\right]_{p=js} = x_d \frac{1 + js\,T_d'}{1 + js\,T_f} \tag{68 a}$$

sau

$$\frac{1}{x_d(js)} = \frac{1}{x_d}\ \frac{1 + js\,T_f}{1 + js\,T_d'} \tag{68 b}$$

Dacă se exprimă $[\,1/x_d\ (js)\,]$ prin modul și argument, se obține:

$$\frac{1}{x_d(js)} = \frac{1}{x_d}\left[\frac{1 + s^2T_f^2}{1 + s^2\,T_d^{12}}\right]^{1/2} \varepsilon^{j\,\psi_{sd}} = \frac{1}{x_d}\,M(s)\,\varepsilon^{j\psi_{sd}} \tag{69}$$

unde:

$$\psi_{sd} = \varphi_{sd} - \varphi_{sd}'\,; \qquad \varphi_{sd} = \operatorname{arctg}(sT_f)$$

$$\varphi_{sd}' = \operatorname{arctg}(sT_d')\ :$$

$$M(s) = \left[\frac{1 + s^3\,T_f^2}{1 + s^2\,T_d^{12}}\right]^{1/2}$$

Cînd $p = j\,(1-s)$,

$$\frac{1}{x_d\,[j(1-s)]} = \frac{1}{x_d}\ \frac{1 + j(1-s)\,T_f}{1 + j\,(1-s)\,T_d'}$$

Ca și mai sus, expresia acestei mărimi complexe în funcție de modul și argument este :

$$\frac{1}{x_d\,[\,j(1-s)\,]} = \frac{1}{x_d}\,M\,(1-s)\,\varepsilon^{\,j\,\psi_{(1-s)\,d}} \tag{71}$$

unde :

$$\psi_{(1-s)d} = \varphi_{(1-s)\,d} - \varphi_{(1-s)\,d}$$

$$\varphi_{(1-s)\,d} = \operatorname{arctg}\,[(1-s)\,T_f\,]\;;\;\varphi'_{(1-s)\,d} = \operatorname{arc\,tg}\,[\,(1-s)\,T'_d]$$

$$M\,(1-s) = \left[\frac{1+(1-s)^2\,T_f^2}{1+(1-s)\,T_d'^2}\right]^{1/2} \tag{72}$$

Pentru reactanța operațională a mașinii cu înfășurări de amortizare.

Expresia acestei reactanțe este dată prin formula (66).

Ca și în cazul precedent, în cazul de față valorile caracteristice ale operatorului $p$, rămîn aceleași.

Cînd $p = \infty$ ;

$$[x_d\,(p)\,]_{\,p=\infty} = x_d\,\frac{T'_d\;T''_d}{T_f\;T''_{do}} = x_d\,\sigma_{fd}\,\frac{T''_d}{T''_{do}} = x'_d\;\sigma'_{dc} = x''_d\;. \tag{73}$$

deoarese $T'_d/T_f = \sigma_{fd}$ , iar raportul $T'_d/T''_{do}$ reprezintă coeficientul total de scăpări dintre înfășurarea statorului și cea de amortizare cînd înfășurarea de excitație este închi ă $(T''_d/T''_{do} = \sigma'_{dc})$ .

Reactanța $x''_d$ se numește reactanța supratranzitorie.

Cînd $p = 0$ :

$$[\,x_d\,(p)\,]_{\,p=0} = x_d \tag{74}$$

Cînd $p = js$ :

$$[x_d\,(p)]_{\,p=js} = x_d\,\frac{1-s^2\,T'_d\,T''_d + js\,(T'_d + T'_c)}{1-s^2\;T_f\,T''_{do} + js\;T_f + T_c)} \tag{74 a}$$

In funcție de modul și argument, inversul lui $x_d\,(js)$ se poate retranscrie :

$$\frac{1}{x_d\;(js)} = \frac{1}{x_d}\,M\,(s)\;\varepsilon^{\,j\,\psi_{sa}}$$

unde (75)

$$\psi_{sd} = \varphi_{sd} - \varphi'_{sd}\;;$$

$$\varphi_{sd} = arctg\,\frac{s\,(T_f + T_c)}{1-s^2\,T_f\,T''_{do}}\;;\;\varphi'_{sd} = arctg\,\frac{s\,(T'_d + T'_c)}{1-s^2\,T'_d\,T''_d}$$

$$M(s) = \left[\frac{\left(1-s^2\,T_f\,T''_{do}\right)^2 + s^2\,(T_f + T_c)^2}{\left(1-s^2\,T'_d\,T''_d\right)^2 + s^2\,(T'_d + T'_c)^2}\right]^{1/2}$$

Cînd p = j (1 — s), ca şi mai sus:

$$\frac{1}{x_d\left[j\,(1-s)\right]} = \frac{1}{x_d}\,M\,(1-s)\,\varepsilon^{j\,\psi_{(1-s)\,d}} \tag{77}$$

unde:

$$\psi_{(1-s)\,d} = \varphi_{(1-s)\,d} - \varphi'_{(1-s)\,d}$$

$$\varphi_{(1-s)\,d} = arc\,tg\,\frac{(1-s)\,(T_f + T_c)}{1-(1-s)^2\,T_f\,T''_{do}} \tag{78}$$

$$\varphi'_{(1-s)\,d} = arc\,tg\,\frac{(1-s)\left(T'_d + T'_c\right)}{1-(1-s)^2\,T'_d\,T''_d}$$

$$M\,(1-s) = \left[\frac{\left[1-(1-s)^2 T_f\,T''_{do}\right]^2 + (1-s)^2\,(T_f + T_c)^2}{\left[1-(1-s)^2 T'_d\,T''_d\right]^2 + (1-s)^2\left(T'_d + T'_c\right)^2}\right]^{1/2}$$

## BIBLIOGRAFIE


1. *Lüter R. A.*—Reactanţele operaţionale ale maşinii sincrone. Electricestvo nr. 17. 1934.
2. *Lüter R. A.*—Teoria regimurilor tranzitorii ale maşinii sincrone cu aplicarea analizei operaţionale. Leningrad 1939.
3. *L. P. Shildenech*—S. M. Reactances—GER 1932 nr. 11,
4. *R. H. Park*—Definition of an Ideal S. M. GER, vol. 31, 1928, p. 337.
5. *R. H. Park*—Two Reaction Theory of S. M. Part. I, TAIEE, vol. 48. 1929, p. 716; Part. II, TAIEE vol. 52, 1933, nr. 2, p. 352.
6. *M. L. Waring, S. B. Cary*—The operational impedances of a Synchronous Machine GER vol. 35, 1932, nr. 1.
7. *Kazovski E. I.*—Teoria generalizată a regimurilor tranzitorii în maşini asincrone şi sincrone. Sbornic „Electosila" nr. 2-3, 1945.
8. *C. Concordia*—Synchronous Machines. New-York, London 1951.
9. *A. A. Gorev*—Procese tranzitorii în maşini sincrone. Moscova-Leningrad 1951.
10. *Rüdenberg*—Regimuri nestaţionare în instalaţii electrice. Moscove 1954.
11. *Aliabiev*—Regimuri tranzitorii şi parametrii maşinei sincrone. Leningrad 1953.


## ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДВУХ РЕАКЦИЙ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ

(Краткое содержание)


Сущность настоящей работы заключается в кратком изложении основных элементов теории двух реакций синхронной машины.

Обращается внимание на некоторые погрешности, допускаемые в литературе по специальности.

# ELÉMENTS FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES DEUX RÉACTIONS DANS LA MACHINE SYNCHRONE

(R é s u m é)

Le but de ce travail est d'exposer les éléments fondamentaux de la thêorie des deux réactions dans la machine synchrone.

On met en évidence certaines érreurs systématiques qui figurent dans la littérature de spécialité.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.313.2

# VITEZA DE RĂSPUNS A MAŞINILOR DE CURENT CONTINUU FUNCŢIONIND ÎN SCHEME DE EXCITAŢIE A GENERATOARELOR SINCRONE

de C. APETREI

## 1.—CONSIDERAŢII GENERALE

In exploatarea şi proiectarea sistemelor electroenergetice, problemele asigurării sau „măririi" stabilităţii statice şi dinamice prezintă un deosebit interes ; stabilitatea statică şi dinamică necesară unui sistem dat se poate realiza prin alegerea judicioasă a structurii sale, prin alegerea convenabilă a caracteristicilor diferitelor elemente componente din sistem şi prin impunerea unor condiţii speciale sistemelor de protecţie şi de reglaré automată.

In practică, pentru asigurarea şi mărirea stabilităţii sistemelor electrice, se utilizează pe o scară din ce în ce mai largă reglarea puterii reactive. Reglarea convenabilă a puterii reactive, după cum este bine cunoscut, se poate realiza din centralele electrice prin variaţia curentului de excitaţie a generatoarelor sincrone sau din diferite puncte ale sistemului prin alte mijloace adecvate (în staţii electrice : reglarea transformatoarelor sub sarcină ; în punctele mari consumatoare de putere reactivă : instalarea compensatoarelor sincrone şi reglarea excitaţiei lor etc.).

Influenţa manifestată de reglarea excitaţiei asupra stabilităţii maşinilor care funcţionează în paralel, respectiv a sistemului electric dat, poate fi stabilită, atît sub aspect calitativ cît şi cantitativ, pe baza caracteristicilor sistemului de excitaţie, a caracteristicilor sistemului de reglare automată a excitaţiei şi a parametrilor generatoarelor sincrone ; interesează îndeosebi legea de variaţie în timp a curentului de excitaţie şi valoarea sa maximă sau minimă, în funcţie de sistemul de excitaţie şi parametrii schemei de reglare automată.

In cadrul lucrării de faţă, nu ne vom ocupa de analiza diferitelor sisteme de excitaţie sau reglare automată a excitaţiei *). Obiectul studiului îl constituie analiza calitativă în privinţa vitezei de răspuns a două scheme de excitaţie a maşinilor sincrone mai des utilizate în practică ; excitatricea cu excitaţie independentă şi excitatricea cu excitaţie în paralel.

---

*) Legat de aceste probleme se poate aminti aici că studiile teoretice şi practica de exploatare indică următoarele soluţii : sistemul de excitaţie individual prin dispunerea excitatricelor—excitratricea şi subexcitatricea—pe ax comun cu generatorul sincron ; sistemul de reglare automată a tensiunii după derivata a 2 a a unghiului intern al maşinii, combinat sau nu cu impuls după derivata 1-a a aceluiaşi unghi.

## 2. PUNEREA PROBLEMEI

Atît satisfacerea condiţiilor necesare funcţionării în „zona de stabilitate artificială", cît şi îndeplinirea condiţiei ideale a stabilităţii dinamice a maşinii sincrone—menţinerea constantă a fluxului rezultant din întrefier în timpul procesului tranzitoriu—impun variaţii în limite largi ale excitaţiei maşinii; dacă se defineşte ca „plafon" raportul dintre tensiunea maximă la bornele înfăşurării de excitaţie a maşinii sincrone ($U_{rmax}$) şi tensiunea la aceleaşi borne corespunzătoare funcţionării maşinii sincrone în condiţii nominale ($U_{rn}$), plafonul poate atinge valori ridicate de ordinul 2...5. Variaţia excitaţiei în limite atît de largi este de dorit să se efectueze cu viteze cît mai mari.; dacă sistemul de reglare automată se va considera ideal—mărimea de ieşire urmăreşte mărimea de intrare simultan—şi dacă se va face abstracţie de eventualele inerţii mecanice, atunci viteza de variaţie a excitaţiei va fi funcţie doar de caracteristicile electromagnetice ale excitatricei şi ale plafonului adoptat. Problema care se pune este tocmai de a se urmări comportarea comparativă a excitatricei cu excitaţia în două variante, funcţie doar de caracteristicile electromagnetice ale maşinii şi plafonul adoptat atunci cînd tensiunea excitatricei creşte de la $U_{rn}$ la $U_{rmax}$ ($U_{rn}$ — tensiunea la bornele excitatricei la funcţionare nominală).

In literatură se urmăreşte problema asemănătoare în legătură cu procesul de autoexcitaţie a maşinilor de curent continuu—variaţii ale tensiunii excitatricei de la 0 la $U_{rn}$—dîndu-se rezolvarea analitică (1) sau grafico-analitică (2); lipseşte însă o analiză comparată completă a vitezei de răspuns în cazul excitatricelor cu excitaţia independentă şi în paralel în regimul de funcţionare saturat, funcţie de gradul de saturaţie a maşinii şi a plafonului ales.

In studiul de faţă. urmează să se facă această analiză comparată pe cale analitică căutînd să se simplifice problema de toţi factorii de ordin secundar, reliefîndu-se modul cum influenţează gradul de saturaţie şi plafonul maşinii viteza de creştere a tensiunii şi durata procesului tranzitoriu.

Pentru a se scoate în evidenţă aspectele problemei care interesează—stabilirea proprietăţilăr intime ale maşinii indiferent de procesele ce intervin în cazul funcţionării în sarcină—se va urmări comportarea excitatricei, la funcţionarea în gol, respectînd condiţia ca starea electromagnetică iniţială şi finală să fie aceeaşi în cazul celor două variante studiate. Pentru aceasta, se va considera o aceeaşi maşină cu excitaţia succesiv în cele două variante, funcţionînd în gol la variaţii ale tensiunii $U_{rn} \dots U_{rmax}$.

Viteza de răspuns a maşinii o vom caracteriza prin viteza iniţială. variaţia derivatei funcţiei $U_r = f(t)$ şi prin timpul total necesar atingerii plafonului ales, acelaşi pentru maşina cu excitaţie independentă şi în paralel; se va putea determina deci viteza de răspuns, funcţie de caracteristicile electromagnetice ale maşinii şi a plafonului ales. In legătură cu aceasta, trebuie remarcat că modul obişnuit de definire în literatură a vitezei de răspuns (3) nu caracterizează decît în parte inerţia electromagnetică a excitatricei el putînd da indicaţii numai într-o primă aproximaţie.

Scopul practic urmărit de studiu este acela ca pe baza cerințelor impuse de exploatarea mașinilor sincrone și a modului de comportare a excitatricei cu excitația în cele două variante să se poată alege în cazurile concrete date de schema de excitație optimă.

## 3.—REZOLVAREA PROBLEMEI

Se va da rezolvarea problemei pe cale analitică. Pentru aceasta, se vor face următoarele ipoteze simplificatorii:

a) viteza grupului de excitație rămîne constantă și egală cu cea nominală în timpul procesului tranzitoriu;

b) caracteristica de magnetizare a mașinii, în zona de funcționare ce interesează, se asimilează unei curbe reprezentate de ecuația

$$i = \frac{\varphi}{m - n\varphi}$$

c) efectul curenților circulari asupra proceselor ce se urmăresc se neglijează;

d) magnetismul remanent al mașinii se neglijează;

e) căderea de tensiune în înfășurarea indusului se neglijează;

f) agentul care provoacă schimbarea regimului de funcționare acționează fără întîrziere.

Schemele mașinii care urmează a fi luate în considerare sînt reprezentate în fig. 1 și fig. 2.

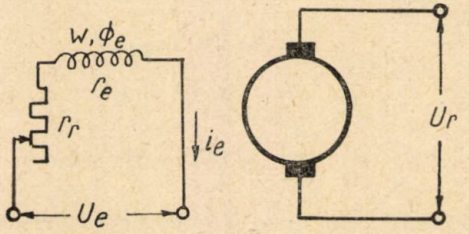



Fig. 1

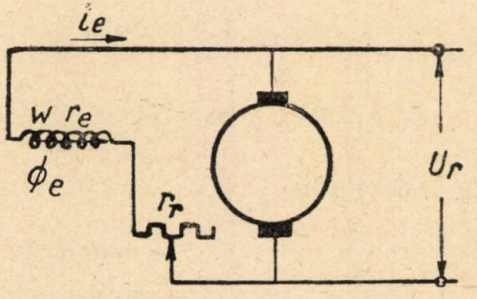



Fig. 2

Schimbarea regimului de funcţionare a maşinii, în cazul schemei reprezentate în fig. 2, poate fi realizată prin variaţia rezistenţei $r_r$ a reostatului de cîmp ; schimbarea regimului, în cazul maşinii reprezentate în fig. 1, poate fi realizată în trei moduri : prin schimbarea tensiunii de alimentare a înfăşurării de excitaţie $U_e$. prin variaţia rezistenţei $r_r$ a reostatului de cîmp sau prin variaţia concomitentă a rezistenţei $r_r$ şi a tensiunii de alimentare $U_e$.

Pentru a îndeplini condiţia impusă anterior—tensiunile $U_r$, fluxurile $\Phi_e$, curenţii $i_e$, rezistenţele $R_e = r_r + r_e$ pentru regimurile staţionare iniţial şi final pentru excitatricea în cele două variante să fie aceleaşi—schimbarea regimului de funcţionare în cazul excitatricii cu excitaţia independentă se va face prin variaţia instantanee a tensiunii $U_e$ şi rezistenţei $R_e$ .

Dacă se afectează cu 1 mărimile caracteristice regimului staţionar iniţial, iar cu 2 regimul staţionar final, atunci, pentru a se îndeplini condiţia amintită mai sus, tensiunea $U_{e1}$ şi $U_{e2}$ va trebui să fie egală cu $U_{r1}$ respectiv $U_{r2}$. Trebuie subliniat faptul ca realizarea unor stări magnetice identice a maşinii în cele două variante pentru regimurile iniţial şi final ($\Phi_e$ identic) s-ar fi putut face şi prin variaţia instantanee corespunzătoare doar a tensiunii $U_e$ ; acest mod de acţionaare n-ar fi fost însă indicat ; rezistenţele $R_e$ ar fi trebuit să difere şi în consecinţă rezultatele obţinute ar fi fost eronate deoarece în definitiv $R_e$ poate fi considerat ca o măsură a timpului în care energia electromagnetică, existentă la un moment dat într-un sistem, se disipă sub formă de pierderi ireversibile joule.

Revenind la schema reprezentată în fig. 1, ecuaţiile circuitului de excitaţie vor avea forma :

$$R_{e1},\ i_{e1} = U_{e1} \tag{1}$$

$$R_{e2},\ i_{e2} = U_{e2} \tag{2}$$

$$W\frac{d\Phi_e}{dt} + R_{e2}\ i_e = U_{e2} \tag{3}$$

ecuaţiile (1), (2) reprezentînd ecuaţiile regimurilor staţionare iniţial şi final, iar ecuaţia (3) ecuaţia regimului transitoriu.

Luînd, ca regim de referinţă, sistemul mărimilor ce caracterizează regimul de funcţionare iniţial şi notînd cu :

$\frac{\Phi_e}{\Phi_{e1}} = \varphi$ ; $\frac{i_e}{i_{e1}} = i$, ecuaţia (3) poate fi scrisă sub forma :

$W\frac{d\,(\Phi_{e1}\,\varphi)}{dt} + R_{e2}\,i_{e1}\,i = U_{e2}$, sau înlocuind $U_{e2} = R_{e2}\,i_{e2}$ (ec. (2) )

şi împărţind cu $R_{e2}\,i_{e2}$ se obţine :

$\frac{W\,\Phi_{e1}}{R_{e2}\,i_{e2}}\ \frac{d\,\varphi}{dt} + \frac{i_{e1}}{i_{e2}}\,i = 1$ ; să notăm cu :

$$\frac{i_{e2}}{i_{e1}} = a\ ;\ \frac{W\,\Phi_{e1}}{a\,R_{e2}\,i_{e1}} = \frac{T}{a}\ ;\ a\,\frac{t}{T} = \tau$$

Cu aceste notații ecuația (3) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{1}{a} i - 1 = O \tag{4}$$

Ecuația (4) ecuația regimului tranzitoriu sub formă transformată, conține fluxul $\varphi$ și curentul $i$ exprimat în unități relative; $a$ indică plafonul care caracterizează limita de variație a fluxului mașinii, respectiv a tensiunii la borne $U_r$.

Ecuația (4) se poate rezolva avînd în vedere:

a) condițiile de limită:

la : $t = o$, $\tau = o$, $i_e = i_{e1}$ iar $i = 1$, respectiv $\Phi_e = \Phi_{e1}$ iar $\varphi = 1$.

și: $t = \infty$; $\tau = \infty$; $i_e = i_{e2}$ iar $i = a$, respectiv $\Phi_e = \Phi_{e2}$ iar $\varphi = \frac{\Phi_{e2}}{\Phi_{e1}}$

b) relația de legătură între $\varphi$ și $i$ definită de caracteristica de magnetizare a mașinii:

$$\varphi = \frac{mi}{1 - ni} \tag{5}$$

Parametrii $m$ și $n$ din ecuația (5) depind de caracteristica de magnetizare a mașinii și pot fi determinați punînd următoarea condiție: curba definită de ecuația (5) să treacă prin punctele de funcționare 1 și 2. corespunzătoare regimurilor de funcționare inițial și final, ceea ce se reduce:

$$\text{la } i = 1,\ \varphi = 1 \text{ iar la } i = a,\ \varphi = b,$$

unde $b$ reprezintă valoarea fluxului în unități relative determinată pe caracteristica de magnetizare la $i = a$; conform acestor condiții:

$$m = \frac{b(a-1)}{a(b-1)};\quad n = \frac{a-b}{a(b-1)} \tag{6}$$

Scoțînd valoarea lui $i$ din (5) și înlocuind-o în (4) avînd în vedere relațiile (6) ecuația (4) devine:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{1}{a}\,\frac{\varphi}{m - n\varphi} - 1 = O \tag{7}$$

Separînd variabilele și utilizînd relațiile (6) se obține:

$$d\tau = b\frac{d\varphi}{b-\varphi} - \frac{a-b}{a-1}\frac{\varphi\, d\varphi}{b-\varphi}$$

de unde dacă integrăm:

$$\tau = \frac{a-b}{a-1}\varphi - \frac{b(b-1)}{a-1}\ln(b-\varphi) + C$$

Constanta de integrare C se determină din condițiile inițiale:

$$t = o \quad \tau = o \; ; \; \varphi = 1$$

$$C = -\frac{a-b}{a-1} + \frac{b\,(b-1)}{a-1} \ln\,(b-1),$$

de unde rezultă expresia lui $\tau$:

$$\tau = \frac{a-b}{a-1}\,(\varphi - 1) + \frac{b\,(b-1)}{a-1} \ln \frac{b-1}{b-\varphi} \quad \text{sau}$$

$$t = T\,\frac{(a-b)}{a\,(a-1)}\,(\varphi - 1) + T\,\frac{b\,(b-1)}{a\,(a-1)} \ln \frac{b-1}{b-\varphi} \tag{8}$$

Relația (8) reprezintă legea de variație a fluxului, deci și a f. e. m. excitatricei cu excitația independentă, atunci cînd tensiunea $U_e$ și rezistența $R_e$ se schimbă instantaneu; ea scoate în evidență influența pe care o manifestă caracteristicile mașinii (constanta de timp a mașinii $\frac{L}{R_{e2}} = T$ corespunzătoare stării magnetice a mașinii din regimul inițial, plafonul sau gradul de forțare al excitației — prin intermediul lui $a$; gradul de saturație al mașinii — prin intermediul lui $b$, asupra variației în timp a fluxului.

Pentru a determina legea de variație a fluxului, respectiv a f. e. m. și tensiunii $U_r$, în cazul schemei reprezentate în fig. 2 se procedează în mod analog.

Prin schimbarea rezistenței $R_e$ de la valoarea $R_{ei}$ la valoarea $R_{e2}$ punctul de funcționare 1 al mașinii se schimbă în punctul 2 (fig. 3).

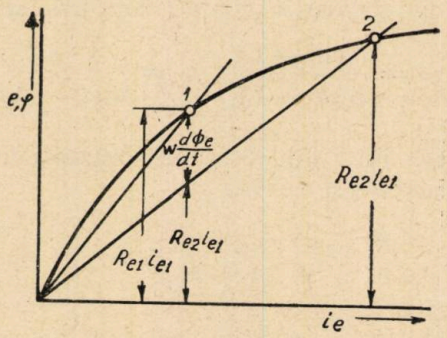



Fig. 3.

Ecuațiile mașinii în pct. 1 și 2 sunt analoge ecuațiilor (1) și (2). Ecuația procesului tranzitoriu va avea forma:

$$W\frac{d\,\Phi_e}{dt} + R_{e2}\,i_e = U_r \tag{9}$$

Luînd ca sistem de referință același sistem care caracterizează regimul inițial de funcționare și notînd cu:

$$\frac{U_r}{U_{r1}} = e \; ; \quad \frac{\Phi_e}{\Phi_{e1}} = \varphi \; ; \quad \frac{i_e}{i_{e1}} = i$$

Ecuația (9) se transformă în:

$$W \frac{d(\Phi_{e1}\varphi)}{dt} + R_{e2}\, i_{e1}\, i = e\, U_{r1} \text{ sau:}$$

$$\frac{w\Phi_{e1}}{R_{e1} i_{e1}} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{R_{e2} i_{e1}}{R_{e1} i_{e1}} i = e \; ;$$

dacă se observă că:

$$\frac{R_{e2}}{R_{e1}} = \frac{b}{a}$$

și se notează cu:

$$\frac{b}{a} T = \frac{W \Phi_{e1}}{\frac{a}{b} R_{e2} i_{e1}} \text{ iar } \frac{a}{b} \frac{t}{T} = \tau$$

și se are în vedere că $\varphi = e$ ecuația (9) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{d\varphi}{a\tau} + \frac{b}{a} i = \varphi \tag{10}$$

Inlocuind în (10) $i = \frac{\varphi}{m - n\varphi}$ unde $m$ și $n$ au expresiile (6) și separînd variabilele, se obține:

$$d\tau = \frac{b(a-1)}{a-b} \frac{d\varphi}{\varphi(b-\varphi)} - \frac{d\varphi}{b-\varphi}$$

Integrînd se determină:

$$\tau = \frac{a-1}{a-b} \ln \varphi - \frac{b-1}{a-b} \ln (b-\varphi) + C$$

Constanta de integrare $C$ se determină din condițiile inițiale: $t = o$ $\tau = o$; $\varphi = 1$, deci:

$$C = \frac{b-1}{a-i} \ln (b-\varphi)$$

iar:

$$\tau = \frac{a-1}{a-b} \ln \varphi + \frac{b-1}{a-b} \ln \frac{b-1}{b-\varphi}$$

de unde:

$$t = T \frac{b(a-1)}{a(a-b)} \ln \varphi + T \frac{b(b-1)}{a(a-b)} \ln \frac{b-1}{b-\varphi} \tag{11}$$

Relația (11) definește variația în timp a fluxului $\varphi$ în cazul excitatricei cu excitație în paralel, atunci cînd rezistența $R_e$ se schimbă instantaneu de la valoarea $R_{e1}$ la $R_{e2}$; ea scoate în evidență influența acelorași factori — constanta de timp ($T$) a mașinii în punctul de funcționare inițial, plafonul ($a$), saturația mașinii ($b$), asupra variației în timp a fluxului mașinii.

## 4. — INTERPRETAREA REZULTATELOR

Mai sus s-au stabilit relațiile (8) și (11) care definesc legea de variație a fluxului unei excitatrice de curent continuu cu excitație independentă și în paralel, în condițiile stabilite inițial. Deci:

$$t = T\,\frac{a-b}{a\,(a-1)}\,(\varphi-1) + T\,\frac{b\,(b-1)}{a\,(a-1)}\,\ln\frac{b-1}{b-\varphi}$$

și (12)

$$t = T\,\frac{b\,(a-1)}{a\,(a-b)}\,\ln\varphi + T\,\frac{b\,(b-1)}{a\,(a-b)}\,\ln\frac{b-1}{b-\varphi}$$

S-a amintit anterior că viteza de răspuns a unei excitatrice o vom caracteriza prin timpul total necesar realizarii plafonului ales și prin viteza de variație a fluxului în timp. Pentru aceasta, dacă se notează cu $t_i$ și $t_p$ timpul total necesar ca fluxul să atingă 0,95 din plafonul impus (pentru excitatricea cu excitația în cele două variante), $t_i$ și $t_p$ au expresiile:

$$t_i = T\,\frac{a-b}{a\,(a-1)}\,\Big|\,\varphi\,\Big|_1^{0,95b} - T\,\frac{b\,(b-1)}{a\,(a-1)}\,\Big|\,\ln(b-\varphi)\,\Big|_1^{0,95b}$$

$$t_p = T\,\frac{b\,(a-1)}{a\,(a-b)}\,\Big|\,\ln\varphi\,\Big|_1^{0,95b} - T\,\frac{b\,(b-1)}{a\,(a-b)}\,\Big|\,\ln(b-\varphi)\,\Big|_1^{0.95b} \qquad (13)$$

Viteza de variație a fluxului în timp se va nota cu $v_i$ și $v_p$ unde $v_i$ și $v_p$ au expresiile:

$$v_i = \frac{d\varphi\,i}{dt} = \frac{a\,(a-1)(b-\varphi)}{T[\,b\,(a-1) - \varphi\,(a-b)]}$$

și (14)

$$v_p = \frac{d\varphi\,p}{dt} = \frac{a\,\;(a-b)\;(b-\varphi)\;\varphi}{T\,b[b\,(a-1) - (a-b)\varphi]}$$

Raportul vitezelor de variație a fluxurilor pentru excitatricea cu excitația în cele două variante are expresia:

$$\frac{v_p}{v_i} = \frac{a-b}{b\,(a-1)}\,\varphi,$$

raport care la $t = O$; $\varphi = 1$ ia valoarea:

$$\frac{a-b}{b\,(a-1)}$$

și care în definitiv reprezintă raportul vitezelor inițiale de creștere a fluxului.

Viteza inițială de creștere a fluxului este o altă mărime importantă care caracterizează viteza de răspuns a unei excitatrice; de ob-

servat că raportul $\frac{a-b}{b(a-1)}$ pentru valori ale lui $b$, cuprinse între 1 și $a$, $(1 < b < a)$, are o valoare subunitară și deci la mașinile normale, totdeauna, $v_{po} < v_{io}$; cu alte cuvinte, din punct de vedere al vitezelor de creștere inițiale, excitatricea cu excitație independentă este superioară excitatricei cu excitația în paralel, în toate cazurile întîlnite în practică.

In cazurile limită: $b = 1$ (mașini ideal saturate) la variații ale lui $a$, $b$ rămîne constant și egal cu valoarea inițială 1, $\frac{v_{po}}{v_{io}} = 1$ și ca atare vitezele inițiale de creștere a fluxului sunt egale; la $b = a$ (mașini nesaturate), $\frac{v_{po}}{v_{io}} = o$, ceea ce arată că viteza inițială de creștere a fluxului excitatricei în paralel este neglijabilă în raport cu aceea a excitatricei cu excitația independentă; dealtfel, această observație se poate face și asupra expresiilor (13) cînd la $a = b$, $t_i =$ minim iar $t_p = \infty$ (mașina nu se autoexcită). Din aceste simple considerații se poate observa că deosebirea calitativă dintre două excitatrice cu excitația în cele două variante se va micșora atunci cînd gradul de saturație a sistemului magnetic va crește, la o saturație completă a sistemului magnetic al mașinii, superioritatea excitatricei cu excitația independentă va dispare complet.

Pentru a urmări modul cum variază fluxul $\varphi$ și viteza de variație a fluxului $\frac{d\varphi}{dt}$ funcție de gradul de saturație al mașinii *(b)* și gradul de forțare ales *(a)* s-au luat în considerație cîteva cazuri concrete; s-a ales pentru aceasta două mașini cu sistem magnetic deosebit; o mașină cu caracteristică de magnetizare standard (fig. 4 curbă trasată

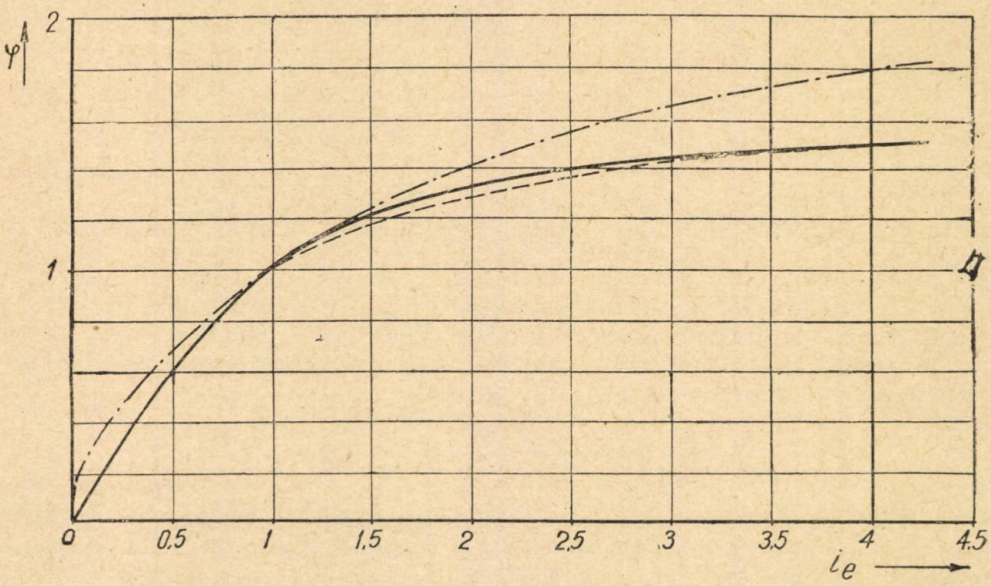



Fig. 4.

în linie plină) și o mașină cu caracteristică de magnetizare proprie excitatoarele de tip rapid utilizate pentru excitarea turbogeneratoarelor fabricate în uzina «Elec rosila» (fig. 4, curba trasată punct-linie)-

Caracter.stica de magnetizare standard s-a asimilat curbei repre. zentată de ecuația: $\varphi = \frac{mi}{1 + ni}$ unde $m$ și $n$ s-au determinat utilizînd relațiile (6) pentru $a = 4$ și $b = 1.5$ (fig. 4, curba trasată punctat) se observă că eroarea comisă prin asimilarea caracteristicii de magnetizare standard cu curba definită mai sus nu întrece 4%, eroare admisibilă în calculele practice și care nu va influența fenomenele sub aspectul lor calitativ.

Caracteristicile de magnetizare a excitatricei considerate pentru $a > 1$ s-au asimilat curbei reprezentată de aceeași ecuație unde însă $m$ și $n$ s-au determinat pentru $a = 4$ și $b = 1{,}8$; în acest caz, cele două curbe practic coincid.

Pentru constanta de timp $T$ în punctul de funcționare în gol la tensiune nominală s-a ales valoarea 1 $s$ și s-au urmărit următoarele cazuri.

I) $a = 2$; $b = 1{,}42$; $T = 1\ s$ — cazul mașinii slab saturate cu grad de forțare definit prin dublarea curentului de excitație; pentru aceste valori ale parametrilor, ecuațiile (12), (13), (14) iau forma:

$$t = 0{,}29\ (\varphi - 1) + 0{,}293\ \ln \frac{0{,}42}{1.41 - \varphi}$$

$$t = 1{,}22\ \ln \varphi + 0{,}515\ \ln \frac{0{,}42}{1{,}42 - \varphi} \qquad (12')$$

$$t_i = 0{,}636\ s$$

$$t_p = 1{,}29\ s \qquad (13')$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{1.42 - \varphi}{0{,}71 - 0{,}29\ \varphi} \text{ cu } \left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)_{t=0} = 1$$

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = 0{,}408\ \frac{(1{,}42 - \varphi)\ \varphi}{0{,}71 - 0{,}29\ \varphi} \text{ cu } \left(\frac{d\varphi_p}{dt}\right)_{t=0} = 0{,}498 \qquad (14')$$

In fig. 5 s-au reprezentat curbele (I), (I') definite de ecuațiile (12'); în fig. 6 curbele (I), (I') definite de ecuațiile (14').

Curbele (I) se referă la excitatricea cu excitație independentă și (I') la excitatricea cu excitație în paralel.

II) $a = 2$; $b = 1{,}28$; $T = 1\ s$

Față de cazul precedent, s-a păstrat gradul de forțare a excitației și s-a variat gradul de saturație a mașinii, trecîndu-se la mașina normal saturată — după caracteristica de magnetizare standard.

In acest caz,

$$t = 0{,}36\ (\varphi - 1) + 0{,}18\ \ln\frac{0{,}28}{1{,}28 - \varphi} \tag{12''}$$

$$t = 0{,}89\ \ln\ \varphi + 0{,}249\ \ln\ \frac{0{,}28}{1{,}28 - \varphi}$$

$$t_i = 0{,}3255\ s \tag{13''}$$

$$t_p = 0{,}505\ s$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{1{,}28 - \varphi}{0{,}64 - 0{,}364\ \varphi} \quad \text{cu} \left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)_{t=o} = 1 \tag{14''}$$

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = 0{,}563\ \frac{(1{,}28 - \varphi)\ \varphi}{0{,}64 - 0{,}369\ \varphi} \quad \text{cu} \left(\frac{d\varphi_p}{dt}\right)_{t=o} = 0{,}563$$

In fig. 5 şi 6 s-au reprezentat curbele (II) şi (II'), corespunzătoare ecuaţiilor (12'') respectiv (14'').

III) $a = 4$; $b = 1{,}8$; $T = 1\ s$

Faţă de primul caz, s-a păstrat gradul de saturaţie a maşinii, variindu-se gradul de forţare a excitaţiei de la 2 la 4.

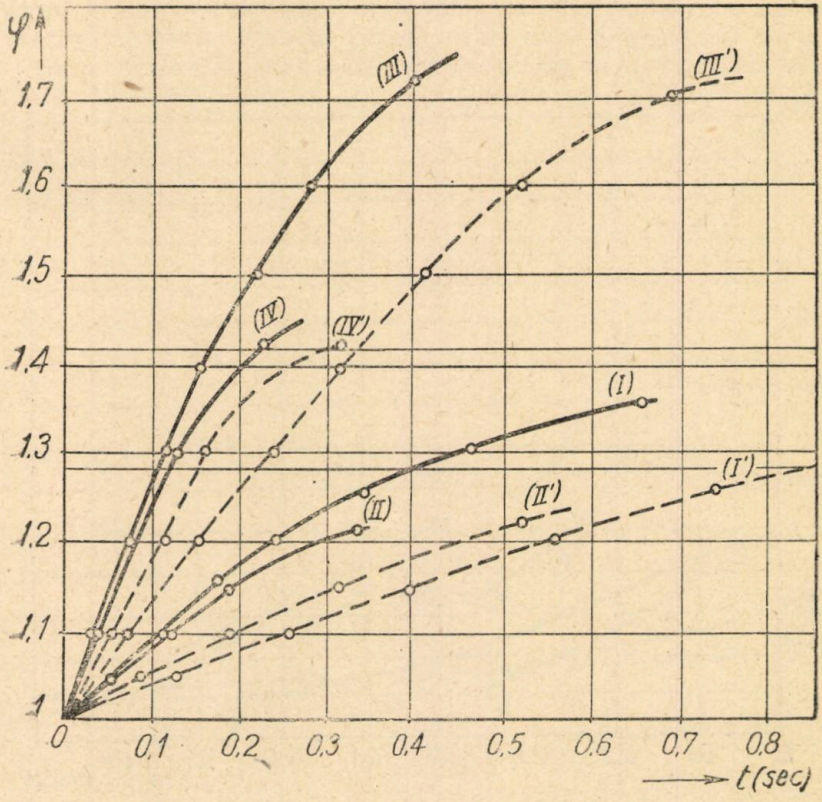



Fig 5.

In acest caz:

$$t = 0.1835\ (\varphi - 1) + 0,122\ \ln \frac{0,8}{1,8 - \varphi} \qquad (12''')$$

$$t = 0,614\ \ln \varphi + 0,164\ \ln \frac{0,8}{1,8 - \varphi}$$

$$t_i = 0,398\ s$$

$$t_p = 0,69\ s \qquad (13''')$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{6\ (1,8 - \varphi)}{2,7 - 1,1} \text{ cu} \left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)_{i=o} = 3 \qquad (14''')$$

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = \frac{2,2\ (1,8 - \varphi)\ \varphi}{0,9\ (2,7 - 1,1\ \varphi)} \text{ cu} \left(\frac{d\varphi_p}{dt}\right)_{t=o} = 1,22$$

In fig, 5 și 6 s-au prezentat curbele (III) și (III′) corespunzătoare ecuațiilor (12′′′) respective (14′′′).

IV) $a = 4$; $b = 1,5$; $T = 1\ s$

Față de cazul precedent, s-a păstrat gradul de forțare schimbîndu-se gradul de saturație a mașinii; acest caz s-a considerat pentru a putea vedea comparativ cum influențează saturația mașinii viteza de răspuns a excitatricei la grade de forțare a mașinii relativ mari.

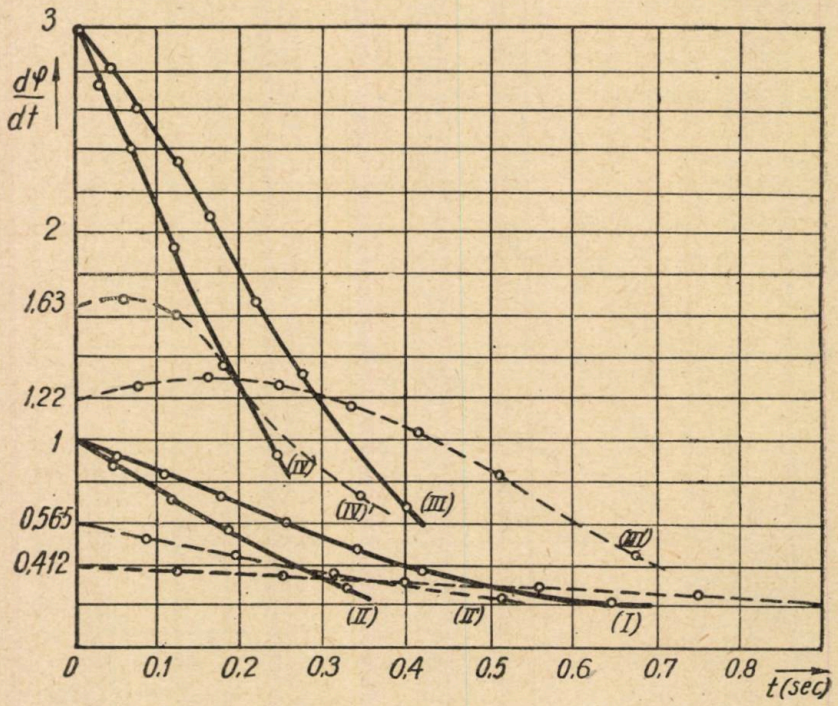



Fig. 6.

In acest caz,

$$t = 0{,}208\ (\varphi - 1) + 0{,}0625\ \ln \frac{0{,}5}{1{,}5 - \varphi} \qquad (12^{IV})$$

$$t = 0{,}45\ \ln \varphi + 0{,}0725\ \ln \frac{0{,}5}{1{,}5 - \varphi}$$

$$t_i = 0{,}2018\ s \qquad (13^{IV})$$

$$t_p = 0{,}29\ s$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{12\ (15, - \varphi)}{4{,}5 - 2{,}5\ \varphi} \text{ cu } \left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)_{i=o} = 3$$

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = \frac{10\ (1{,}5 - \varphi)\ \varphi}{1{,}5\ (4{,}5 - 2{,}5\varphi)} \text{ cu } \left(\frac{d\varphi_p}{dt}\right)_{t=o} = 1{,}67 \qquad (14^{IV})$$

In fig. 5 și fig. 6 s-au reprezentat curbele (IV), (IV′) corespunzătoare ecuațiilor ($12^{IV}$) respectiv ($14^{IV}$).

Analizînd rezultatele obținute anterior, cum și curbele reprezentate în fig. 5 și 6 se pot face următoarele observații:

a. Durata procesului tranzitoriu în majoritatea cazurilor studiate — cu excepția excitatricei cu excitație în paralel din primul caz — în mod practic este inferioară valorii constantei de timp $T$; astfel pentru excitatricea cu excitație independentă, timpul după care fluxul atinge 0,95 din creșterea sa are valorile 0,636 $s$; 0,3255 $s$; 0,397 $s$; 0,2018 $s$; același timp pentru excitatricea cu excitația în paralel ia valorile: 1,29 $s$; 0,505 $s$; 0,69 $s$; 0,29 $s$.

Se vede deci:

Durata procesului tranzitoriu pentru excitatricea în ambele variante este influențată, atît de gradul de forțare a excitatricei, cît și de starea magnetică a mașinii; mărirea gradului de forțare a excitației ca și mărirea gradului de saturație micșorează durata procesului transitoriu; influența saturației se manifesă în mai mare măsură, decît influența gradului de forțare a excitației;

reducerea duratei procesului tranzitoriu, prin mărirea lui $a$ și micșorarea lui $b$ se face în mai mare măsură pentru excitatricea cu excitație în paralel, decît pentru aceeași excitatrice cu excitația independentă; astfel la variația lui $b$ de ex. de la 1,44 la 1,28 ($a$ = const.), durata practică a procesului tranzitoriu scade de la 1,29 s la 0,505 s, pentru excitația paralel, în timp ce pentru excitația independentă, de la 0,636 s la 0,3255 s; același lucru pentru $a$ variabil: $a$ crește de la 2 la 4 de ex. ($b$ = const. = 1,5) timpul se reduce de la 0,505 s la 0,29 s pentru excitația paralel, în timp ce pentru excitatricea cu excitația independentă, de la 0,3255 s, la 0,2018 s;

durata procesului tranzitoriu pentru excitatricea cu excitație independentă, în toate cazurile studiate, este mai mică decît aceea pentru excitatricea cu excitație în paralel; rapoartele $t_p / t_i$ în cele patru cazuri considerate iau valorile: 2,03, 1,55, 1,73, 1,67: în general deci, acest raport este mai mic decît 2. Această observație are o deosebită

importanță, întrucît în literatură. calculîndu-se durata procesului tranzitoriu atunci cînd tensiunea mașinii crește de la zero la valoarea sa nominală, se ajunge la concluzia că acest raport atinge valori relativ mari (cuprinse între 7 și 10) ; rezultatul acesta — valabil pentru mașina nesaturată sau slab saturată — se extinde în mod eronat asupra modului de comportare al mașinii în cazul forțării excitației, cînd mașina este saturată și cînd deosebirea dintre excitatricele cu excitația în cele două variante este cu mult mai puțin sensibilă, după cum s-a văzut mai sus.

Se observă că atît mărirea gradului de forțare a excitației, cît și mărirea gradului de saturație a mașinii micșorează diferența calitativă dintre excitațiile în cele două variante ; mărirea gradului de saturație, avînd influența predominantă, de exemplu, mărirea lui $a$ de la 2 la 4 ($b$ = const.), micșorează raportul $t_p / t_i$ de la 2,03 la 1,73, în timp ce schimbarea lui $b$ de la 1,46 la 1,28 micșorează același raport de la 2,03 la 1,55.

*b*) Vitezele inițiale de creștere a fluxului, în cele patru cazuri studiate, variază în funcție de parametrii $a$ și $b$ în modul următor :

Pentru excitatricea cu excitație independentă viteza inițială de creștere a fluxului este funcție numai de gradul de forțare a excitației ; cu cît gradul de forțare a excitației crește, cu atît viteza inițială de variație a fluxului crește ; la creșterea lui $a$ de la 2 la 4, viteza inițială $v_{io}$ în unități relative crește de la 1 la 3, deci dublarea gradului de forțare a excitației duce la triplarea vitezei inițiale a fluxului,

Viteza inițială de creștere a fluxului în cazul excitatricei cu excitația în paralel este funcție, atît de $a$, cît și de $b$ ; creșterea forțării excitației și a gradului de saturație a mașinii mărește viteza inițială de creștere a fluxului ; influențată predominantă de astă dată manifestînd tot gradul de saturație a excitatricei ; astfel, pentru creșterea lui $a$ de la 2 la 4 și $b$ — const. $v_{po}$ crește de la 0,412 la 1,22, în timp ce pentru $a$ = const. și $b$ variabil de la 1,44 la 1,28 $v_{po}$, crește de la 0,412 la 0,565.

In toate cazurile considerate, viteza inițială de creștere a fluxului pentru excitatricea cu excitația independentă este mai mare decît aceeași mărime pentru excitatricea cu excitația în paralel ; raportul $v_{po} / v_{io}$ în cele patru cazuri considerate ia valorile : 0,408 ; 0,563, 0,407, 0,557, deci valori în jurul lui 0,5 ; valoarea raportului respectiv este independentă de valoarea lui $a$ și se mărește sensibil cînd saturația mașinii crește (la $a$ = const.)

*c*) Curbele variației vitezei creșterii fluxului (fig. 6) sînt puternic influențate de parametrii $a$ și $b$.

Astfel, în cazul excitatricei cu excitația independentă, viteza de variație a fluxului mașinii la un grad de forțare mai mare rămîne superioară aceleeași viteze, în cazul mașinii cu un grad de forțare mai mic. Această observație este valabilă pentru întreaga durată practică a procesului tranzitoriu, independent de starea sistemului magnetic al mașinii.

După timpul $t_i$ — timpul în care fluxul atinge 95% din valoarea sa finală — viteza de variație a fluxului scade la circa 1/3 din valoarea sa inițială.

La un același grad de forțare a excitației $v_i$ la $t \neq 0$ are valori superioare în cazul unei mașini cu sistemul magnetic slab saturat. Această observație are importanță deoarece dacă s-ar judeca calitatea schemei de excitație în funcție numai de viteza inițială ($v_{i03} = v_{i04}$) de creștere a fluxului și de timpul total al procesului tranzitoriu ($t_{i3} = 2t_{i4}$), s-ar putea conclude în mod eronat că mașina cu sistemul magnetic saturat puternic este avantajoasă; curbele III și IV indică în mod clar însă poziția contrarie.

In cazul excitatricei cu excitația în paralel, variația vitezei de creștere a fluxului are un caracter deosebit față de cazul anterior; descreșterea vitezei în timp se face mult mai încet pentru excitatricea în paralel; mai mult în prima fază a procesului tranzitoriu, în cazurile III și IV, viteza de variație a fluxului crește în loc să scadă; acest lucru se poate observa și la curbele (III' și (IV') (fig. 5) care prezintă în prima parte a procesului tranzitoriu un punct de inflexiune.

De asemenea mașina slab saturată, deși inițial are o viteză de creștere a fluxului mai mică decît mașina normal saturată, la un moment dat această situație se schimbă, la $t = 0{,}185$ s. ($s = 4$) și $t = 0{,}31$ s ($a = 2$); de remarcat că la aceste valori ale lui $t$ fluxul în mașina saturată a atins circa $67\%$ din creșterea sa finală, în primul caz și circa $54\%$ în al doilea; dat fiind acest fapt, cum și faptul că durata procesului tranzitoriu se micșorează cu mai mult de două ori în cazul unei mașini normal saturate față de o mașină slab saturată, se poate conclude că din punct de vedere al vitezei de răspuns o mașină excitatoare cu excitația în paralel se va comporta în condiții mai bune cînd va avea un sistem magnetic normal saturat; aceasta cu atît mai adevărat, cu cît viteza mare de variație a fluxului se manifestă, în deosebi, în prima parte a fenomenului tranzitoriu.

In prima parte a procesului tranzitoriu, viteza de variație a fluxului pentru excitatricea cu excitație independentă rămîne superioară aceleași viteze din cazul excitatricei cu excitația în paralel; la un moment dat, intervine egalitatea între cele două viteze, din care moment situația se schimbă în favoarea exacitatricei cu excitația în paralel ($t = 0{,}2$ s, la $a = 4$ și $b = 1{,}5$; $t = 0{,}28$ s, la $a = 4$ și $b = 1{,}8$); de remarcat că la aceste valori ale lui $t$, fluxul în excitatricea cu excitația independentă atinge $80\%$ și $75\%$ pentru $t = 0{,}2$ s. și respectiv $t = 0{,}28$ s. La aceleași valori ale lui $t$, fluxul $\varphi$ — pentru excitatricea cu excitație în paralel — atinge $70\%$, respectiv $45\%$ din valoarea sa finală; acest fapt arată că în cazul cînd se va indica o excitatrice cu excitație idependentă, sistemul ei magnetic urmează a se realiza slab saturat, în acest mod, putîndu-se ridica calitățile ei față de excitatricea cu excitația în paralel.

In considerațiile de mai sus, nu s-a analizat sub nici un aspect constanta de timp $T$ a mașinii, care intervine în ecuațiile stabilite (12,13 și 14): aceste ecuații arată că atît durata procesului tranzitoriu, cît și viteza de variație a fluxului sunt invers proporționale cu valoarea constantei $T$; prezintă importanță să se analizeze sub aspect calitativ modul cum variază constanta $T$, funcție de mărimile caracteristice ale unei mașini electrice.

Se ştie că $T$ poate fi definit ca raportul $L_e / R_e$ unde $L_e$ este inductivitatea totală a circuitului de excitaţie (la saturaţia maşinii corespunzătoare punctelor de funcţionare în gol la tensiune nominală) iar $R_e$ rezistenţa totală a circuitului de excitaţie al excitatricei.

Cum $L_e$ poate fi considerat ca fiind proporţional cu produsul $A/B$ $\tau/\varrho$ *) şi cum acest produs rămîne practic constant la variaţii ale puterii sau turaţiei inerţia electromagnetică a maşinii va fi în definitiv determinată de valoarea rezistenţei $R_e$.

Valoarea rezistenţei $R_e$, la un şir de maşini geometric asemenea, variază funcţie de turaţie şi putere după relaţia :

$$\frac{R_{e1}}{R_{e2}} = \sqrt[4]{\frac{n_1}{n_2}\frac{P_2}{P_1}}$$ — şi dacă $L_e$ rămîne

constant $$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{n_2}{n_1}\frac{P_1}{P_2}} \quad \text{sau} \quad T = \sqrt[4]{\frac{P}{n}} \qquad (15)$$

Cum, atît relaţia $L_e$ = const., cît şi similitudinea geometrică în construcţia maşinilor electrice nu sînt respectate decît în mod aproximativ, relaţia (15) nu poate folosi decît ca un indiciu care poate da tendinţa generală de variaţie a constantei $T$, funcţie de puterea şi turaţia maşinii ; pe baza acestei relaţii se poate afirma că pentru a avea maşini cu constante de timp mici, urmează ca maşinile respective să fie realizate la puteri cît mai mici şi turaţii cît mai ridicate ; creşterea însemnată a lui $T$ se observă la maşini cu $n < 500$ rot/min, fapt pentru care turaţia excitatoarelor urmează a se lua în general $> 500$ rot/min.

Alegerea unei puteri cît mai mici contravine faptului de a se alege grade de forţare cît mai mari şi deci necesităţi de supradimensionare a excitatoarelor. Alegerea unei turaţii $> 500$ rot/min contravine în parte şi poziţiei amintite iniţial în privinţa alegerii sistemului de excitaţie—sistem individual prin dispunerea excitatoarelor pe ax comun cu generatorul—dat fiind că hidrogeneratorii de mare putere sînt în general maşini de tip lent cu viteze de rotaţie $n < 500$ rot/min.

Alegerea sistemului şi schemei de excitaţie, în cazuri concrete, este deci o problemă delicată şi complexă care urmează a fi adînc analizată. Ca indicaţie generală, se poate însă recomanda să se meargă pe calea supradimensionării excitatricei, asigurîndu-se gradul de forţare necesar, şi a alegerii excitatricelor de tip rapid antrenate de maşini primare proprii, în cazul cînd generatorul sincron posedă turaţiii mici de ordinul a 100...300 rot min.

*) A = încărcarea liniară a maşinii ;
B = inducţia în întrefier ;
$\tau$ = pasul polar ;
$\delta$ = mărimea întrefierului maşinii.

## 5.—INCERCĂRI EXPERIMENTALE

Pentru verificarea rezultatelor obținute pe cale teoretica, s-a imaginat și realizat o instalație experimentală pe care s-au făcut diferite încercări.

S-a ales pentru experimentare o mașină normală de curent continuu cu următoarele caracteristici :

$$P = 4{,}4 \text{ kw} ; \; U_n = 400 \text{ V} ; \; n = 1450 \text{ rot/min.}$$

S-a pornit mașina în gol și la turația nominală s-a fixat la bornele mașinii tensiunea nominală $U_{n1} = 400$ V ;

S-a fixat rezistența totală a circuitului de excitație, cum și tensiunea de alimentare a acestui circuit—la încercarea mașinii cu excitație independentă—în așa mod ca la variația instantanee a rezistenței, în al doilea regim staționar , curentul de excitație să crească la o valoare dublă față de regimul inițial. Tensiunea la borne a crescut prin aceasta la $U_{r2} = 520$ V.

In cazul schemei experimentale, parametrii a și b au avut deci valorile :

$$a = 2 ; \; b = 1{,}3$$

S-a oscilografiat variația tensiunii la borne $U_r$ , la funcționarea mașinii cu excitație independentă și apoi cu excitația în paralel. Prin experimentarea mașinii în cele două variante, s-a păstrat identică starea magnetică inițială și finală a mașinii ; de asemeni rezistențele totale din circuitul de excitație a mașinii s-au păstrat practic aceleași.

In fig. 7 și 8 sînt date oscilogramele care arată variația tensiunii $U_r$ la bornele mașinii, în cazul excitației în paralel, respectiv în cazul excitației independente.

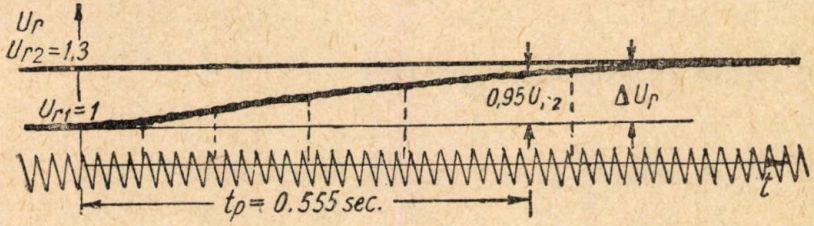



Fig. 7—Excitatricea cu excitația în paralel ($t_p = 0{,}553$ s)

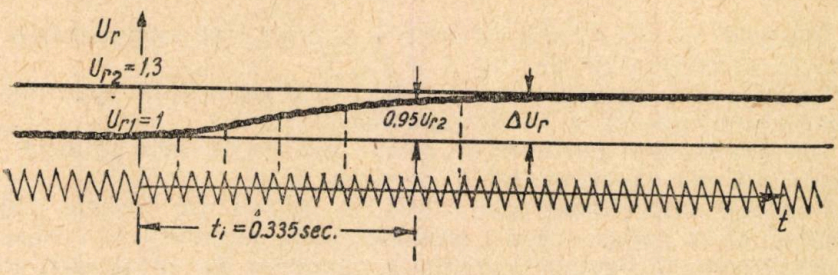



Fig. 8—Excitatricea cu excitația independentă ($t_i = 0{,}335$ s

Pe oscilograme s-a înregistrat și timpul prin oscilografierea c. a. de 50 per/s.

De asemenea s-a determinat experimental constanta de timp a circuitului de excitație $T$, obținîndu-se valoarea :

$$T = 0{,}88 \text{ s.}$$

Avînd determinați parametrii a, b, $T$, s-au putut scrie relațiile (12) și (13) in cazul concret dat :

a) mașina cu excitație independentă :

$$t = 0{,}308\ (\varphi - 1) + 0{,}172 \ln \frac{0{,}3}{1{,}3-\varphi} \qquad (12^{V})$$

$$t_i = 0{,}335 \text{ s.} \qquad (13^{V})$$

b) mașina cu excitație în paralel :

$$t = 0.82 \ln \varphi + 0{,}245 \ln \frac{0{,}3}{1{,}3-\varphi} \qquad (12^{VI})$$

$$t_p = 0{,}533 \text{ s.} \qquad (13^{VI})$$

Rezolvînd ecuațiile ($12^{V}$) și ($12^{VI}$) s-a obținut pentru :

a) mașina cu excitație independentă :

**Tabela 1**

| t/s | 0 | 0,0466 | 0,1 | 0,1652 | 0,2505 | 0,335 | 0,385 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| φ/u. r. | 1 | 1,05 | 1,15 | 1,15 | 1,2 | 1,235 | 1 25 | 1,3 |
| $\Delta U_t$ / mm | 0 | 1,15 | 2,26 | 3,39 | 4,52 | — | 5,65 | 6,5 |

b) mașina cu excitație în paralel:

**Tabela 2**

| t/s | 0 | 0,0851 | 0,1778 | 0,2825 | 0,418 | 0,553 | 0,621 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| φ/u. r. | 1 | 1,05 | 1,1 | 1,15 | 1,2 | 1,235 | 1,25 | 1,3 |
| $\Delta U_r$ / mm | 0 | 1,26 | 2,52 | 3,75 | 5,1 | — | 6.3 | 7,25 |

Relațiile : $\varphi = f(t)$ din tabelele 1 și 2 au fost reprezentate prin puncte în oscilogramele din fig. 7 și fig. 8.

Valorile $\Delta U_r$ în mm din tabelele 1 și 2 reprezintă valorile măsurate pe oscilogramă la $t$ corespunzător.

Din examinarea curbelor de calcul construite prin puncte și a curbelor ridicate experimental se observă :

Punctele determinate prin calcul se înscriu în curbele ridicate experimental în ambele cazuri studiate ; dacă se consideră curba medie experimentală, deviația maximă a punctelor de la această curbă (fig. 7) nu întrece ± 5%, deci o eroare admisibilă ;

Inscrierea punctelor determinante prin calcul în curbele ridicate experimental se face mai bine în cazul mașinii cu excitație independentă, lucru explicabil, dacă se consideră ipotezele simplificatorii făcute în plus pentru excitatricea cu excitația în paralel.

Rezultatele experimentale confirmă deci rezultatele teoretice, permițînd totodată și aprecierea erorilor săvîrșite prin ipotezele simplificatorii formulate inițial ; în cazul cel mai defavorabil al mașinii cu excitație în paralel, eroarea maximă nu întrece $\pm 5\%$. Acest lucru dovedește că ipotezele simplificatorii făcute sînt admisibile iar metoda dezvoltată se remarcă prin simplitate și printr-o exactitate suficientă pentru calculele din practică.

## 6. — CONCLUZII

Rezultatele obținute și expuse, permit tragerea următoarelor concluzii :

a. Pentru excitația mașinilor sincrone este recomandabil sistemul individual de excitație ; mașinile excitatoare alese se recomandă a fi mașini de putere redusă (puterea necesară gradului de forțare predeterminat afectată de un coeficient care va evidenția caracterul de funcționare intermitentă) și de turație ridicată ; dispunerea excitatoarelor pe același ax cu generatorul este recomandabilă în cazul turbogeneratoarelor și hidrogeneratoarelor cu viteze de rotație mijlocii și mari ($n > 500$ rot/min.).

b. Metoda expusă în lucrare dă posibilitate ca pe cale analitică să se determine sub aspect calitativ viteza de răspuns a excitatricei mașinilor sincrone ; metoda respectivă este suficient de exactă și comodă în raport cu metodele grafice indicate în literatură ; prin metoda expusă se dă posibilitatea să se predetermine, prin calcul, alegerea sistemului magnetic al mașinii excitatoare și comportarea calitativă a acesteia la operația de forțare.

c. Problema pusă spre rezolvare este o problemă delicată, care ridică aspecte complexe ; ea poate fi rezolvată ținînd cont de diferiți factori caracteristici ; durata procesului tranzitoriu, viteza inițială de variație a fluxului și în fine variația vitezei creșterii fluxului ; modul simplist — aprecierea vitezei de răspuns și deci a calității excitatricei numai după valoarea $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=o}$ și uneori modul eronat de tratare a acestei probleme în unele materiale de specialitate nu poate da indicații valabile, concludente în aprecierea calităților unei scheme de excitație ; pentru a se putea da un răspuns complet, este necesar să se determine variația fluxului în timp, durata procesului tranzitoriu, viteza inițială de variație a fluxului și însăși variația în timp a acestei viteze.

d. Din analiza comparată a excitatricei cu excitația în cele două variante, urmează ca sistemul magnetic al excitatricei cu excitație independentă să se aleagă slab saturat iar acela al excitatricei cu excitația în paralel, normal saturat ; gradul de saturație se va alege avînd în vedere și plafonul ce urmează a fi realizat ; pentru a se obține o

viteză mai mare de răspuns este avantajos și necesar ca gradul de forțare a excitației să fie cît mai ridicat, forțarea excitației la valori ale lui a cuprinse între 2 și 4 corespunzînd unei forțări normale a excitației.

e. Superioritatea excitatricei cu excitație independentă față de aceea cu excitația în paralel, deși se manifestă, nu este de natura celei indicate în literatură ; durata procesului transitoriu la excitatricea în primă variantă, la saturație și grad de forțare normal, este aproximativ jumătate din durata aceluiași proces în cazul excitatricei în a doua variantă ; viteza de variație a fluxului este de circa 2 ori mai mare în primul caz, față de al doilea, aceasta fiind valabil numai în prima parte a procesului transitoriu.

f. In anumite cazuri, cu ajutorul unui sistem automat simplu, pentru excitatricea în paralel, se poate obține calități superioare care pot dispensa schema de excitație de prezența subexcitatoarelor, prin crearea artificială la t=o a unor condiții de forțare a excitației, superioare celor indicate sau acceptabile pentru mașină și întreruperea automată a procesului de excitație la 0,95 din creșterea admisibilă a fluxului. In acest mod, pentru excitatricea în paralel se realizează caracteristici comparabile sau chiar superioare unei excitatrice independente.

g. Practic rezolvarea problemei poate fi obținută în modul următor :

Se alege sistemul de excitație, turația și gabaritul excitatoarei ; se alege o caracteristică de magnetizare și un anumit grad de forțare, determinîndu-se astfel a și b.

Se stabilesc relațiile (12), (13), (14) reprezentîndu-se curba $\varphi = f_1$ (t) ; aceasta pentru a se putea determina viteza de răspuns după standarde (3) și a se putea compara după acest criteriu caracteristicile obținute cu performanțele diferitelor mașini deja realizate.

Se determină $t_i$ , $t_p$ , $v_{io}$, $v_{po}$ și $v_i = f_2 (t)$ ; $v_p = f_3 (t)$.

Se variază a și b în limite admisibile din punct de vedere tehnico-economic, se determină schema de excitație-excitatrice cu excitație independentă sau în paralel — și performanțele obținute cu aceasta.

Pentru a = optim ; b = optim, se determină puterea, turația și caracteristicile magnetice ale mașinii ; mașina proiectîndu-se ca o mașină de tip normal — respectîndu-se bineînțeles condiția tensiunii minimale stabile, etc.

h. Concluziile de mai sus vor da indicații numai sub aspect calitativ asupra comportării excitatricei în sarcină ; aceasta dat fiind factorii noi care vor interveni în cazul procesului tranzitoriu al mașinii în sarcină și care n-au fost introduși în cadrul studiului prezent.

Primit la redacție la 1 IV 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *G. N. Petrov*—„Mașini electrice", partea a doua, pag 57—62 G.E.I. 1947.
2. *M. P. Kostenko*—„Mașini electrice", partea specială, pag. 367—372 G.E.I. 1947.
3. *L. M. Piotrovschi*—„Mașini electrice" pag. 353—355 G.E.I.1949.

## БЫСТРООТЗЫВЧИВОСТЬ МАШИН ПОСТОЯННОГО ТОКА, РАБОТАЮЩИХ В СХЕМАХ ВОЗБУЖДЕНИЯ СИНХРОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

(Краткое содержание)

В настоящей работе дан сравнительный анализ возбудителей с независимым и параллельным возбуждением относительно их быстроотзывчивости.

Цель работы заключается в основном в определение влияния насыщения магнитной цепи машины и „потолка" на быстроотзывчивость при работе возбудителя с возбуждением в двух вариантах.

Рассмотренный режим работы—режим холостого хода, а решение задачи производится аналитическим путём; анализируется быстроотзывчивость, скорость изменения потока машины а также время необходимое для достижении „потолка".

Полученные результаты проверенные опытным путём, могут нам дать указания при выборе типа возбудителя для возбуждения синхронных машин.

## LA VITESSE DE RÉPONSE DES MACHINES À COURANT CONTINU QUI FONCTIONNENT DANS LE CIRCUIT D'EXCITATION DES GÉNÉRATEURS SYNCHRONES

(Résumé)

L'article présente une analyse des excitatrices à excitation indépendente et paralléle au point de vu de leur vitesse de réponse.

On établit l'influence manifestée par la saturation du circuit magnetique de la machine et de son „plafond" sur la vitesse de réponse quand l'excitatrice fonctionne dans les 2 variantes.

Le regim de fonctionnement consideré est celui de la marche à vide. La rèsolution du problème est analitique; on étudie la vitesse initialle de réponse, la vitesse de variation du flux de la machine ainsi que le temps nécessaire pour atteindre le plafond.

Les rezultats obtenus ont été verifiés par experience, pouvant offrire des indications pour la choix du type de l'excitatrice pour l'excitation des machines synchrones.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

## ELECTRONICĂ

537.311.6
621.317.029.516

# IMPEDANȚE ELECTRONICE SIMETRICE

## VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

de V. POPESCU-MĂLĂEȘTI și E. ROGAY

Se știe că într-o teorie unitară a oscilatorilor, oscilatorii de relaxare se împart în două clase: prima se obține cu un organ dinatron, așezat în serie cu o inductanță și a doua se obține cu un organ arc, așezat în derivație cu un condensator. In ambele cazuri, rezistența negativă întreține oscilațiile de relaxare.

S-a pus întrebarea: oscilatorul de relaxare simetric, în care din cele două clase intră sau face parte dintr-o a treia clasă de oscilatori de relaxare ? Răspunsul a fost dat în altă lucrare [1].

Circuitul simetric tip multivibrator (fig. 1) se prezintă între punctele *a-b* ca o impedanță simetrică (fig. 2), avînd o componentă rezis-

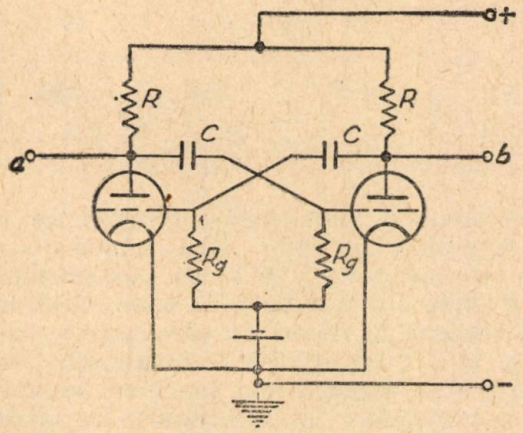



Fig. 1—Circuitul simetric tip multivibrator.

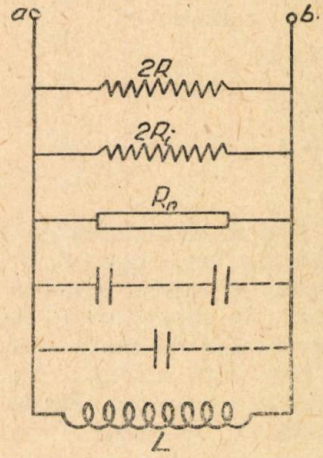



Fig. 2—Schema echivalentă a circuitului simetric tip multivibrator.

tivă negativă și o componentă inductivă în paralel [1]. Valorile acestor componente din schema echivalentă sînt

$$\left| R_n \right| = \frac{2}{S}\left(1 + \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right) \tag{1}$$

$$\mathcal{L} = \frac{2}{S\omega_0}\left(1 + \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right) \tag{2}$$

unde

$$\omega_0 = \frac{1}{C\,Rg.}$$

S-a căutat ca aceste rezultate teoretice să fie verificate experimental. Rezultatul acestor verificări face obiectul lucrării de faţă.

S-au folosit două tuburi *AC* 2, alegîndu-se secţiuni asemănătoare. Elementele montajului fiind :

$$R = 1\ k\Omega$$
$$R_g = 2\ M\Omega$$
$$C = 3000\ pF$$

a rezultat pentru $\omega_0$ valoarea :

$$\omega_0 = \frac{1}{2.\ 10^6.\ 3000.\ 10^{-12}} = \frac{1000}{6}\ \text{rad/s, deci}\ f_0 = 26{,}5\ \text{Hz.}$$

S-a lucrat în cinci puncte de funcţionare ale tuburilor şi anume :

(1) $Ug = -4\ V$ , $Ua = 160\ V$ (4) $Ug = -4{,}5\ V$ , $Ua = 160\ V$
(2) $Ug = -4\ V$ , $Ua = 180\ V$ (5) $Ug = -4{,}5\ V$ , $Ua = 180\ V$
(3) $Ug = -4\ V$ , $Ua = 200\ V$

In aceste puncte s-au determinat în prealabil parametrii *S* şi *Ri* prin metode simple dinamice, obţinîndu-se următoarele valori :

| Punctul / Parametrii | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
|---|---|---|---|---|---|
| S mA/V | 2 | 2,39 | 2,75 | 1,54 | 2,04 |
| Ri kΩ | 16 | 13,75 | 11 | 22 | 15.5 |

Pentru determinarea experimentală a impendanţei echivalente a circuitului între bornele *a* şi *b*, într-unul din cele cinci puncte, s-a procedat în modul următor: s-a conectat între *a* şi *b* un condensator variabil de capacitate γ. Aplicînd între aceleaşi borne o tensiune de la un generator de mare rezistenţă internă în raport cu sarcina, s-a variat frecvenţa acestuia, pînă cînd, la o valoare dată a capacităţii s-a obţinut o rezonanţă. Pentru constatarea acesteia, s-a conectat între *a* şi masă un voltmetru electronic, rezonanţa corespunzînd — în acest caz — maximului indicaţiei voltmetrului. Disimetrizarea introdusă de acest voltmetru în montaj este neglijabilă, rezistenţa sa fiind suficient de mare (sute de kΩ), iar capacitatea influenţînd puţin la frecvenţele de ordinul zecilor de hertzi la care s-a lucrat.

Cunoscînd frecvenţa de rezonanţă şi capacitatea corespunzătoare, γ, s-a determinat inductanţa din relaţia de acord :

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{\omega^2\,\gamma},$$

comparîndu-se apoi valoarea obţinută cu aceea dată de formula teoretică (1).

In același timp, măsurîndu-se tensiunea $U$, între $a$ și masă, la rezonanță, precum și $2\,E$, forța electromotrice a generatorului, s-a dedus raportul.

$$\frac{2\,U}{2\,E} = \frac{r}{r + R_G},$$

unde $r$ este impedanța la rezonanță a circuitului derivație echivalent între bornele $a$ și $b$, iar $R_G$ este sezistența generatorului. (Practic, generatorul simetric de curent constant a fost realizat legînd cîte o rezistență de valoare mare cunoscută, $\frac{R_G}{2}$, în serie pe fiecare braț cu ieșirea unui generator simetric de forță electromotrice constantă. Cum rezistența $R_G$ este foarte mare, de ordinul MΩ,

$$\frac{2\,U}{2\,E} \approx \frac{r}{R_G}, \text{ deci}$$

$$r \approx R_G \frac{U}{E}$$

Rezistența $r$ fiind echivalenta rezistențelor $2\,R$, $2\,R_i$ și $-R_n$, legate în derivație, cunoscînd $R$ și $R_i$ s-a putut determina

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{2\,R} + \frac{1}{2\,R_i} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}$$

sau

$$R_n = \frac{r\,\varrho}{r - \varrho}$$

S-au obținut următoarele rezultate experimentale, care s-au comparat cu valorile lui $\mathcal{L}$ și $R_n$ obținute prin formulele teoretice (1) și (2)

$$|R'_n| = \frac{2}{S}\left(1 + \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right) = \mathcal{L}'\,\omega_o$$

Punctul (1):

| γ μF | f Hz | $R_G$ MΩ | E V | U mV | $\mathcal{L}$ H | $\mathcal{L}'$ H | $R_n$ kΩ | r kΩ | ϱ kΩ | $R'_n$ kΩ | $\frac{\mathcal{L}-\mathcal{L}'}{\mathcal{L}'}$ | $\frac{R_n - R'_n}{R'_n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 22,5 | 13,6 | 15 | 11 | 14,3 | 13,7 | 2,39 | 10 | 1,9 | 2,34 | 4,4% | 2,1 % |
| 3,5 | 24 | 13,6 | 15 | 15 | 13,3 | 12,7 | 2,22 | 13,6 | 1,9 | 2,21 | 4,7% | 0,45% |
| 3 | 26 | 13,6 | 10 | 21 | 12 | 12,05 | 2 | 28,6 | 1,9 | 2,04 | 0,4% | 2 % |
| 2,8 | 28 | 13,6 | 10 | 52 | 11,35 | 11,6 | 1,88 | 68 | 1,9 | 1,95 | 1,3% | 3 5 % |

Punctul (2) :

| γ μF | f Hz | $R_G$ MΩ | E V | U mV | $\mathcal{L}$ H | $\mathcal{L}'$ H | $R_n$ kΩ | r kΩ | ϱ kΩ | $R'_n$ kΩ | $\frac{\mathcal{L}-\mathcal{L}'}{\mathcal{L}'}$ | $\frac{R_n-R'_n}{R'_n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 17,5 | 4 | 10 | 14 | 16,6 | 16 5 | 2,78 | 5,6 | 1,86 | 2,82 | 0,6 % | 1.4 % |
| 5 | 19 | 4 | 10 | 20 | 14,7 | 14,1 | 2,47 | 8 | 1,86 | 2,44 | 4,25% | 1,2 % |
| 4,6 | 20,5 | 4 | 10 | 29 | 13,4 | 13,1 | 2,24 | 11,6 | 1,86 | 2,23 | 2,3 % | 0,45% |
| 4,2 | 22,5 | 4 | 10 | 41 | 12 | 11,9 | 2 | 16,4 | 1,86 | 2,' | 0,83% | 4,75% |
| 4 | 23,5 | 4 | 10 | 76 | 11,4 | 11.5 | 1,91 | 30,4 | 1,86 | 1,98 | 0,86 % | 3,5 % |

Punctul (3) :

| γ μF | f Hz | $R_G$ MΩ | E V | U mV | $\mathcal{L}$ H | $\mathcal{L}'$ H | $R_n$ kΩ | r kΩ | ϱ kΩ | $R'_n$ kΩ | $\frac{\mathcal{L}-\mathcal{L}'}{\mathcal{L}'}$ | $\frac{R_n-R'_n}{R'_n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 20 | 4 | 10 | 32 | 12 | 12.6 | 2 | 12,8 | 1,85 | 2,1 | 4,75% | 4,75% |
| 4,7 | 21,5 | 4 | 10 | 87 | 11,3 | 11,6 | 1,9 | 35 | 1,85 | 1,95 | 2.6 % | 2,55% |

Punctul (4) :

| γ μF | f Hz | $R_G$ MΩ | E V | U mV | $\mathcal{L}$ H | $\mathcal{L}'$ H | $R_n$ kΩ | r kΩ | ϱ kΩ | $R'_n$ kΩ | $\frac{\mathcal{L}-\mathcal{L}'}{\mathcal{L}'}$ | $\frac{R_n-R'_n}{R'_n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 22,5 | 4 | 10 | 13,5 | 17,4 | 16,7 | 2,91 | 5,4 | 1,92 | 2,94 | 4,2 % | 1 % |
| 2 | 31 | 4 | 10 | 34 | 13,5 | 13,2 | 2,24 | 13,6 | 1,92 | 2,23 | 2,3 % | 1,35% |
| 1,7 | 34,5 | 4 | 10 | 62 | 12,4 | 12,5 | 2,07 | 24,8 | 1,92 | 2,08 | 0,8 % | 0,5 % |
| 1,5 | 38 | 4 | 10 | 135 | 11,55 | 11,7 | 1,93 | 54 | 1,92 | 1,97 | 1,85% | 2,1 % |

Punctul (5) :

| γ μF | f Hz | $R_G$ MΩ | E V | U mV | $\mathcal{L}$ H | $\mathcal{L}'$ H | $R_n$ kΩ | r kΩ | ϱ kΩ | $R'_n$ kΩ | $\frac{\mathcal{L}-\mathcal{L}'}{\mathcal{L}'}$ | $\frac{R_n-R'_n}{R'_n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 21 | 13,6 | 15 | 9 | 14,9 | 14,3 | 2.49 | 8,15 | 1,88 | 2,48 | 4 % | 0,4% |
| 3,5 | 23,5 | 13 6 | 15 | 12,5 | 13,9 | 13,2 | 2,32 | 11,3 | 1,88 | 2,29 | 5,3% | 0,9% |
| 3 | 26 | 13,6 | 15 | 32 | 12 | 12,4 | 2 | 29 | 1,88 | 1,96 | 3,2% | 0,5% |
| 2,8 | 27 | 13,6 | 15 | 71 | 11,55 | 11,9 | 1,94 | 64,5 | 1,88 | 1,93 | 2,9% | 0,5% |

Verificarea experimentală a rezultatelor teoretice este mulţumitoare.

Prin micşorarea capacităţii $\gamma$, se constată scăderea valorii rezistenţei negative. La un moment dat, ea poate deveni mai mică, în modul, decît mărimea rezistenţei pozitive totale din circuit, făcînd astfel posibilă apariţia de autooscilaţii. Lucrînd în aceste condiţii, s-a putut măsura valoarea inductanţei echivalente, fără a mai aplica o excitaţie exterioară.

S-a procedat în felul următor: s-a variat capacitatea $\gamma$, pînă la producerea oscilaţiilor sinusoidale în circuit (constatate cu un osciloscop, conectat între borna $b$ şi masă. Măsurînd frecvenţa acestor oscilaţii, printr-o metodă de comparaţie, s-a calculat inductanţa cu formula

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{\omega^2 \gamma}$$

S-a verificat valoarea obţinută cu cea teoretică. De asemenea, s-a verificat că, lucrînd la limita de oscilare, rezistenţele negative, în modul, egalează rezistenţa pozitivă totală din circuit:

$$|R_n| = \frac{2 R R_i}{R + R_i}$$

sau

$$\omega_o \mathcal{L} = \frac{2 R R_i}{R + R_i}, \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{\omega_o} \frac{2 R R_i}{R + R_i} = \mathcal{L}_o$$

Datele obţinute sînt cuprinse în următoarea tabelă:

| Punctul | $\gamma$ μF | f Hz | $\mathcal{L}$ H | $\mathcal{L}'$ H | $\mathcal{L}_o$ H | $\frac{\lvert \mathcal{L} - \mathcal{L}' \rvert}{\mathcal{L}'}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 2,7 | 28,5 | 11,2 | 11,50 | 11,3 | 2,6% |
| (2) | 3,9 | 24 | 11,15 | 11,3 | 11,2 | 1,3% |
| (3) | 4,6 | 22 | 11.3 | 10,8 | 11,1 | 4,6% |
| (4) | 1,5 | 38 | 11,55 | 11,7 | 11,5 | 1,3% |
| (5) | 2,7 | 28,5 | 11 | 11,5 | 11,3 | 4,3% |

Pentru a putea trage concluzii mai generale din rezultatele măsurătorilor, s-au trasat curbele generalizate

$$\mathcal{L} S \omega_o = 2 \left(1 + \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right) = f\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) \text{ şi}$$

$$R_n S = 2 \left(1 + \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right) = f\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$$

figurînd pe aceleaşi grafice şi punctele obţinute experimental (fig. 3 şi fig. 4).

Din date şi curbe rezultă că valorile deduse din măsurători confirmă concluziile teoriei. Diferenţele provin în special din cauza erorilor făcute în aprecierea parametrilor tuburilor în cele cinci puncte de lucru.

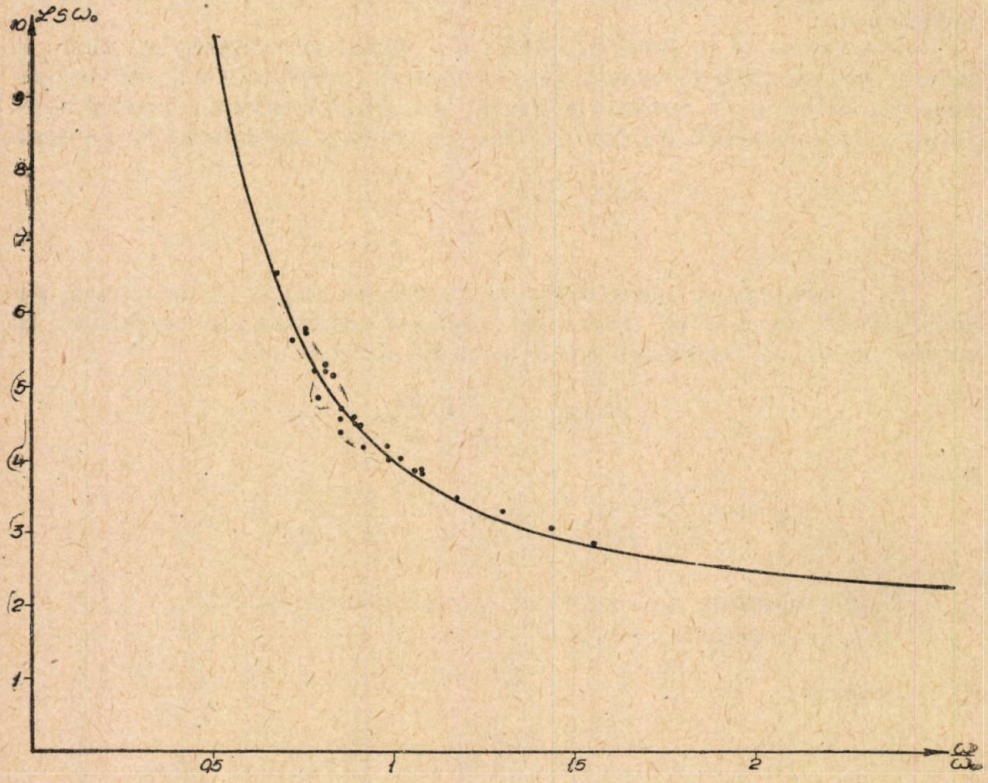



Fig. 3—Curba generalizată de variaţie a inductanţei echivalente cu frecvenţa şi punctele determinate experimental.

Prin micşorarea capacităţii $\gamma$, dincolo de limita de amorsare a oscilaţiilor sinusoidale, s-a constatat trecerea treptată la oscilaţii de relaxare, la limită ($\gamma = 0$), obţinîndu-se oscilaţiile clasice ale multivibratorului. S-a măsurat frecvenţa acestor oscilaţii, în următorul punct de funcţionare :

$$Ua = 160\ V,$$
$$Ug = -4\ V,$$

obţinînd valoarea $f = 87\ Hz$.

Analitic din consideraţiuni făcute asupra încărcării şi descărcării condensatorilor $C$ din circuit, expresia frecvenţei rezultă :

$$f = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{1}{ln \frac{\Delta\ Ua}{U_0 - Eg}}$$

unde $\omega_o = \frac{1}{Rg\ C}$, $\Delta\ U_a$ este căderea de tensiune anodică pe rezistenţa $R$ cînd tubul conduce; $U_o$ este tensiunea de tăiere a curentului prin tub, la valoarea de lucru a tensiunii anodice; $Eg$ este negativarea la care se lucrează.

In cazul de faţă, această formulă dă valoarea: $f' = 86\ Hz$.

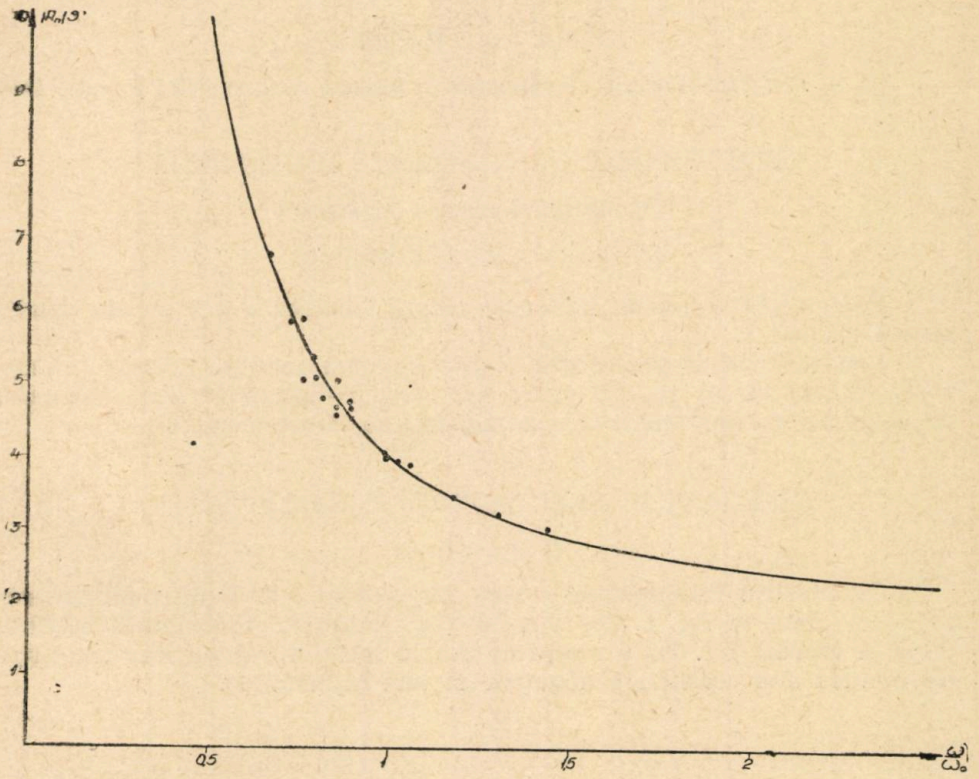



Fig. 4—Curba generalizată de variaţie a rezistenţei negative echivalente cu frecvenţa şi punctele determinate experimental.

Pe baza aproximării caracteristicei dinatron a montajului printr-o curbă de gradul trei, se mai poate stabili pentru frecvenţa oscilaţiilor şi formula

$$f'' = \frac{R_n}{1{,}86\ \mathcal{L}} = \frac{\omega_o}{1{,}86}$$

Folosind această formulă, se obţine $f'' = 89{,}5\ Hz$.

Se constată că prima formulă dă un rezultat mult mai apropiat de realitate — o diferenţă de 1,15%, faţă de cea de 2,3% rezultată din a doua formulă. Acest lucru este explicabil prin faptul că, pe

cînd în deducerea celei dintîi se porneşte de la analiza fenomenelor tranzitorii care se produc în montaj, ultima are la bază o ipoteză asupra caracteristicei dinatron de gradul trei, care nu corespunde întocmai realităţii.

*Catedra de Electronică*

Primit la redacţie la 25 V 1956.

## BIBLIOGRAFIE

[1] *T. Tănăsescu*—Comunicare prezentata în Sesiunea Academiei R.P.R., iunie 1956.

## СИМЕТРИЧНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ИМПЕДАНСЫ

### Экспериментальная проверка

### (Краткое содержание)

Измеряется входной импеданс между точками *a* и *в* схемы, приведенной на рис. 1.

Проверяются теоретические формулы, установленные прежде [1], которые указывают на то, что схема мультивибратора имеет между анодами отрицательное сопротивление и параллельную индуктивность.

## IMPÉDANCES ÉLECTRONIQUES SYMÉTRIQUES

### (Résumé)

On mesure l'impedance entre les points *a* et *b* du montage représenté dans la fig. 1. On vérifie les formules théoriques établies dans le travail [1]. On y montrait que le multivibrateur présente entre les anodes une resistance négative et une inductance.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.396.611.21

# OSCILATOR ELECTRONIC DE MARE STABILITATE

de EDMOND NICOLAU şi ALEXANDRU POPESCU

Oscilatorii cu cuarţ s-au impus de cîteva decenii prin buna stabilitate de frecvenţă pe care o realizează. Aceşti oscilatori se utilizează astăzi în mod curent la toate standardele primare de frecvenţă lucrînd în benzile de frecvenţă de radiodifuziune; chiar în microunde se utilizează standarde primare în a căror structură intră un oscilator cu cuarţ. In articolul de faţă se va face mai întîi o analiză rapidă a diverselor tipuri de oscilatori descrişi în literatură, după care se va analiza funcţionarea şi se vor da datele experimentale privind un nou tip de oscilator cu cuarţ, realizat în laboratorul de măsuri în înaltă frecvenţă al Institutului Politehnic Bucureşti. Acest tip de oscilator se caracterizează prin faptul că utilizează un montaj gen Colpitts, la care s-a eliminat influenţa tubului prin introducerea unei reacţii negative, iar amplitudinea este controlată electronic printr-un sistem de CAV. Oscilatorul s-a dovedit a fi extrem de stabil faţă de variaţia condiţiilor de lucru. Astfel, o variaţie de 100 $V$ a tensiunii anod ce produce o variaţie a frecvenţei de lucru de numai 1 la $10^8$. De asemenea schimbarea tubului oscilatorului produce variaţii de frecvenţă de acelaşi ordin de mărime.

Pentru a menţine frecvenţa independentă faţă de variaţiile de temperatură ale mediului ambiant, cristalul de cuarţ a fost montat într-un termostat — realizat de asemenea prin mijloace proprii. Termostatul este cu termometru cu contacte — realizat tot prin mijloace proprii. Termometrul acţionează asupra elementelor încălzitoare printr-un releu electronic.

Instalaţia realizată constituie oscilatorul unui standard primar de frecvenţă care se construieşte în laboratorul de măsuri în înaltă frecvenţă al Institutului Politehnic Bucureşti.

2. In literatură se descriu un număr destul de mare de oscilatori la care frecvenţa este stabilizată cu ajutorul unui cristal de cuarţ. Dintre aceste montaje, cele mai răspîndite sînt cele la care cristalul este montat între grilă şi catod, (fig. 1) sau între grilă şi anod (fig. 2).

In afară de aceste montaje, se recomandă pentru obţinerea unei bune stabilităţi montajele: Colpitts (fig. 3), Franklin (fig. 4) şi oscilatorul cu cuarţ cu stabilizare în punte (fig. 5).

Pentru oscilatorii cu cristalul montat între grilă şi catod, respectiv între grilă şi anod, există studii teoretice foarte aprofundate care permit urmărirea şi predeterminarea funcţionării lor [1]. Rezultatul acestor studii arată că, în general, cu aceste montaje nu se poate obţine o stabilitate prea mare. Cauza principală stă în faptul că atunci

cînd condiţiile de lucru ale tubului variază, se produce simultan o variaţie a capacităţilor parazite ale tubului — şi deci o variaţie a frecvenţei de lucru a oscilatorului. Acest lucru este mai puţin jenant la montajul Colpitts, la care capacitorii circuitului oscilant sînt dispuşi în paralel cu capacităţile parazite ale tubului. O variaţie relativ importantă a acestora nu va influenţa deci decît prea puţin frecventa de

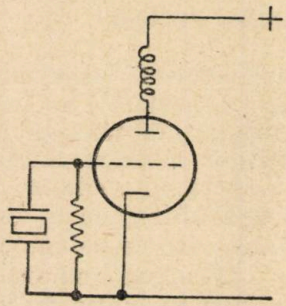



Fig. 1—Oscilator cu cristal de cuarţ între grilă şi catod.

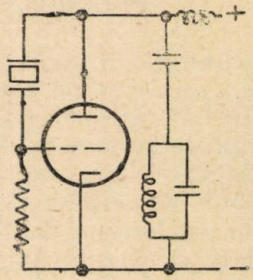



Fig. 2—Oscilator cu cristal de cuarţ între grilă şi anod.

lucru, deoarece variaţiile efective care intervin în formula frecvenţei sînt mai mici; în paralel cu mica variaţie a capacităţii parazite se află capacitatea relativ mare a circuitului oscilant. Variaţia efectivă este deci mult redusă, Acest fapt a făcut ca încă de timpuriu acest montaj să se utilizeze la unele standarde primare de frecvenţă [2].

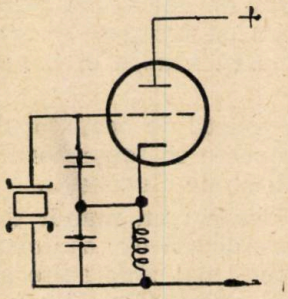



Fig. 3—Oscilator Colpitts cu cristal de cuarţ.

Oscilatorul Franklin şi oscilatorul cu stabilizare în punte utilizează un principiu cu totul diferit. La un amplificator se face o reacţie printr-un circuit care conţine cristalul de cuarţ. Frecvenţa depinde prea puţin de caracteristicile amplificatorului. La oscilatorul Franklin,

aceasta se realizează luînd nişte capacităţi de cuplaj cît mai mici. Impedanţa lor este deci foarte mare, astfel încît cuplajul dintre cristal şi amplificator este foarte slab.

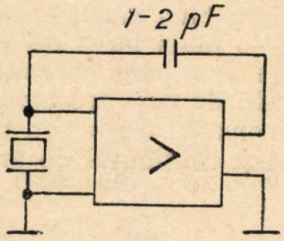



Fig. 4—Oscilator Franklin.

Oscilatorul cu stabilizare în punte are schema din fig. 5. La el se realizează simultan două lucruri şi anume: o stabilizare a frecvenţei graţie cristalului de cuarţ şi o stabilizare a amplitudii graţie termistorului din punte. La acest oscilator se realizează astfel un deziderat care la celelalte tipuri enumerate nu se realiza: amplificatorul lucrează în clasă A. La toate celelalte tipuri limitarea amplitudinii os-

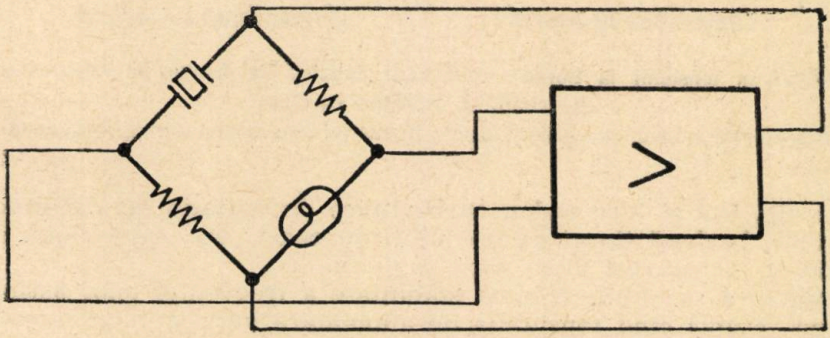


Fig. 5—Oscilator cu stabilizare în punte.

cilaţiilor se face numai prin neliniaritatea caracteristicilor tubului s-au tuburilor din montaj Implicit rezultă că toate analizele care se vor face pentru determinarea condiţiilor de funcţionare ale acestor oscilatori în condiţii liniare, vor fi mai mult sau mai puţin departe de condiţiile reale de funcţionare. In toate cazurile pe lîngă semnalul de frecvenţă fundamentală vor fi prezente în circuitul anodic şi semnale de frecvenţe armonice. Ori se ştie că armonicele influenţează frecvenţa de lucru a oscilatorilor, aşa cum a arătat Groszkowsky [4]. Datorită însă faptului că cristalul de cuarţ are un factor de calitate foarte ridicat, influenţa armonicelor este redusă la montajele studiate. In orice caz, oscilatorul trebuie astfel proiectat încît conţinutul de armonice al curentului anodic să fie cît mai mic. La oscilatorii cu cristal de cuarţ între grilă şi anod, sau între grilă şi catod, acest conţinut

de armonice poate fi relativ mare în anumite condiţii — care corespund evident regiunilor de stabilitate minimă. La aceste tipuri de oscilatori se constată că pentru a exista oscilaţii, impedanţa anodică trebuie să se comporte inductiv. Spre a se realiza acest deziderat se poate dispune în paralel pe bobina anodică un capacitor care se variază. In general, va exista o plajă largă de valori ale capacităţii acestui capacitor pentru care se produc oscilaţii. Există însă o valoare maximă a capacităţii, dincolo de care trecîndu-se, oscilaţiile încetează. In jurul acestei valori se constată o zonă în care amplitudinea oscilaţiilor este mare, şi evident şi conţinutul de armonice este ridicat.

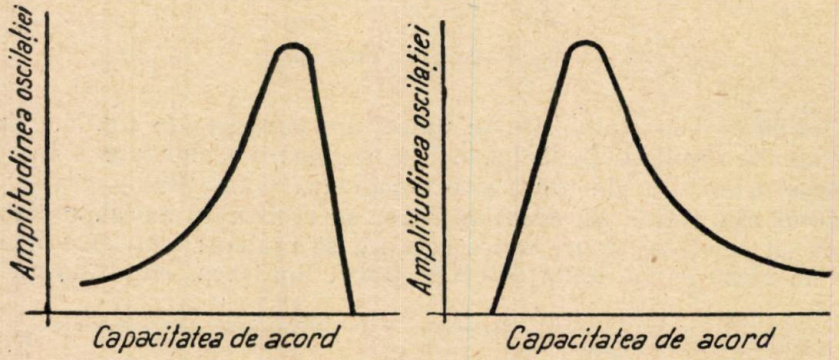



**Fig. 6—Variaţia tensiunii la bornele capacităţii anodice, în funcţie de valoarea acestei capacităţi, la oscilatori cu cuarţ**
**a) cuarţul este montat între grilă şi catod; b) cuarţul este montat între grilă şi anod.**

In fig. 6 *a* şi *b* se redau curbe tipice de variaţie a amplitudinii oscilaţiilor, la două tipuri de oscilatori cu cuarţ: cu cuarţul între grilă şi catod, şi cu cuarţul între anod şi grilă.

Pentru a se obţine o bună stabilitate a frecvenţei unor astfel de oscilatori, atunci cînd tensiunile de alimentare variază, este necesar ca pentru capacitatea anodică să se adopte o valoare corespunzătoare regiunii în care amplitudinea oscilaţiilor este relativ mică, iar această amplitudine depinde relativ puţin de capacitatea anodică.

Fără a intra în studiul detaliat al acestor tipuri de oscilatori — care este efectuat în literatură — este necesar a efectua în primul rînd un studiu general liniar al oscilatorilor cu reacţie.

3. Schema generală a unui oscilator cu reacţie se poate prezenta ca în fig. 7. Amplificatorul avînd un cîştig A, iar circuitul de reacţie efectuînd o reacţie de tensiune $\bar{\beta}$, condiţia de oscilare este condiţia lui Barkhausen.

$$A\,\bar{\beta} = 1 \qquad (1)$$

Pentru a se efectua un studiu mai amănunţit al oscilatorilor — chiar în condiţiile simplificate în care circuitul se consideră liniar — este necesar să se precizeze atît schema amplificatorului, cît şi schema circuitului de reacţie.

Schema amplificatorului în cazul liniar poate fi reprezentată printr-un cuadripol liniar nereciproc, așa cum a procedat unul dintre noi. In ceeace privește cuadripolul de reacție, este convenabil de a-l reprezenta printr-un cuadripol în $\pi$. Aceasta pentru că în modul acesta în impedanțele verticale se pot include și impedanțele parazite ale cuadripolului activ.

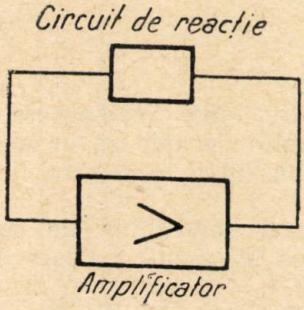



Fig. 7—Schema bloc a unui amplificator cu reacție.

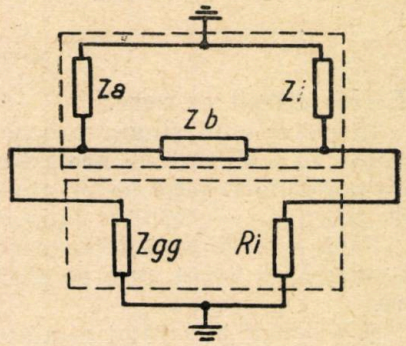



Fig. 8—Schema echivalentă pasivă a montajului din fig. 7.

In schema echivalentă din fig. 8, $R_i$ este rezistența internă a ultimului tub al amplificatorului. iar $\mu$ este amplificarea totală a cuadripolului activ.

Pentru a se determina condițiile de oscilare este suficient a impune condiția ca determinantul corespunzînd schemei din fig. 8 să fie nul. Această condiție complexă este echivalentă cu două condiții reale, din care una dă frecvența de oscilație, iar a doua relația care trebuie să existe între elementele montajului pentru ca să obțină o oscilație întreținută — mai exact pentru ca sistemul să fie la limita de oscilație.

In cazul de față, condiția generală de oscilație este

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{gg} + \mathbf{Z}_a & -\mathbf{Z}_a & O \\ -\mathbf{Z}_a & \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c & -\mathbf{Z}_c \\ \mu\,\mathbf{Z}_{gg} & -\mathbf{Z}_c & \mathbf{Z}_c + R_i \end{vmatrix} = O \qquad (2)$$

In (2) prin $\mathbf{Z}_{gg}$ s-a notat impedanța de intrare în amplificator. Admițînd o funcționare liniară lipsită de curenți de grilă, această impedanță este infinită. Din dezvoltarea determinantului (2), toți termenii care nu cuprind pe $\mathbf{Z}_{gg}$ sînt deci neglijabili față de termenii care cuprind pe $\mathbf{Z}_{gg}$. Condiția (2) revine deci la

$$(\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c)(\mathbf{Z}_c + R_i) + \mu\,\mathbf{Z}_a\,\mathbf{Z}_c - \mathbf{Z}_c^2 = O \qquad (3)$$

Condiția (3) încă poate fi simplificată în diverse ipoteze. Dacă impedanța de ieșire a amplificatorului este foarte mare, atunci (3) se reduce la egalarea cu zero a termenilor care înmulțesc pe $R_i$ :

$$\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c = O \qquad (4)$$

Evident, această condiţie nu poate fi satisfăcută decît dacă cuadripolul de reacţie este nedisipativ.

In plus, această condiţie arată că în cazul nedisipativ, reactanţele echivalente $Z_a$, $Z_b$ şi $Z_c$ nu pot fi toate de acelaşi semn. Considerînd în particular cazul în care una din cele trei reactanţe este nulă, rezultă că celelalte două trebuie să fie de semne contrarii.

Menţionăm că relaţia (4) este totdeauna exactă, atunci cînd

$$\mu = Z_c / Z_a \tag{5}$$

şi $Z_c$ este diferit de zero.

In cazul unui singur tub, $\mu$ este pozitiv, deci reactanţele impedanţelor $Z_a$ şi $Z_c$ sînt de acelaşi semn. Rezultă de aici că, în acest caz, cuadripolul de reacţie se prezintă, fie ca un filtru trece sus, fie ca un filtru trece jos — rezultat bine cunoscut.

Fără a trece mai departe cu analizarea condiţiilor de oscilare, este necesar a arăta cum se pune problema în cazul oscilatorilor cu cuarţ.

4. Precum au arătat studiile lui W. G. Cady, D. W. Dye şi ale altora, din punct de vedere electric cristalele de cuarţ se prezintă ca fiind echivalente cu circuitul avîud schema din fig. 9.

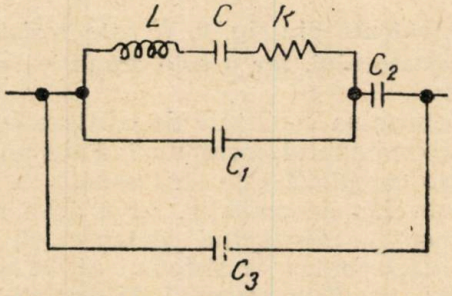



Fig. 9—Schema echivalentă din punct de vedere electric a unui cristal de cuarţ.

In schema echivalentă, circuitul serie se caracterizează prin faptul că are un $Q$ foarte mare, datorită faptului că inductanţa echivalentă are o valoare foarte mare, iar capacitatea serie echivalentă o valoare extrem de mică. Capacitatea $C_1$ este capacitatea datorită încărcării feţelor cristalului cu sarcini electrice. Capacitatea $C_2$ reprezintă capacitatea dintre cristal şi electrod. Capacitatea $C_3$ este capacitatea parazită a conexiunilor la cuarţ.

Admitanţa cuarţului este

$$Y_q = j\omega C_3 + 1 / \left\{ \frac{1}{j\omega C_2} + 1 / \left[ j\omega C_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 1 / \left( j\omega L + R + \frac{1}{\omega j C} \right) \right] \right\} \tag{6}$$

Această admitanță se poate pune sub o formă mai simplă, introducînd notațiile

$$C_1 + C_2 = C_t \tag{7}$$

$$-\omega^2 L C + j\omega R C + 1 + C/C_1 = \sigma \tag{8}$$

$$-\omega_2 L C + j\omega R C + 1 + C/C_t = \nu \tag{9}$$

Cu noile notații, admitanța cuarțului se scrie

$$Y_q = j\omega C_3 + j\omega (C_1 C_2/C_t)\ (\sigma/\nu) \tag{10}$$

Această formulă trebue utilizată spre a se calcula frecvența oscilatorului și relația trebuie să existe între elemente, spre a putea exista oscilații întreținute.

In cazul oscilatorului cu cristalul montat între anod și grilă $Z_b = 1/Y_q$ ; în cazul oscilatorului cu cristalul între grilă și catod, $Z_a$ va fi egal cu impedanța rezultată din punerea în paralel a cuarțului cu rezistența de grilă.

Un studiu exact va trebui însă să țină seamă și de prezența capacităților parazite ale tubului. In $Z_a$ trebuie să se includă și capacitatea grilă — catod; în $Z_b$ capacitatea anod — grilă ; în $Z_c$ capacitatea anod — catod. Includerea acestor capacități este esențială pentru un studiu exact deoarece aceste capacități variază, atît de la un tub la altul, cît și pentru un același tub, în funcție de tensiunile de alimentare.

A priori rezultă că pentru a se obține un oscilator de mare stabilitate este necesar ca efectul acestor capacități parazite să fie cît mai mic. Pentru aceasta, montajul trebuie ales astfel încît în condiția care dă frecvența de lucru, să nu intervină aceste capacități sau—în orice caz—aceste capacități să apară dispuse în paralel cu alte capacități stabile, de valoare considerabil mai mare decît cele ale tubului.

Aceasta se poate realiza utilizînd un circuit acordat format dintr-un inductor și doi capacitori, dispus într-unul din montajele din fig. 10.

Dintre cele trei posibilități doar montajul din fig. 10 b apare ca fiind capabil de a oscila. In plus, aici apar stabilizate două din cele trei capacități ale tubului.

Se constată ușor că montajul din fig.10 a nu corespunde unui oscilator, tensiunea reintrodusă pe grilă fiind în fază cu cea anodică. Din contra, montajul din fig. 10 b conduce la un montaj auto oscilant. In plus, capacitățile parazite grilă-catod și anod-catod sînt stabilizate; în paralel, pe ele fiind dispuse capacitățile considerabil mai mari ale circuitului oscilant.

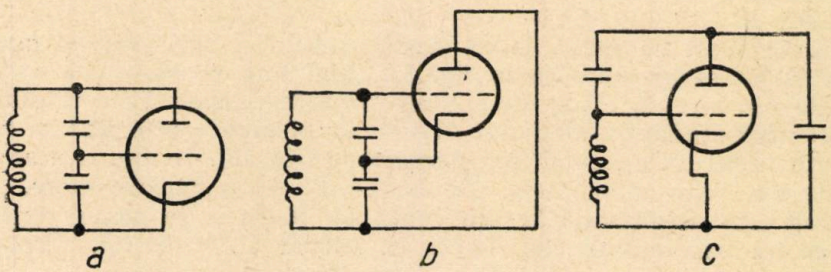



Fig. 10—Trei tipuri de a dispune pe un tub un circuit oscilant cu două capacități și o inductanță.

Datorită simplităţii, s-a ales acest tip de oscilator pentru studiul de faţă, cu deosebirea că inductorul a fost realizat printr-un cristal de cuarţ Deoarece şi elementele acestui cristal îşi variază valorile cu temperatura, el a fost introdus într-un termostat, realizare proprie. Asupra sa se va reveni ulterior.

Schema de ansamblu se vede în fig. 11.

Montajul prezintă cîteva particularităţi asupra cărora se va insista.

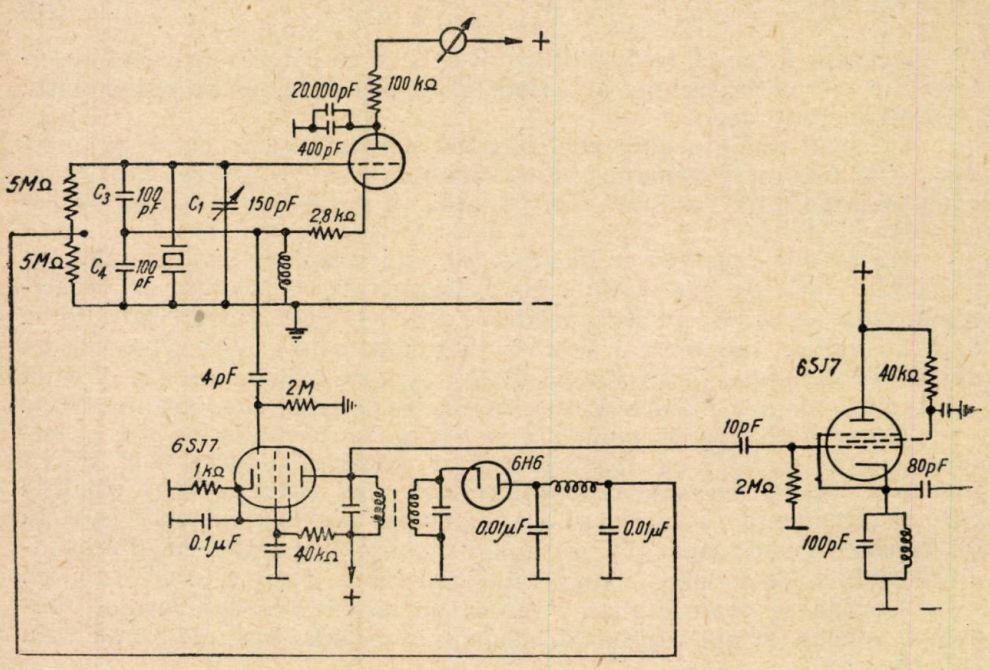



Fig. 11—Schema oscilatorului studiat.

In primul rînd, este de observat introducerea unei reacţii puternice prin rezistorul din catodul tubului oscilator. Această reacţie s-a introdus spre a face montajul cît mai stabil faţă de variaţiile condiţiilor de lucru. A doua particularitate constă în introducerea unui control automat al amplitudinii oscilaţiilor. Acest din urmă control se realizează preluînd o parte a tensiunii din catodul tubului, amplificînd-o, detectînd-o şi aplicînd tensiunea continuă rezultată pe grila tubului oscilator.

5. In acest paragraf, se va studia montajul oscilatorului adoptat. Tubul izolat se prezintă ca în fig. 12. Aici sînt reprezentate atît elementele din circuit, cît şi elementele parazite—capacităţile tubului.

Pentru studierea efectului diverselor elemente este util să se reprezinte tubul ca un cuadripol nereciproc (fig. 13). In fig. 13 a se arată schema cu toate elementele. De oarece $C_2$ are o valoare mare, reactanţa sa este neglijabilă la frecvenţa de lucru şi se poate considera deci ca un scurtcircuit (fig. 13 b). In adevăr $C_2 = 20\ nF$. Frecvenţa

de lucru fiind 1 *MHz*, rezultă că $X_C = 8\ \Omega$. Rezultă deci schema din fig. 13 b. Pe ea se poate constata ușor rolul diverselor elemente. In primul rînd, se observă că cele trei capacități parazite ale tubului intervin în moduri diferite. Capacitatea anod-catod $C'_{ac}$ vine în paralel

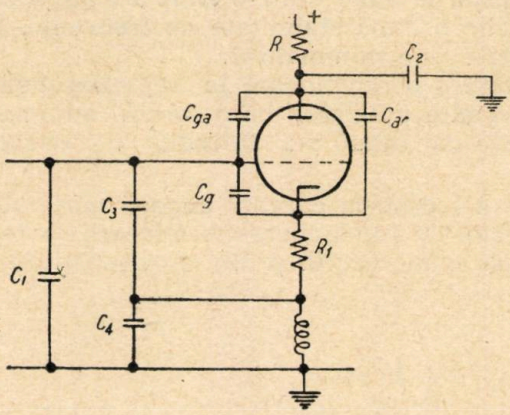



**Fig. 12—Schema tubului oscilator, cu elementele parazite și elementele de circuit.**

pe rezistența de reacție negativă. Variația ei produce deci o variație a reacției. Dar chiar admițînd o valoare de 10 *pF* pentru această capacitate, rezultă o valoare mare pentru reactanță—de ordinul a 16 *k* Ω, deci mare față de rezistența de reacție, care este de ordinul a 1 *k* Ω. Eventualele variații ale acestei capacități nu prezintă importanță.

Capacitatea parazită grilă—anod $C_{ga}$ vine în paralel pe capacitatea $C_1$ a montajului. Alegînd această capacitate cît mai mare, efectul eventualelor variații ale lui $C_{ga}$ vor fi neglijabile.

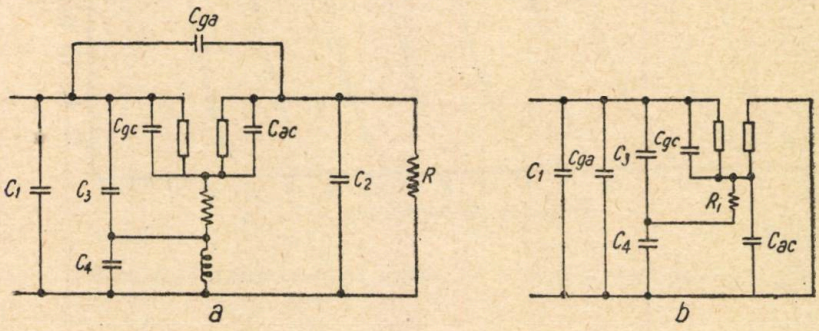



Fig. 13—Scheme echivalente ale montajului din fig. 12.

Trebuie însă precizat că mărimea lui $C_1$ atrage după sine un inconvenient și anume: această capacitate este montată în paralel cu cuarțul. Capacitatea totală în paralel cu cuarțul crește deci o dată cu $C_1$. Aceasta duce implicit la o reducere a calităților selective ale cuarțului.

In ceea ce priveşte capacitatea parazită grilă—catod $C_{gc}$, ea nu prezintă un interes deosebit în cazul de faţă. de oarece—datorită reacţiei negative puternice din catod—impedanţa grilă—masă este foarte mare şi practic cu totul independentă de $C_{gc}$.

In modul acesta, se vede dintr-o simplă analiză calitativă că montajul propus promite o bună stabilitate de frecvenţă, deoarece efectul capacităţilor parazite este minimalizat.

Spre a se asigura o funcţionare în regiunea neliniară a caracteristicii—ceea ce permite utilizarea unui control automat al amplitudinii oscilaţiilor—în serie cu tubul s-a introdus o rezistenţă de valoare mare $R_1$.

In general, s-a lucrat cu curenţi anodici mici—sub 1 $mA$, (aprox. 0,1 $mA$,) care puncte de funcţionare se situează în regiunea neliniară a caracteristicii, aşa cum rezultă şi din caracteristicile tubului (fig. 14).

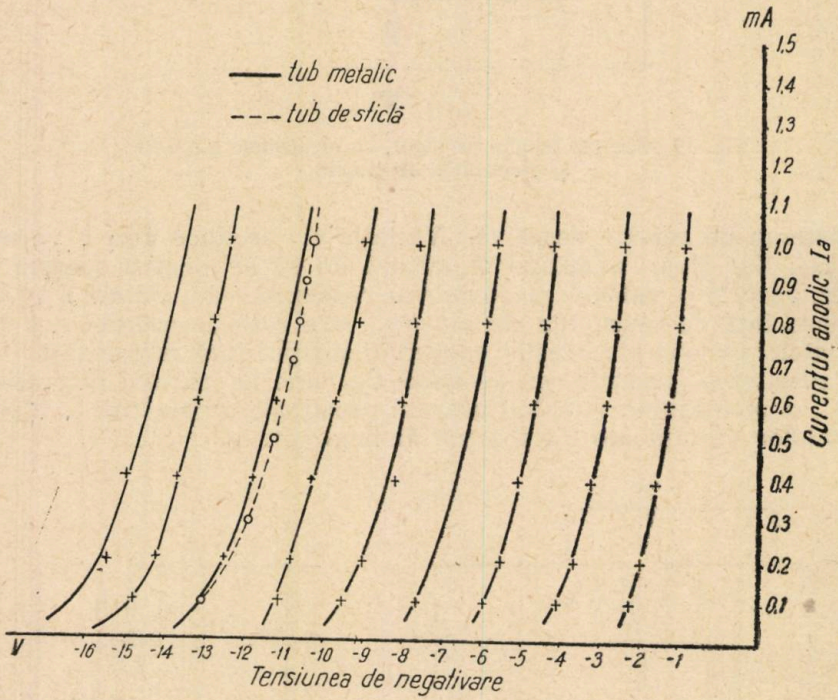



Fig. 14—Caracteristicile $I_a - U_g$ pentru $U_a$ = constant, la tubul 6 C 5.

6. Spre a verifica dacă controlul automat al amplitudinii funcţionează în bune condiţii, s-a ridicat o serie de curbe: amplitudinea oscilaţiilor în funcţie de tensiunea anodică şi o altă serie: tensiunea de control automat a amplitudinii, în funcţie de tensiunea anodică. Ca parametru s-a luat valoarea capacităţii $C_1$. In fig. 15, s-au trasat ambele curbe pe acelaşi grafic, spre a se putea face o comparaţie. Ridicarea curbelor de tensiune de *CAA* s-a făcut cu un voltmetru electro-

nic prezentînd o rezistență de intrare foarte mare, în paralel cu o capacitate. Curbele tensiunii de *CAA* s-au notat cu *U*; curbele amplitudinii oscilațiilor s-a notat cu *A*.

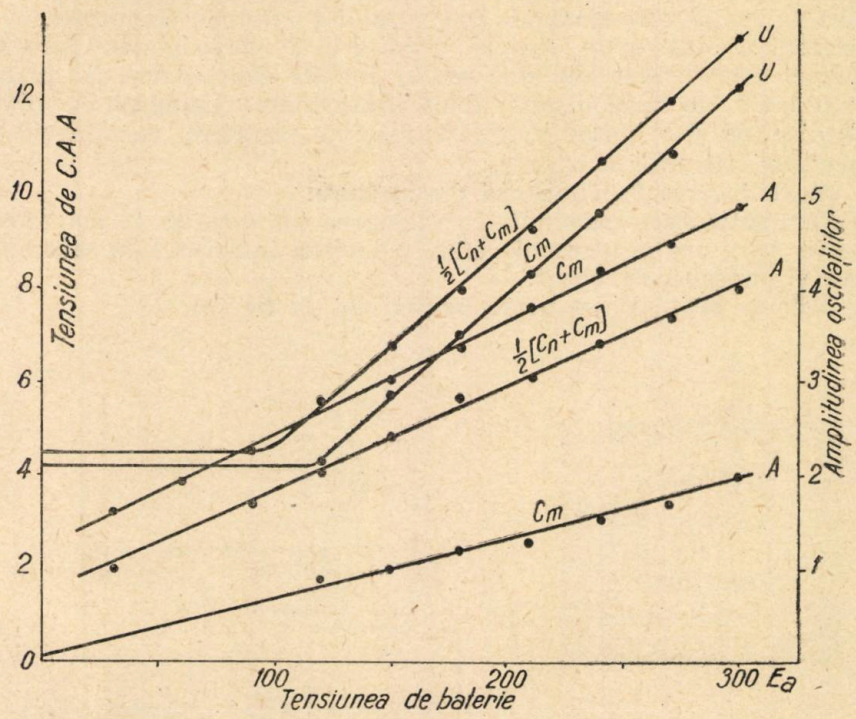



Fig. 15—Curbele tensiunii de control automat al amplitudinii (U) și curbele de amplitudine a oscilațiilor (A).

Curbele s-au ridicat pentru trei valori ale capacității $C_1$: capacitate minimă (notată $C_m$); capacitate maximă (notată $C_M$) și capacitate medie (notată $\frac{1}{2}[C_m + C_M]$) Curba de tensiune de *CAA* corespunzînd la $C_M$ nu s-a putut ridica.

Din aceste curbe rezultă că în tot domeniul de variație a tensiunii de baterie, amplitudinea oscilațiilor variază perfect liniar cu tensiunea bateriei. La fel, din momentul în care sistemul de *CAA* intră în funcțiune, tensiunea de *CAA* variază liniar cu tensiunea de baterie.

Ar fi de așteptat ca introducerea sistemului de *CAA* să atragă după sine o menținere a oscilațiilor la o amplitudine constantă. Din datele experimentale de pînă acum se constată că aceasta nu are loc. Totuși, experimental, se constată că introducerea dispozitivului de *CAA* atrage după sine o creștere importantă a stabilității oscilatorului. Credem că această problemă trebuie analizată matematic, ținîndu-se seamă că caracteristica care probabil poate fi considerată ca fiind ex-

ponenţială. De asemenea trebuie să se ţină seama de faptul că ecuaţia care descrie funcţionărea montajului nu este cea clasică.

7. Pentru a se asigura o bună stabilitate de frecvenţă, cristalul de cuarţ este introdus într-un termostat construit în Laboratorul de măsuri în înaltă frecvenţă al Institutului Politehnic Bucureşti. El are în prezent o construcţie simplă, urmînd a fi perfecţionat. In stadiul actual, el este format din mai multe incinte concentrice din material izolant, între ele fiind dispuse două încălzitoare. Urmează ca ulterior să se dispună şi o cutie metalică masivă necesară menţinerii unei temperaturi cît mai constante.

Incălzitoarele funcţionează discontinuu.

Elementul care comandă funcţionarea lor este un termometru cu contacte, care are rezervorul chiar în incinta interioară în care se află dispus şi cristalul de cuarţ.

Schema electrică se poate urmări tot în fig. 16.

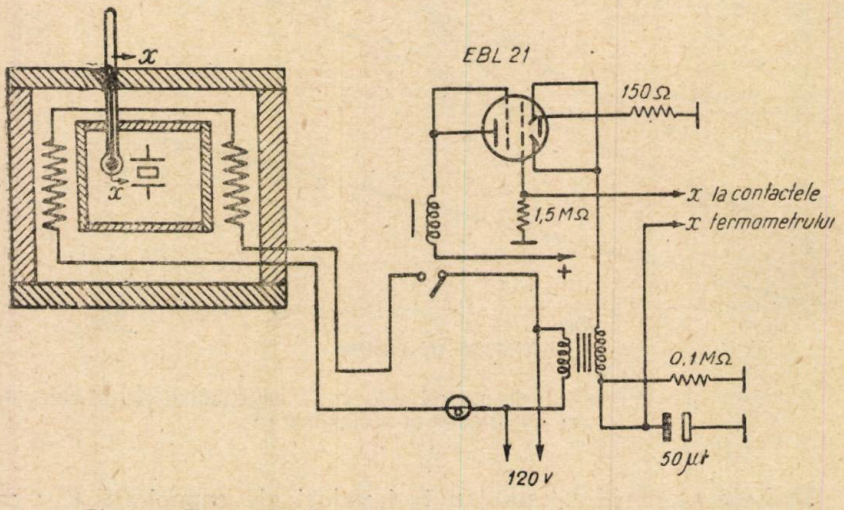



Fig. 16—Termostatul şi dispozitivul de control al temperaturii.

Din studiile întreprinse de noi rezultă că termometrele cu contacte se deteriorează datorită faptului că, la dispozitivele accesibile nouă, contactul electric pentru încălzitoare este stabilit însăşi de mercur. In modul acesta, în interiorul termometrului se produc stabiliri şi întreruperi de curent, care provoacă deteriorarea termometrului după un număr de ore de funcţionare. La sistemul adoptat de noi, termometrul nu face decît să aplice o tensiune pe grila unui tub care funcţionează ca amplificator, releul fiind dispus în circuitul său anodic. In modul acesta, termometrul acţionează asupra unei impedanţe foarte mari—impedanţa de intrare în tub. De data aceasta, curenţii sînt foarte mici—curenţii de grilă ai tubului — de ordinul lui $10^{-7}$ A.

Din experienţele efectuate pînă în prezent rezultă că schema propusă de noi are o funcţionare foarte bună. Nu s-a putut urmări stabilitatea în timp, deoarece nu se dispune de nici un alt oscilator care

să aibă o stabilitate comparabilă. Probele se referă numai la stabilitatea frecvenţei faţă de variaţiile tensiunilor de alimentare şi faţă de schimbarea tuburilor.

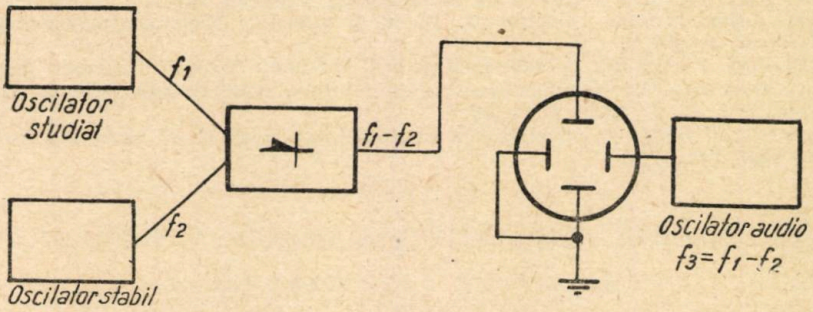



Fig. 17—Montajul adoptat pentru verificarea stabilităţii frecvenţei la oscilatorul studiat.

Montajul adoptat pentru verificarea stabilităţii este cel din fig. 17.

Un frecvenţmetru heterodină foarte stabil produce o interferenţă cu semnalul nostru local. Semnalul rezultant are o frecvenţă de ordinul sutelor de *Hz*. Acest semnal este aplicat pe plăcile verticale ale unui osciloscop catodic. Pe plăcile orizontale ale acestui osciloscop se aplică un semnal local dela un generator audio *RC* stabil. Se obţine o elipsă, reglînd frecvenţa oscilatorului local ca să coincidă cu frecvenţa rezultînd din heterodinare.

Variind tensiunile oscilatorului, frecvenţa sa variază foarte puţin, ceea ce atrage după sine o rotire lentă a elipsei pe ecranul osciloscopului. Cronometrînd perioada mişcării, rezultă variaţia de frecvenţă.

Experienţele efectuate arată că oscilatorul realizat prezintă o stabilitate de frecvenţă de 1 la $10^8$, pentru variaţii ale tensiunii de alimentare de $100V$. Rezultatul poate fi eventual chiar mai bun. Nu se pot realiza însă precizii mai bune în măsurări decît în cazul cînd se dispune de oscilatori mai stabili. In condiţiile de lucru, cele mai mari dificultăţi s-au întîmpinat din cauza trepidaţiilor localului — trepidaţii care atrăgeau după sine variaţii ale frecvenţei aparatelor auxiliare.

Experimental s-a arătat că schimbarea tubului oscilator conduce la variaţii de frecvenţă, de acelaşi ordin de mărime.

8. In concluzie, oscilatorul propus şi realizat — la care, faţă de schemele propuse în literatură, s-a introdus o reacţie negativă de curent — se caracterizează printr-o stabilitate foarte bună, ceea ce îl face apt pentru a fi utilizat ca un standard primar de frecvenţă.

Pe modelul realizat nu s-a putut verifica stabilitatea în timp a frecvenţei. Actualmente se lucrează la un lanţ de divizori de frecvenţă care vor permite ca împreună cu un sincroscop să se realizeze şi acest ultim deziderat.

*Catedra de electronică*
*Laboratorul de măsuri în înaltă frecvenţă*

Primit la redacţie la 1 VI 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *Vigoureaux J.* — The valve — maintained quartz oscillator. The Proceedings of the wireless section of the Institute of Electrical Engineers Vol V Nr. 13 Martie 1930 p. 41
2. *Nicolau Edm.* — Un nou criteriu de stabilitate şi aplicarea lui la tratarea unitară a oscilatorilor cu tuburi electronice. Buletinul ştiinţific. Secţiunea matematică-fizică T. III nr. 1 1951 p. 135.
3. *Nicolau Edm.* — Măsurări în radiotehnică Vol. II Editura Tehnică, Bucureşti 1956.
4. *J. Groszkowschi*—The Interdependence of Frequency. Variation and Harmonic Content. Proc. I. R. E., 21, 1933 958—981.
5. *Vulpescu N. şi Millea A.*—Stabilitatea frecvenţei oscilatorilor cu cuarţ. Electrotehnica IV, 1956, 217—223.

## ЭЛЕКТРОННЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР БОЛЬШОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

(Краткое содержание)

В начале работы проводится краткий общий анализ осцилляторов. Далее рассматривается импеданс кварцевого кристалла, анализируется данная схема и приводятся соответствующие характеристики.

Применяется схема типа Колпича, имеющая обратную связь тока и электронное устройство для автоматического контроля амплитуды.

Для обеспечения постоянной температуры кристалла, последний располагается в термостате, проверяемом электронным способом контактным термометром.

Из проведенных опытов заключается, что описаным образом получается хорошая устойчивость при изменении анодного напряжения на 100 вольт частота изменяется менее 1 к $10^8$.

Устойчивость оказывается хорошей и в отношении изменения напряжения накала, а также при изменении лампы.

Осциллятор и термостат были построены в Радно-измерительной лаборатории Бухарестского Политехнического Института.

## OSCILLATEUR ELECTRONIQUE DE GRANDE STABILITÉ

(Résumé)

On étudie d'abord les conditions générales auxquelles sont assujetties les oscillateurs, puis on analyse le schéma proposé et on donne les performances du montage.

L'oscillateur est du type Colpitts, ayant en plus une contre-réaction de courant et un dispositif pour le contrôle automatique de l'amplitude des oscillations.

Pour maintenir le quartz à une température constante on utilise un thermostat contrôlé par un thermomètre à contacts.

La stabilité de fréquence ainsi obtenue est très bonne pour une variation de 100 V de la tension anodique, la variation de fréquence est moindre à 1 pour $10^8$.

La stabilité est très bonne ainsi en ce qui concerne la variation de la tension des filaments, ou le changements du tube oscillateur.

L'oscillateur et le thermostat ont été réalisés dans le Laboratoire de Mesure Haute Fréquence en vue de la réalisation d'un standard primaire de fréquence.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.396.64

# O METODĂ RAPIDĂ PENTRU PREDETERMINAREA CARACTERISTICII DE MODULAȚIE ANODICĂ A UNUI AMPLIFICATOR CLASA C.

de R. PIRINGER

In lucrarea [1] s-a desvoltat o metodă generală pentru calculul radioamplificatorilor modulați. Caracteristicile generale de modulație $i_1 = f(\varepsilon_o)$. care au fost deduse acolo, permit să se calculeze un amplificator clasă $C$ modulat anodic, pe grilă sau mixt. Caracteristicile generale conduc la obținerea curbei $I_1 = f(\varepsilon_o)$, unde $\varepsilon_o = E_a - \mu E_g$ și deci, în funcție de felul modulației, rezultă $I_1 = f(E_a)$ (modulație de de placă, $E_g =$ constant) sau $I_1 = f(E_g)$ (modulație de grilă, $E_a =$ constant). Curentul $I_1$ este însă componenta pe fundamentală a curentului catodic (spațial) și pentru a se obține caracteristica de modulație propriu-zisă : $I_{a1} = f(\varepsilon_o)$ sau $U_a = f(\varepsilon_o)$ (căci $U_a = Z_a I_{a1}$) este necesar să se facă corecția curentului de grilă, adică din $I_1$ să se scadă componența $I_{g1}$ a curentului de grilă, rezultînd astfel $I_{a1} = I_1 - I_{g1}$.

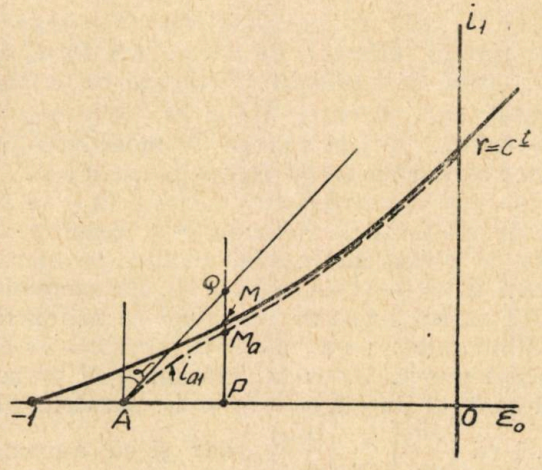



Fig. 1—Construcție grafică corespunzînd modulației anodice.

In cazul unei modulații anodice, se știe că punctul de funcționare $M$ în planul $i_1 = f(\varepsilon_o)$ se depărtează cu atît mai mult de curba $r =$ const., cu cît punctul $P$ se apropie de $A$. Aceasta, deoarece spre minimul de modulație $E_a$ scade, deci curentul de grilă, proporțional cu segmentul $\overline{M M_a}$ crește și punctul de funcționare scoboară din $M$ în $M_a$,

In diagrama $i_1 = f(\varepsilon_o)$, semnificaţia diferitelor mărimi este următoarea :

$$\varepsilon_o = \frac{\mathcal{E}_o}{\mu U_g} = \frac{E_a - \mu E_g}{\mu U_g} = e_a - \mu e_g, \quad \overline{OA} = \mu e_g, \quad \overline{AP} = e_a,$$

$$r = \frac{Z}{\frac{\mu U_g}{I_{ex}}} = \frac{Z}{\mathcal{R}_i} \quad , \quad r_a = \frac{Z_a}{\mathcal{R}_i}$$

unde

$$Z = \frac{U_a}{I_1} \quad , \quad Z_a = \frac{U_a}{I_{a1}}$$

$$i_1 = \frac{I_1}{I_{ex}}, \quad \text{unde} \quad I_{ex} = A^n (\mu U_n)^n$$

curentul spaţial fiind aproximat prin ecuaţia :

$$i_c = A^n (u_a + \mu u_g)^n .$$

Dacă din punctul $A$ se duce dreapta $\overline{AQ}$ cu $tg\alpha = r_a$, rezultă pentru un punct curent $P$ următoarele reprezentări :

$$\overline{PM} = i_1 \quad \overline{PM_a} = i_{a1} = \frac{u_a}{r_a} \quad \left( i_{a1} = \frac{I_{a1}}{I_{ex}}, \; u_a = \frac{U_a}{\mu U_g} \right); \quad \overline{MM_a} = i_{g1} \quad \left( i_{g1} = \frac{I_{g1}}{I_{ex}} \right)$$

$$\overline{QP} = \frac{e_a}{r_a} \quad \overline{QM_a} = \frac{e_a}{r_a} - i_{a1} = \frac{e_a - u_a}{r_a} = \frac{u_m}{r_a} \qquad \left( u_m = \frac{u_{am}}{\mu U_g} = \frac{E_a - U_a}{\mu U_g} \right)$$

Segmentul $\overline{QM_a}$ este proporţional cu tensiunea anodică minimă $u_{am}$ care este tot timpul diferită de zero (căci $U_a < E_a$), în afară de punctul $E_a = O$, cînd se anulează. Urmează ca curba $i_{a1} = f(\varepsilon_0)$ va rămîne tot timpul sub dreapta $\overline{AQ}$ şi că, în punctul $A$, dreapta $\overline{AQ}$ este tangentă la curbă. Deci la fundul de modulaţie (în punctul $A$) se cunoaşte un punct al curbei $i_{a1} = f(\varepsilon_0)$ şi tangenta ei.

Alt punct în care caracteristica $i_{a1} = f(\varepsilon_0)$ se poate determina uşor este vîrful de modulaţie. Presupunem, cum se întîmplă de cele mai multe ori, că la vîrful modulaţiei anodice se lucrează cu $\theta_v = 90^0$ şi deci $\varepsilon_0 = 0$ (căci $\varepsilon_0 = -(1 - ri_1)\cos\theta$). De asemenea, ţinem seamă că la vîrf amplificatorul lucrează de obicei în subexcitaţie şi deci curentul de grilă fiind mic nu va modifica sensibil înclinarea tangentei la curba $i_1$ în acest punct. Aceasta înseamnă că presupunem tangentele în punctul $\varepsilon_0 = 0$ la curbele $i_1$ şi $i_{a1}$ paralele. In realitate, se observă din fig. 1 că $\left(\frac{di_1}{d\varepsilon_0}\right)_0 \lesssim \left(\frac{di_{a1}}{d\varepsilon_0}\right)_0$ dar şi că aproximaţia egalităţii este valabilă. Valoarea lui $I_{a1}$ în punctul de vîrf se calculează pornind de la patru date iniţiale ale amplificatorului, care se dau de obicei la vîrf, ţinînd seamă că la vîrf tubul trebuie să debiteze curentul maxim. Dacă se va cunoaşte şi valoarea lui $\left(\frac{di_1}{d\varepsilon_0}\right)_{\varepsilon_0 = 0}$, vor rezulta în definitiv coordonatele şi înclinările tangentelor la curba $I_{a1} = f(\varepsilon_0)$ sau $I_{a1} = f(E_a)$ la fundul de modulaţie ($E_a = O$) şi la vîrful de modulaţie

($E_a = 2\,E_{ap}$), deoarece $I_{a1}$ este proporţional cu $i_{a1}$, iar $E_a$ este proporţional cu $e_a$. Aceste două puncte şi înclinările tangentelor permit să se traseze în primă aproximaţie caracteristica de modulaţie $I_{a1}=f(E_a)$ sau $U_a = f(E_a)$, după aceea putîndu-se verifica şi corecta prin metoda obişnuită oricare punct de pe caracteristică. Se constată că pornind de la valoarea găsită prin trasarea iniţială a curbei, una sau cel mult două încercări sînt suficiente pentru a găsi valoarea exactă într-un punct oarecare. In consecinţă, nu mai sînt necesare atît de multe tatonări care trebuie făcute dacă diferitele puncte se calculează numai prin metoda aproximaţiilor succesive.

Se pune deci problema găsirii valorilor $\left(\frac{di_1}{d\varepsilon_o}\right)_0$ ca funcţiune a parametrului $r$ şi pentru diferite valori ale exponentului de aproximare $n$ a ecuaţiei caracteristicilor tubului. In practică, valorile cel mai des întîlnite pentru $n$ sînt: 1; 1,25 şi 1,5 şi calculul va fi făcut pentru aceste trei valori. Expresia lui $\left(\frac{di_1}{d\varepsilon_o}\right)_0$ va trebui dedusă în baza următoarelor ecuaţii:

$$\varepsilon_o = -(1 - ri_1)\cos\theta \tag{1}$$

$$i_1 = \alpha_1 (1 - \cos\theta)^n (1 - ri_1)^n \tag{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{I_1}{I_M} = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{+\theta}\left[\frac{\cos\omega t - \cos\theta}{1 - \cos\theta}\right]^n \cos\omega t\, d(\omega t) = \varphi(\theta) \tag{3}$$

Din eliminarea lui $\theta$ între primele două ecuaţii (ţinînd seama că $\alpha_1$ este şi el funcţiune de $\theta$, după ecuaţia (ε), rezultă $i_1 = f(\varepsilon_o)$ avînd $r$ şi $n$ ca parametri. Expresia $\left(\frac{di_1}{d\varepsilon_o}\right)_{\varepsilon_o = O}$ va fi deci o funcţiune de $r$, avînd pe $n$ ca parametru. Mai trebuie observat că integrala din (3) se poate calcula exact numai pentru valori întregi ale lui $n$; pentru valori fracţionare, integrarea trebuie făcută grafic. Rezultatele se găsesc trasate sub formă de curbe $\alpha_1 = f(\theta)$ pentru diferiţi $n$ în manualele de radiotehnică [2].

Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ se obţine prin integrare:

$$\alpha_1' = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi(1 - \cos\theta)} \tag{4}$$

$$\alpha_1'' = 2\,\frac{\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta - \theta\cos\theta}{\pi(1 - \cos\theta)^2} \tag{5}$$

Derivînd relaţiile (1) şi (2) în raport cu $\theta$ şi făcînd apoi $\theta = \frac{\pi}{2}$ rezultă:

$$\left(\frac{d\varepsilon_o}{d\theta}\right)_0 = 1 - r i_1 \tag{1'}$$

$$\left(\frac{di_1}{d\theta}\right)_0 = \frac{(1 - ri_1)^n\left[\left(\frac{d\alpha_1}{d\theta}\right)_0 + n\,\alpha_1\right]}{1 + n\,\alpha_1 (1 - ri_1)^{n-1} r} \tag{2'}$$

Făcînd raportul. găsim:

$$\left(\frac{di_1}{d\varepsilon_o}\right)_0 = \frac{\left(\frac{d\alpha_1}{d\theta}\right)_0 + n\,\alpha_1}{\frac{1}{(1-ri_1)^{n-1}} + n\,\alpha_1 r} \tag{6}$$

In această expresie intervine, afară de $\alpha_1$ și $i_1$, valoarea lui $\frac{d\alpha_1}{d\theta}$. Această valoare poate fi calculată exact numai pentru $n = 1$ și $n = 2$. De aceea, vom admite o creștere liniară a lui $\left(\frac{d\alpha_1}{d\theta}\right)_0$ cu $n$ pentru a putea obține valoarea lui $\left(\frac{d\alpha_1}{d\theta}\right)_0$ la $n = 1{,}25$ și $1{,}5$. Remarcăm că această metodă de calcul a lui $\frac{di_1}{d\varepsilon_o}$ a dat rezultatele cele mai bune; toate celelalte metode, bazate pe utilizarea tangentelor la curbele $i_1 = f(\varepsilon_o)$, trasate la scară, nu au dat rezultate satisfăcătoare, deoarece metodele grafice erau insuficient de precise, astfel încît unele din punctele obținute pe această cale, erau în afara curbelor.

Prin derivare se găsește:

$$\frac{d\alpha_1'}{d\theta} = \frac{2\sin^2\theta - \sin^2\theta\cos\theta - \theta\sin\theta}{\pi\,(1-\cos\theta)^2} \tag{4'}$$

și

$$\left(\frac{d\alpha_1'}{d\theta}\right)_0 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} = 0{,}13662 \tag{4''}$$

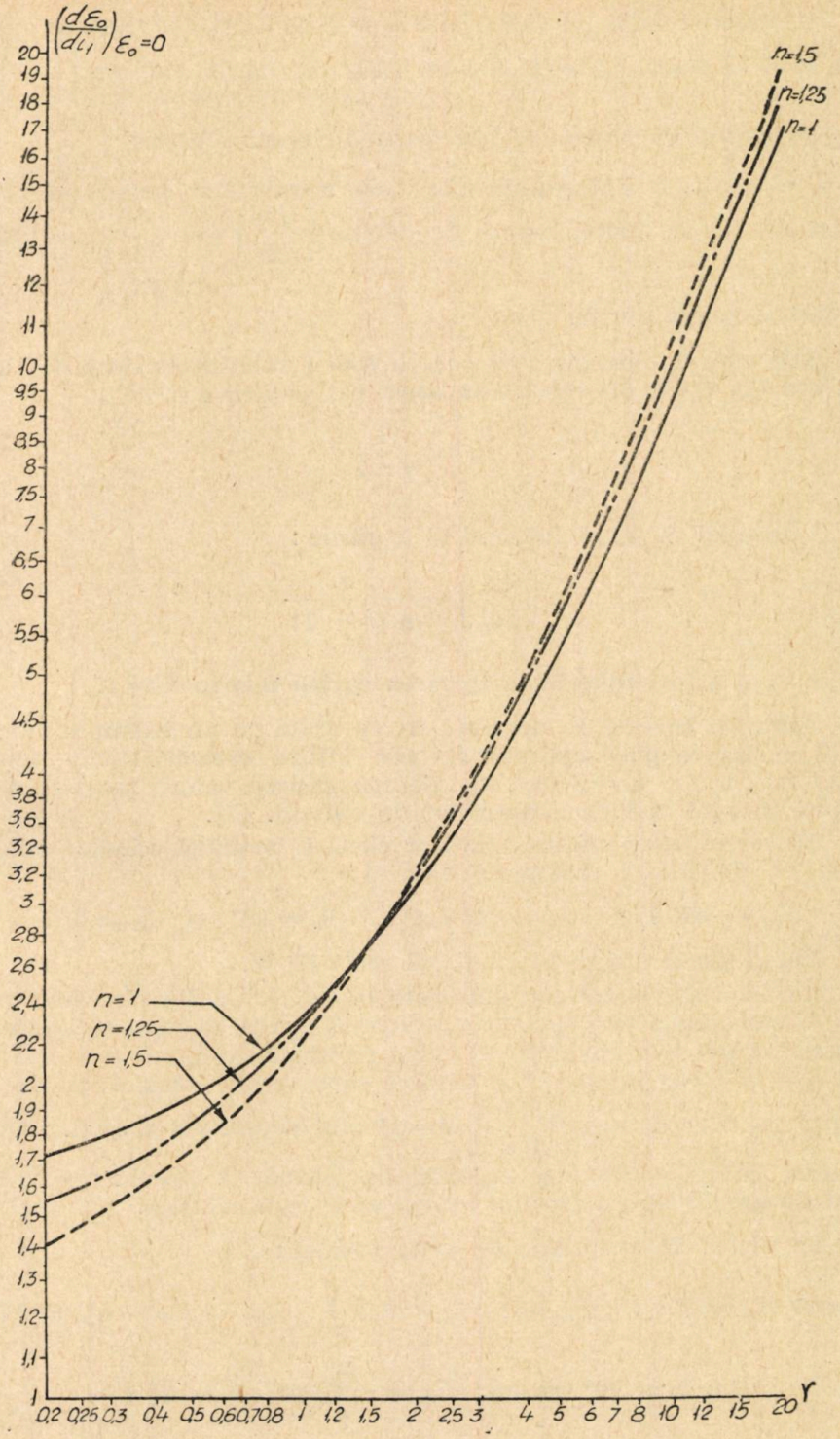
$$\frac{d\alpha_1''}{d\theta} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\theta\,(\theta-\sin\theta)\,(1+\cos\theta) - \frac{1}{3}\sin^4\theta}{(1-\cos\theta)^3} \tag{5'}$$

și

$$\left(\frac{d\alpha_1''}{d\theta}\right)_0 = 1 - \frac{8}{3\pi} = 0{,}15117 \tag{5''}$$

Folosind aproximația liniară pentru $\left(\frac{d\alpha_1}{d\theta}\right)_0$ și luînd valorile lui $\alpha_1$ din curbele $\alpha_1 = f(\theta)$, găsim pentru cele trei valori ale lui $n$ care ne interesează:

| $n$ | 1 | 1,25 | 1,5 |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1\ (\theta = 90^0)$ | 0,500 | 0,478 | 0,459 |
| $\left(\frac{d\alpha_1}{d\theta}\right)_0$ | 0,13662 | 0,14026 | 0,14390 |




Relaţia dintre $\left(\frac{d\varepsilon_0}{di_1}\right)_{\varepsilon_0=0}$ şi $r$ pentru diverse valori ale lui $n$.

Utilizînd relaţia (6) şi curbele $i_1 = f(\varepsilon_o)$ [1] (de unde se găseşte $i_1$ la $\varepsilon_o = O$ pentru diferiţi $r$) s-au trasat în fig. 2 curbele $\left(\frac{d\varepsilon_o}{di_1}\right)_0 = f(r)$ pentru diferiţi $n$. A fost trasat inversul expresiei $\left(\frac{di_1}{d\varepsilon_o}\right)_0$ pentru a se obţine o diferenţiere mai mare a curbelor pentru diferitele valori ale lui $n$. Ţinînd seamă de relaţia $\left(\frac{di_1}{d\varepsilon_o}\right)_0 = \frac{1}{\left(\frac{d\varepsilon_o}{di_1}\right)_0}$ se găseşte imediat valoarea dorită.

Mai este de remarcat că pentru $n = 1$ relaţiile se simplifică mult, căci din (1), (2) şi (4) rezultă în acest caz pentru $\theta = 90^0$:

$$i_1 = \frac{1}{2+r} \tag{7}$$

Inlocuind în (6) şi folosind (4″), găsim:

$$\left(\frac{di_1}{d\varepsilon_o}\right)_0 = \frac{4}{\pi(r+2)} \tag{8}$$

relaţie care a fost folosită la trasarea curbei pentru $n = 1$.

*Aplicaţie.* In cele ce urmează se va arăta pe un exemplu cum se aplică metoda expusă mai sus. Se vor utiliza caracteristicile tubului $i_a = f(u_a, u_g)$ şi $i_g = f(u_a, u_g)$ pentru găsirea valorii maxime a curenţilor şi apoi metoda rapoartelor de curenţi. [2].

Să se calculeze un amplificator clasă $C$ modulat anodic, folosind tubul $TC$ 04/10 în următoarele condiţii:

$$E_{ap} = 350\ V \qquad I_{Mv} = 250\ mA \qquad \theta_v = 90^0 \text{ şi } \xi_v = 0.75$$

Tubul poate disipa pe anod cel mult 10 W.

Caracteristicile tubului sînt date în fig. 3. Dacă se trasează curba $i_c = f(\varepsilon)$ (unde $i_c = i_a + i_g$ şi $\varepsilon = u_a + \mu u_g$) se găseşte că aceste caracteristici pot fi aproximate printr-o parabolă de grad $n = 1{,}25$ (adică $i_c = A^{1,25}(u_a + \mu u_g)^{1{,}25}$), valoare care va fi folosită şi de noi pentru valorile $\alpha_1$, $\alpha_o$ şi $\left(\frac{di_1}{d\varepsilon_o}\right)_0$ în calculul curentului spaţial. Pentru curentul de grilă vom face aproximaţia folosită de obicei: $n = 2$. Factorul de amplificare a tubului este $\mu = 25$ (din catalog).

La vîrful de modulaţie ($m = 1$) rezultă:

$$E_{av} = 2\,E_{ap} = 700\ V \quad U_{av} = \xi_v E_{av} = 525\ V \quad u_{amv} = E_{av} - U_{av} = 175\ V$$

$$\text{Din } \theta_v = 90^0 \text{ găsim: } E_g = \frac{E_{av}}{\mu} = \frac{700}{25} = 28\ V$$

Din caracteristicile tubului găsim tensiunea $u_{gM}$ la care pentru $u_a = 175\ V$ rezultă un curent $i_a + i_g = I_{Mv} = 250\ {}_mA$. Se găsește astfel:

$$u_{gM} = 70\ V, \qquad I_{aMv} = 198\ {}_mA, \qquad I_{gMv} = 52\ {}_mA$$

Rezultă: $U_g = E_g + u_{gM} = 98\ V$

Valorile $E_g$, $U_g$, $u_{gM}$ nu se modifică în ciclul de modulație și deci nici valorile $\theta_g$, $\alpha_{1g}$ și $\alpha_{0g}$ nu se vor modifica.

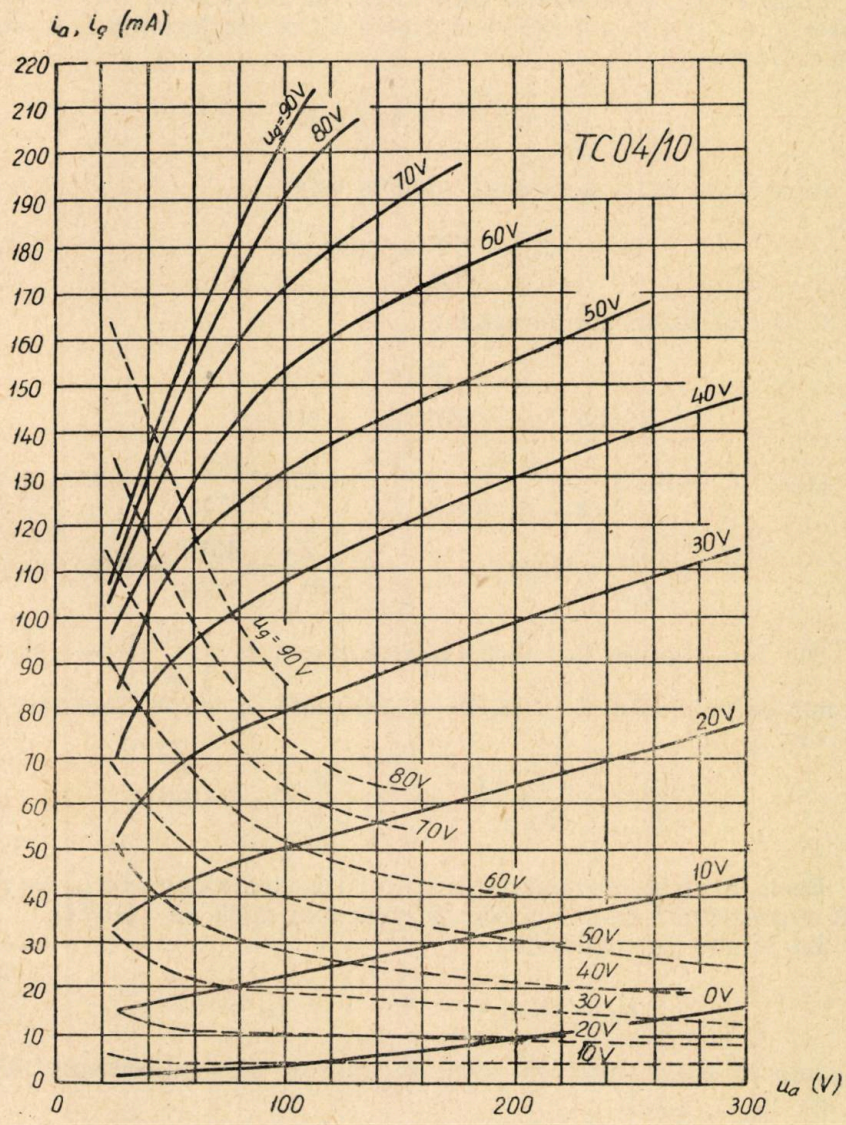



Fig. 4—Caracteristicile tubului TC 04/10.

La $\theta_v = 90^0$ găsim din [2] pentru $n = 1{,}25$ : $\alpha_{1v} = 0{,}480$.
Deci pentru curentul catodic :

$$I_{1v} = \alpha_{1v}\ I_{Mv} = 120\ _mA$$

Curentul de grila are un unghi de deschidere 2 $\theta_g$ dat de :

$$\cos\theta_g = \frac{E_g}{U_g} = 0{,}286 \quad \theta_g \simeq 73^0$$ și din [2] pentru $n = 2$: $\alpha_{1g} = 0{,}365$, $\alpha_{og} = 0{,}21$

Deci $I_{g1v} = \alpha_{1g} I_{gMv} = 19\ _mA$ iar $I_{a1v} = I_{1v} - I_{g1v} = 101\ _mA$

Impedanța de sarcină $Z$ care intervine in calculul lui $r$ pentru curbele $i_1 = f\ (\varepsilon_o)$ este raportul dintre $U_a$ și componenta $I_l$ a curentului catodic :

$$Z = \frac{U_{av}}{I_{1v}} = 4\ 370\ \Omega$$

Impedanța reală a sarcinii anodice este

$$Z_a = \frac{U_{av}}{I_{a1v}} = 5200\ \Omega$$

Curentul $I_{ex}$ se obține astfel :

$$I_{ex} = A^n\ (\mu\ U_g)^n\ ,$$

$$\text{iar } I_{Mv} = A^n\ (u_{amv} + \mu\ u_{gM})^n$$

$$\text{Deci : } I_{ex} = I_{Mv} \left( \frac{\mu\ U_g}{u_{amv} + \mu\ u_{gM}} \right)^{1{,}25} = 250 \left( \frac{2450}{1925} \right)^{1{,}25} = 337\ _mA$$

$$\mathcal{R}_i = \frac{\mu U_g}{I_{ex}} = 7260\ \Omega, \qquad r = \frac{Z}{\mathcal{R}_i} = \frac{4370}{7260} = 0{,}6$$

Din fig. 2 găsim la $r = 0{,}6$ pentru $n = 1{,}25$ : $\left( \frac{d\varepsilon_o}{di_1} \right)_0 = 1{,}936$ ceea ce conduce în planul $I_l - \varepsilon_o$ la o tangentă a cărei înclinare este dată de :

$$\frac{d\varepsilon_o}{dI_1} = \frac{\mu\ U_g\ d\ \varepsilon_o}{I_{ex}\ di_1} = \mathcal{R}_i \left( \frac{d\varepsilon_o}{di_1} \right) = 14100\ \Omega$$

Deci, la vîrful de modulație ($\varepsilon_o = O$) tangenta la curba $I_{a1} = f\ (\varepsilon_o)$ va fi reprezentată de o impedanță ceva mai mică de 14100 Ω.
La fundul de modulație,

$$E_a = O, \varepsilon_o = -\ 700\ V \text{ și } I_{a1} = O$$

Tangenta în acest punct va avea înclinarea corespunzătoare dreptei $\overline{AQ}$ din fig, 1, adică

$$\mathcal{R}_i\ r_a = Z_a = 5200\ \Omega$$

Cunoscînd punctele extreme ale curbei și tangentele în aceste puncte se poate trasa aproximativ caracteristica de modulație $I_{a1} = f(\mathcal{E}_o)$ ceea ce, printr-o translație a axei absciselor, conduce la curba de modulație anodică $I_{al} = f(E_a)$ (fig. 4).

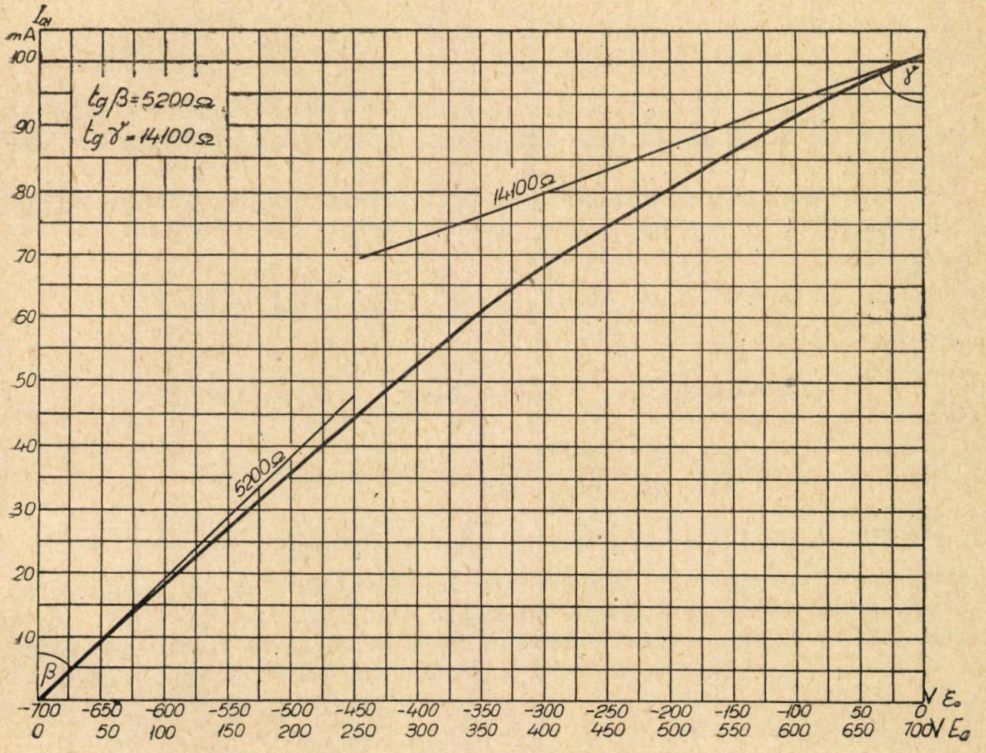



Fig. 4—Caracteristica de modulație calculată prin metoda rapidă.

Pentru a trasa curba mai exact vom calcula și regimul de lucru la purtătoare, folosind valoarea aproximativă dedusă din curba $I_{a1} = f(E_a)$

La purtătoare avem:

$$E_{ap} = 350\ V, \qquad E_g = 28\ V, \qquad U_g = 98\ V, \qquad Z_a = 5200\ \Omega$$

Valoarea aproximativă a lui $I_{a1}$ se citește din fig. 4: $I_{a1} = 61\ mA$

$$\text{Deci } U_a = Z_a\, I_{al} = 317\ V \qquad u_{am} = E_a - U_a = 33\ V$$

Din fig. 3 găsim la $u_{am} = 33\ V$, $u_{gM} = 70\ V$: $I_{aM} = 114\ mA$, $I_{gM} = 104\ mA$, $I_M = 220\ mA$

iar

$$\cos\theta = \frac{\mu E_g - E_a}{\mu U_g - U_a} = \frac{350}{25 \cdot 98 - 317} = 0{,}164 \qquad \theta = 81^\circ$$

și deci: $\alpha_1 = 0{,}449$

$\alpha_o = 0{,}27$

$I_1 = \alpha_1 I_M = 98{,}7\ mA$ $\quad I_o = \alpha_o I_M = 59{,}4\ mA$

$I_{g1} = \alpha_{1g} I_{gM} = 38\ mA$ $\quad I_{go} = \alpha_{og} I_{gM} = 21{,}8\ mA$

$I_{a1} = I_1 - I_{g1} = 60{,}7\ mA$ $\quad I_{ao} = I_o - I_{go} = 37{,}6\ mA$

Valoarea de 60,7 $mA$ pentru $I_{a1}$ este perfect satisfăcătoare față de valoarea de 61 $mA$ de la care am plecat, deci nu este necesară o recalculare.

Printr-un procedeu identic se pot verifica oricîte puncte de pe caracteristică. De exemplu, la $E_a = 500\ V$ citim $I_{a1} = 80{,}4\ mA$.

Deci

$$U_a = Z_a I_{a1} = 418\ V \qquad u_{am} = E_a - U_a = 82\ V$$

Din fig. 3 avem:

$$I_{aM} = 162\ mA, \qquad I_{gM} = 70\ mA, \qquad I_M = 232\ mA$$

iar

$$\cos\theta = \frac{200}{25 \cdot 98 - 418} = 0{,}0984 \qquad \theta \simeq 84^0,$$

$I_1 = \alpha_1 I_M = 107\ mA$ $\quad I_{g1} = \alpha_{1g} I_{gM} = 25{,}6\ mA$ $\quad I_{a1} = 81{,}4\ mA$

Dacă dorim să găsim o valoare mai bună, observăm că modificarea lui $I_{a1}$ modifică sensibil numai pe $u_{am}$ și deci $I_{aM}$, $I_{gM}$, pe cînd $U_a$ și deci $\theta$ și $\alpha_1$ rămîn practic constanți. Rezultă că $I_M$ va trebui să scadă cu circa 1—2 $mA$ pentru a obține o scădere a lui ceva mai mică de 1 $mA$. Din fig. 3 găsim:

$u_{am} = 81\ V$ $\quad I_{aM} = 160\ mA$ $\quad I_{gM} = 71\ mA$ $\quad I_M = 231\ mA$

$$U_a = E_a - u_{am} = 419\ V \qquad I_{a1} = \frac{U_a}{Z_a} = 80{,}6\ mA$$

$I_1 = \alpha_1 I_M = 106{,}3\ mA$ $\quad I_{g1} = \alpha_{1g} I_{gM} = 25{,}9\ mA$ $\quad I_{a1} = 80{,}4\ mA$

Deci valoarea de 80,6 $mA$ este bună. Se vede că am fi putut rămîne și la valoarea inițială de 80,4 $mA$.

După cum se vede din cele două puncte recalculate (pentru $E_a = 350\ V$ și $500\ V$), caracteristica de modulație $I_{a1} = f(E_a)$ trasată numai pe baza cunoașterii punctelor ei extreme și a tangentelor în aceste puncte este satisfăcătoare pentru predeterminarea funcționării amplificatorului modulat.

Folosind curba $I_{a1} = f(E_a)$ și datele calculate la purtătoare se pot acum deduce principalele condiții de lucru ale etajului clasă $C$ modulat anodic. Astfel, factorul de distorsiune de neliniaritate are în primă aproximație valoarea

$$\delta = \frac{I_{a1p}}{I_{a1v}} - \frac{1}{2} = \frac{61}{101} - \frac{1}{2} = 10{,}4\ \%$$

dacă gradul de modulație este 100%.

Puterea utilă la purtătoare are valoarea

$$P_{up} = \frac{1}{2} U_{ap} I_{a1p} = 9{,}68\ W$$

Puterea absorbită de la sursa de curent continuu la purtătoare este

$$P_{ap} = E_{ap} I_{aop} = 13{,}3\ W$$

şi randamentul

$$\eta_p = \frac{P_{up}}{P_{ap}} = 72{,}7\%$$

Impedanţa de audiofrecvenţă prezentată de amplificatorul modulat sursei de modulaţie este :

$$Z_m = \frac{E_{ap}}{I_{aop}} = \frac{350}{37{,}6.10^{-3}} = 9300\ \Omega,$$

modulatorul trebuind să dea la o modulaţie de $100\%$ puterea $\frac{1}{2} P_{ap} = 6{,}65\ W$.

Puterea disipată pe anodul tubului $TC$ 04/10 din amplificatorul clasă $C$ modulat este :

la purtătoare :

$$P_{dp} = P_{ap} - P_{up} = 3{,}62\ W;$$

cînd se aplică o modulaţie $100\%$ :

$$P_d = P_{dp}\left(1 + \frac{m^2}{2}\right) = 5{,}43\ W < 10\ W = P_{dM}$$

In consecinţă, puterea disipată rămîne sub limita impusă de catalog.

## BIBLIOGRAFIE

1. *T. Tănăsescu*—Analiza şi predeterminarea condiţiilor de funcţionare a radioamplificatorilor modulaţi. S.C.F., vol. II, nr. 3—4, iulie-dec. 1951, pag. 327-362.
2. *B. A. Smirenin*—Manual de radiotehnică. vol. I. EES 1953, pag. 363.

## СКОРОСТНОЙ МЕТОД ПРЕДОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ АНОДНОЙ МОДУЛЯЦИИ УСИЛИТЕЛЯ КЛАССА *C*

(Краткое содержание)

Применяется метод идеализированных характеристик для определения двух точек модуляционной характеристики, а также и тангенсы к характеристике в данных двух точках.

# MÉTHODE RAPIDE POUR PRÉDÉTERMINER LA CARACTÉRISTIQUE DE MODULATION ANODIQUE D'UN AMPLIFICATEUR CLASSE *C*

(Résumé)

On utilise la méthode des caractéristiques idéalisées pour déterminer deux points de la caractéristique de modulation, en même temps que les tangentes à la caractéristique aux mêmes points.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621 396.64

# AMPLIFICATOR STABIL LA VARIAŢII DE SARCINĂ

de GH. STANCU

Intr-o schemă de amplificare, cu triodă, dacă vom ţine seamă, atît de capacităţile între electrozi, cît şi de impedanţa internă a generatorului de excitaţie din circuitul de grilă, se poate arăta că amplificarea acestui tub devine independentă de sarcina şi de parametrul tubului, în anumite condiţii de lucru

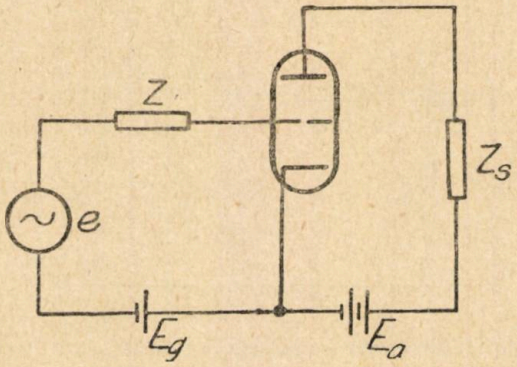



Fig. 1—Schema unuf etaj de amplificare în care se ţine seama de impedanţa generatorului din circuitul de grilă.

Pentru a găsi amplificarea montajului din fig. 1, vom utiliza schema echivalentă din fig. 2 în care.

$Y_1$ — admitanţa între grilă şi catod ;
$Y_2$ — admitanţa între grilă şi anod :
$Y_3$ — admitanţa între anod şi catod ;
$Y$ — admitanţa internă a generatorului de excitaţie din circuitul de grilă ;
$Y_s$ — admitanţa de sarcină a tubului.

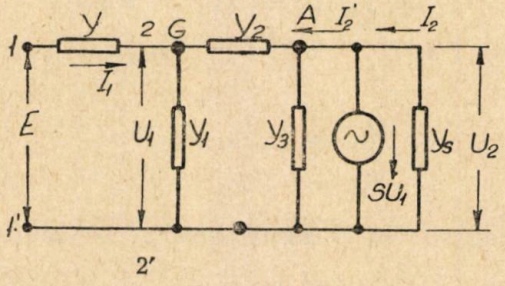



Fig. 2—Schema echivalentă a etajului de amplificare din figura 1, ţinîndu-se seama şi de capacităţile între electrozi.

Considerînd bornele 11′ ca borne de intrare, amplificarea montajului poate fi scrisă sub forma

$$a = \frac{U_2}{E} \quad ; \tag{1}$$

dacă însă considerăm bornele 22′ ca borne de intrare, amplificarea montajului se scrie

$$a_1 = \frac{U_2}{U_1} \quad , \tag{2}$$

care este diferită de amplificarea determinată de expresia (1).

Să considerăm cuadripolul format de admitanţele grilă-catod, grilă-anod şi anod-catod (fig. 3) căruia îi vom aplica teoria generală a cuadripolilor.

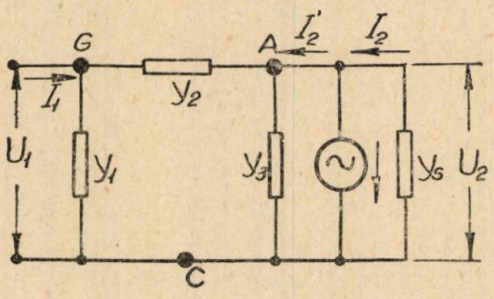



Fig. 3—Schema echivalentă a unui etaj de amplificare considerîndu-se tubul şi rezistenţa de sarcină.

Ecuaţiile cuadripolului sînt :

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}\, U_1 + Y_{12}\, U_2 \\ I'_2 &= Y_{21}\, U_1 + Y_{22}\, U_2 \end{aligned} \tag{3}$$

unde $Y_{11}$, $Y_{12}$ $Y_{21}$ $Y_{22}$ sînt admitanţele de gol şi de scurtcircuit ale cuadripolului din fig. 3.

Dacă $U_2 = O$ putem scrie

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}\, U_1 = (Y_2 + Y_1)\, U_1 \\ I'_2 &= -\, U_1\, Y_2 = Y_{21}\, U_1 \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$Y_{11} = Y_2 + Y_1 \tag{4}$$

$$Y_{21} = -\, Y_2 \tag{5}$$

În mod analog, $U_1 = O$ adica intrarea în scurtcircuit obţinem :

$$Y_{22} = Y_2 + Y_3 \tag{6}$$

$$Y_{12} = -\, Y_2 \quad . \tag{7}$$

Ecuațiile cuadripolului devin

$$\begin{aligned} I_1 &= (Y_2 + Y_1)\, U_1 - Y_2\, U_2 \\ I'_2 &= -\, Y_2\, U_1 + (Y_2 + Y_3)\, U_2 \end{aligned} \tag{8}$$

Pe de altă parte, putem nota

$$I'_2 = I_2 - SU_1 \tag{9}$$

și ecuația (8) devine

$$\begin{aligned} &a) \quad I_1 = (Y_2 + Y_1)\, U_1 - Y_2\, U_2 \\ &b) \quad I_2 = (S - Y_2)\, U_1 + (Y_2 + Y_3) U_2 \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Curentul $I_2$ este curentul care circulă prin sarcină și deci se poate scrie

$$I_2 = -\, Y_s\, U_2 \tag{11}$$

Ecuația ($b$) din (10) și ecuația (11) ne conduc la relația dintre tensiunile $U_1$ și $U_2$, relație care reprezintă tocmai amplificarea tubului, dacă s-a ținut seamă de capacitățile dintre electrozi.

$$a_1 = -\frac{U_2}{U_1} = \frac{S - Y_2}{Y_2 + Y_3 + Y_s} \tag{12}$$

Se observă că dacă admitanța $Y_2$ este neglijabilă față de $Y_3 + Y_s$, se obține pentru amplificare expresia cunoscută:

$$a_{10} = \frac{\mu R}{R_i + R} \tag{12 a}$$

Considerînd acum ca borne de intrare bornele $11'$. amplificarea cuadripolului este determinată de expresia (1). Intre tensiunea $E$ și $U_1$ există relația;

$$U_1 = E - \mathrm{I}_1/Y \tag{13}$$

Eliminînd acum pe $I_1$, între ecuațiile (10) și (13) vom obține:

$$U_1 \left(1 + \frac{Y_1 + Y_2}{Y}\right) = E + U_2 \frac{Y_2}{Y}$$

Din (12) rezultă că $U_1 = -\frac{U_2}{a_1}$ și înlocuind pe $U_1$ în expresia de mai sus se ob ine:

$$U_2 \left[-\frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{Y_1 + Y_2}{Y}\right) - \frac{Y_2}{Y}\right] = E$$

care se poate scrie și sub forma:

$$\frac{E}{U_2} = \frac{1}{a} = -\frac{Y_2}{Y} - \frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{Y_2 + Y_2}{Y}\right) \tag{14}$$

Relația (14) exprimă amplificarea cuadripolului, în cazul în care s-a ținut seama și de impedanța internă a sursei de excitație.

Expresia (14) nu depinde de tub și sarcină decît prin mărimea $a_1$ așa cum reiese din expresia (12).

Dacă amplificarea $a_1$ este suficient de mare, putem scrie că

$$\frac{1}{a_1}\left[1+\frac{Y_1+Y_2}{Y}\right]\ll\frac{Y_2}{Y} \tag{15}$$

atunci expresia (14) devine :

$$a\simeq-\frac{Y}{Y_2} \tag{16}$$

relația care arată independența amplificării de parametrii tubului, (deci de alimentare) cît și de sarcina anodică a tubului.

Rezultatul obținut (formula 16) ne arată că, în fond, circuitul studiat este cel al unui amplificator la care se ia în considerare efectul reacției negative care apare prin intermediul admitanței grilă-anod ($Y_2$). Din acest punct de vedere, rezultatul obținut este deplin explicabil. Intr-adevăr, dacă amplificarea circuitului este foarte mare, atunci amplificarea (cînd se ține seamă de reacția negativă) devine independentă de tub, de variațiile tensiunii de alimentare cît și de variațiile sarcinii. In acest caz, amplificarea circuitului se știe că este $a_r\simeq-\frac{1}{\beta}$ iar în cazul de față $\beta=\frac{Y_2}{Y}$. Evident că aceste avantaje se obțin pe seama micșorării amplificării circuitului.

De altfel, amplificarea indicată de (16) este mai mică decît amplificarea indicată de (12).

Expresia amplificării [relațiile (14) și (16)] se pretează la o serie de discuții.

Dacă considerăm că se lucrează la o frecvență fixă și tensiunile de alimentare nu suferă nici o modificare. amplificarea $a$ depinde de admitanța internă a sursei de grilă și va fi cu atît mai mare, cu cît admitanța este mai mare, adică cu cît impedanța internă a sursei de grilă este mai mică.

In cazul în care amplificarea $a$ variază astfel încît condiția (15) să fie satisfăcută, la variațiile datorite tubului și sarcinii anodice, amplificarea $a$ rămîne încă independentă de sarcină și tub și poate fi calculată cu expresia (16).

Dacă, însă, considerăm că este îndeplinită condiția (15), iar admitanța internă a generatorului de excitație din curentul de grilă rămîne constantă, amplificarea $a$ din expresia (16) variază cu vrecvența după o hiperbolă (aceasta dacă impedanța generatorului din curentul de grilă este rezistență pură). Se poate însă face ca amplificarea, calculată cu (16) să fie independentă de frecvența, dacă impedanța generatorului din grilă este de aceeași natură cu admitanța $Y_2$.

*Experiență.* Pentru verificarea experimentală s-a ales un tub triodă $6F5$ cu următoarele caracteristici :

$R_i = 66\ K\Omega$ $\quad \mu = 100$ $\quad S = 1.5\ m\ A/V$

$C_{ga} = 3{,}6\ pF$ $\quad C_{gc} = 6\ pF$ $\quad C_{ac} = 12\ pF$

Experimental s-a lucrat la frecvenţa de 500 kHz, cu o sarcină anodică de 150 kΩ.

Condiţia (15) este satisfăcută căci

$$Y_1 = C_{gc} \times \omega = 18{,}810^{-6}/\Omega \quad Y_2 = 11.10^{-6}/\Omega$$

dacă s-a ales

$$R = 20\ K\Omega = \frac{1}{Y}$$

$$1 + \frac{Y_1 + Y_2}{Y} = 1 + \frac{29.810^{-6}}{\frac{1}{20{,}10^3}} = 1_1 + 0{,}6 = 1.6$$

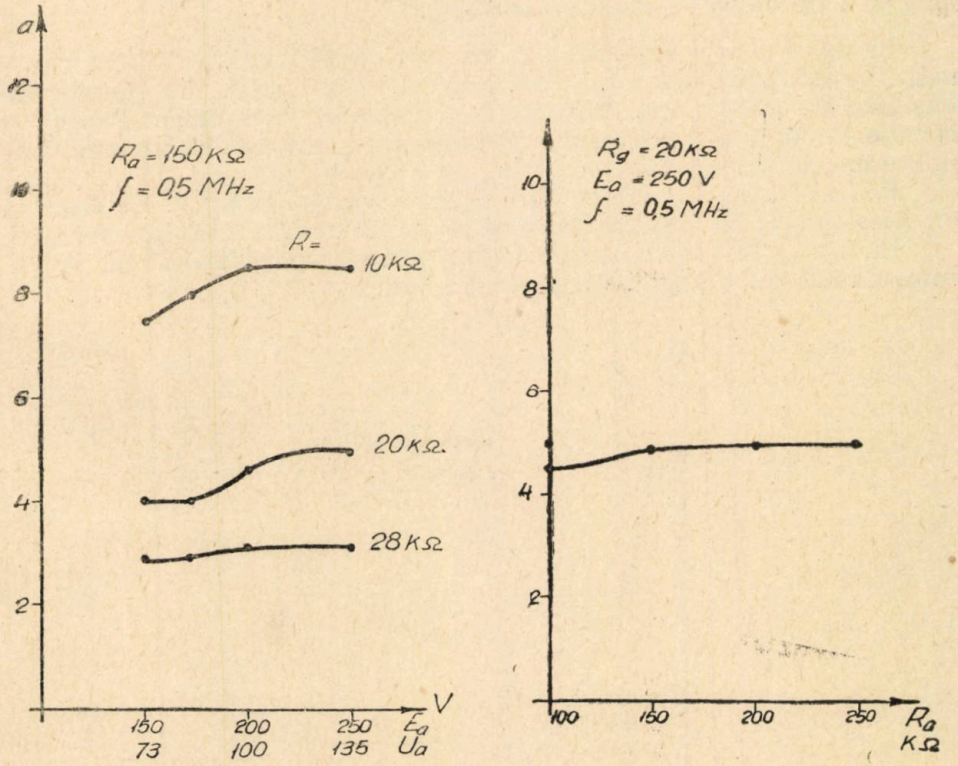



Fig. 4—Stabilitatea amplificării:
a) funcţie de tensiunea anodică. b) funcţie de sarcina anodică.

Amplificarea $a_1 = 47$ deci

$$\frac{1}{a_1}\left[1 + \frac{y_1 + y_2}{y}\right] = -\frac{1{,}6}{47} = 0{,}03$$

iar $\frac{y_2}{y} = 0{,}226$ , deci putem scrie

$$a = -\frac{1}{0{,}226} = 4{,}4$$

deci vedem că amplificarea $a$ este de aproximativ 9.4 ori mai mică decît $a_1$.

Experimental pentru condiţiile de mai sus, am aplicat pe grilă un semnal de 0.1 $V$, (negativarea fiind — 1, 2 $V$) tensiunea obţinută la ieşire $U_2 = 0{,}46$ $V$. Deci amplificarea

$$a = \frac{U_2}{E} = \frac{0{,}46}{0{,}1} = 4{,}6$$

apropiată de valoarea obţinută din (16).

In fig. 4-a este reprezentată variaţia amplificării, avînd ca parametru impedanţa generatorului din circuitul de grilă, în funcţie de tensiunea de alimentare. Stabilitatea amplificării este bună. Pentru o variaţie de 20% a tensiunii de alimentare, se observă că variaţia amplificarii este insensibilă.

Pentru variaţia sarcinei cu 40%, $a$ a variat cu 0,2%. Se observă din acest punct de vedere stabilitatea amplificării la variaţiile sarcinei.

In fig. 5 s-a ridicat experimental variaţia amplificării cu impedanţa circuitului de grilă (a generatorului).

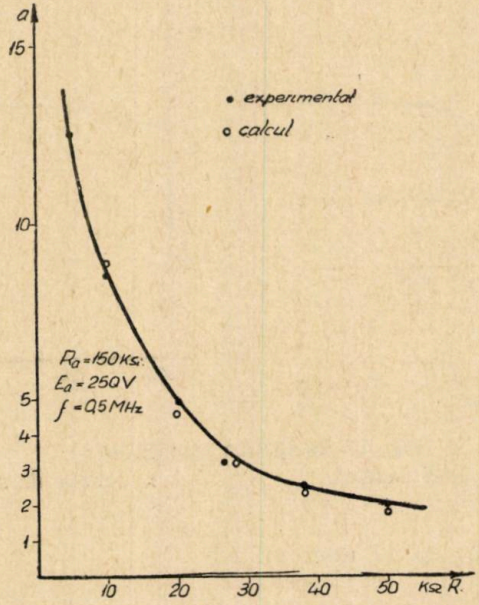



**Fig. 5—Variaţia amplificării, funcţie de admitanţa de grilă.**

In fig. 6 este reprezentată caracteristica de frecvență a acestui amplificator pentru $Y$ ca parametru.

Din expresia (16), dacă $Y = C\omega$ rezultă că amplificarea este independentă de frecvență. Experimental se constată într-adevăr că se liniarizează orizontal curba amplificării însă totuși există tendința la capete de scădere a amplificării.

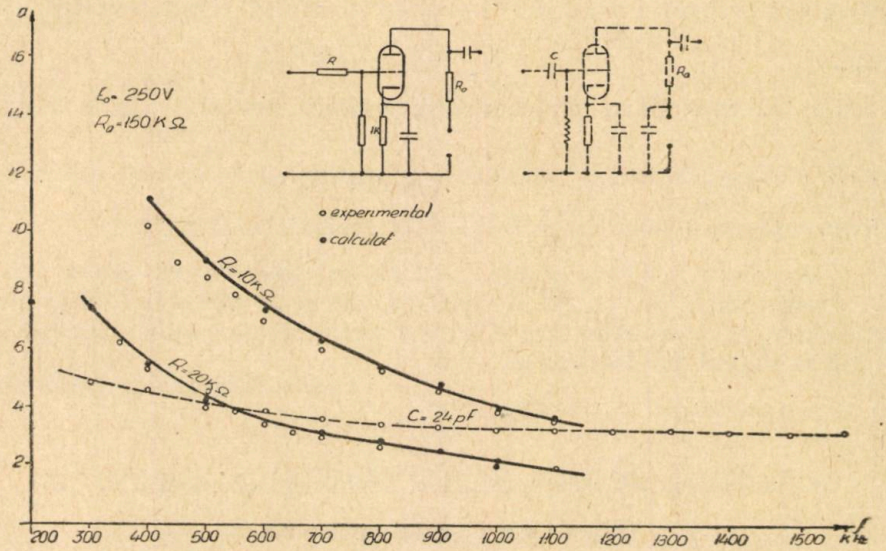



Fig. 6—Variația amplificării în funcție de frecvență pentru admitanță de grilă rezistivă și capacitivă.

Acest fenomen din urmă este explicabil, deoarece — așa cum se vede din fig. 7 — punctul în care s-a făcut experiența este situat în afara benzii de trecere a amplificatorului. A fost nacesară plasarea experienței în acest punct, pentru a se putea pune în evidență clar, reacția negativă care apare prin capacitatea grilă-anod.

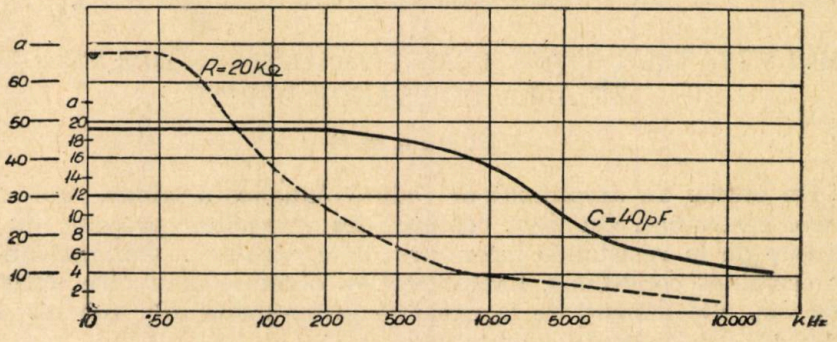



Fig. 7—Variația amplificării în funcție de frecvență pentru un domeniu de frecvențe mai mare ca în fig. 6.

Pentru exemplificarea acestui lucru, s-a indicat caracteristica de frecvență pentru o impedanță rezistivă și nu capacitîvă (a generatorului din circuitul de grilă) figura 7 de la 10 kHz pînă la 3 MHz.

După cum se vede, banda de frecvențe pentru rezistență este mai mică. Aceasta se explică că pe lîngă termenul $\frac{y_2}{y}$ din expresia (14) contează și termenul $\frac{1}{a_1}\left(1+\frac{y_1+y_2}{y}\right)$ atunci cînd variază frecvența.

Pentru capacitate, cu frecvență, variază numai $\frac{1}{a_1}$ care începe să devină comparabil cu $\frac{y_2}{y}$ și atunci amplificarea începe să scadă de la o frecvență ceva mai ridicată decît la rezistența (fig. 7).

*Concluzii*: Din cele desprinse aici, se observă că acest montaj este foarte stabil la variații de sarcină, cît și la variația tensiunii de alimentare. De asemenea amplificarea prezintă un palier aproape orizontal în raport cu frecvența.

*Catedra Electronică și Telecomunicații*

Primit la redacție la 25 V 1956.

## УСИЛИТЕЛЬ УСТОЙЧИВЫЙ К ИЗМЕНЕНИЯМ НАГРУЗКИ

(Краткое содержание)

Рассматривается триодный реостатный усилитель в диапазоне радиочастот. В работе учитываются междунарсдные ёмкости а также внутреннее сопротивление генератора из сеточной цепи.

Указывается, что усиление этого каскада не зависит от лампы, а от внутреннего сопротивления генератора, а также от ёмкости анод-сетка.

Этот усилитель обладает хорошей устойчивостью к изменениям нагрузки и к изменениям напряжений питания.

Усиление зависит от частоты и достигает порядка 4 ÷ 8,

В заключении такой усилитель обладает хорошей устойчивостью усиления, но неудовлетворительной частотной характеристикой,

## AMPLIFICATEUR STABILE AUX VARIATIONS DES TENSIONS ET À LA PUISSANCE DÉBITÉ

(Résumé)

On étudie un amplificateur radio-fréquence à triode, qui débite sur une résistance. On tient compte des capacités propres du tube ainsi que de la résistance interieure du générateur. On montre que, dans certaines conditions, l'amplification obtenue peut être constante. En ce cas, elle dépend de la capacité grille-anode du tub et de la résistance interieure du générateur.

L'amplification ne dépend pas des tensions d'alimentation ni de la résistance sur laquelle débite l'oscillateur mais elle dépend de la fréquence ; elle est de 4 à 8.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.314.2
621.362

# DIMENSIONAREA OPTIMĂ A TRANSFORMATORILOR DE PUTERE DE ÎNALTĂ FRECVENȚĂ PENTRU GENERATORII ELECTRONICI INDUSTRIALI

de CHR. VAZACA

## 1. INTRODUCERE

In instalațiile de încălzire prin inducție, transformatorul de adaptare a sarcinii la generatorul de putere joacă un rol important. El are rolul să transmită puterea de la generator la sarcină, cu un randament cît mai bun și să transforme impedanța de sarcină (constituită de inductorul de încălzire și piesă) într-o impedanță convenabilă sau optimă pentru funcționarea generatorului.

In general, impedanța de sarcină este foarte mică (de ordinul zecimilor de ohmi sau mai mică), tensiunea la bornele sale mică și curentul mare sau foarte mare, după puterea dată în sarcină. Partea rezistivă a impedanței de sarcină este de ordinul miliohmilor și curentul este de ordinul miilor de amperi, pentru puteri de ordinul kilowaților.

Generatorul de putere este, de obicei, o sursă cu impedanță internă mare, care dă un curent relativ mic, sub o tensiune relativ mare. Transformatorul de adaptare trebuie deci să facă o amplificare de curent de la sursă la sarcină. Cînd puterea transmisă este mare, transformatorul trebuie proiectat și realizat cu un randament cît mai mare; bobinajele sale trebuie realizate cu rezistențe cît mai mici posibil, la amplificarea de curent cerută, pentru a reduce pierderile date de curenții mari.

In principiu, această problemă de adaptare se pune la fel, atît la frecvențele joase (mii de Hz) date de generatorii rotativi, cît și la frecvențele înalte (sute de kHz) date de generatorii electronici. Detaliile constructive diferă : la joasă frecvență se utilizează un miez magnetic, la înaltă frecventă transformatorul este cu aer.

In studiul de față, se va analiza performanța unui transformator de înaltă frecvență cu aer, avînd secundarul format dintr-o singură spiră, sub forma unei foi care înconjoară bobinajul primar constituit din mai multe spire. Ambele bobinaje sînt constituite din conductori tubulari, pentru a permite trecerea apei de răcire, cum se arată în fig. 1, Aceasta este forma clasică de transformator utilizată, care se impune, dată fiind necesitatea unei amplificări mari de curent. Bobinajul primar se face cu un singur strat, aceasta fiind singura soluție acceptabilă, dacă se ține seamă de creșterea rezistenței bobinajului datorită efectului pelicular și de proximitate [1].

Locul unui asemenea transformator, în schema unui generator electronic, se arată în fig. 2. Aici se produce o primă amplificare de curent de la $I_a$ la $I$, prin rezonanța circuitului derivație din circuitul

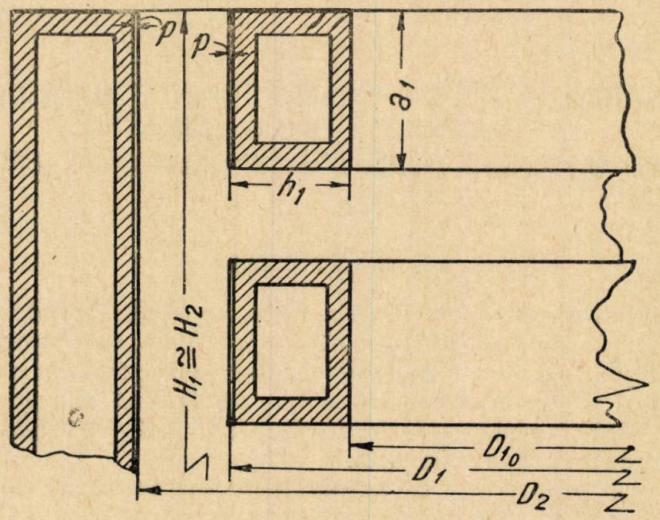



Fig. 1—Construcția transformatorului de înaltă frecvență, pentru instalațiile de încălzire prin inducție.

anodic al tubului oscilator; apoi, se realizează încă o amplificare de la $I$ la $I_1$ prin rezonanța (totală sau parțială) produsă între condensatorul $C$ și impedanța echivalentă văzută la bornele 1—2 ale transformato-

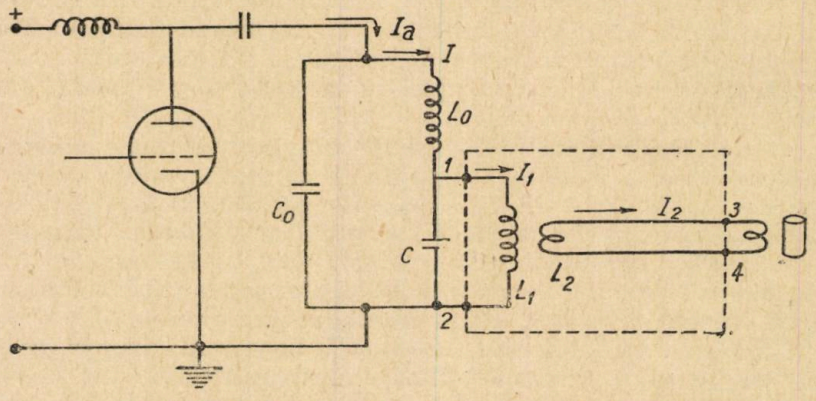



Fig. 2—Schemă de principiu a generatorului electronic.

rului de adaptare; în transformator se produce, pe cale magnetică, o amplificare a curentului de la $I_1$ la $I_2$, care este curentul debitat la bornele secundare 3—4 ale transformatorului.

Principalele date care stau la baza proiectării transformatorului, sînt :

1) frecvența generatorului, f ;

2) impedanța de sarcină $Z_s$, cu componentele sale $R_s$ și $X_s$ care este impedanța ansamblului inductor-piesă ;

3) puterea absorbită de inductor $P_2$ ;

4) tensiunea și curentul în inductor ($U_2$, $I_2$) care rezultă din punctele 2 și 3 de mai sus ;

5) tensiunea și curentul ($U_1$ și $I_1$), la bornele primare ale transformatorului de adaptare.

In afară de aceasta, se pot pune diferite condiții suplimentare :

a. Raportul dintre curentul primar de mers în gol și curentul de mers în sarcină, în primarul transformatorului ($I_{10}/I_1$). Acest raport este bine să fie cît mai mic. Dacă $I_{10}$ este mai mic, aceasta este un indiciu că puterea reactivă absorbită de transformator în sarcină poate fi mai mică pentru o impedanță de sarcină dată sau că factorul de putere în sarcină la bornele 1—2 poate fi mai bun, sau că valoarea condensatorului necesar pentru a aduce la rezonanță transformatorul în sarcină poate fi mai mic.

b. Raportul dintre tensiunea de scurt circuit a transformatorului și tensiunea nominală, în primarul transformatorului ($U_{1\,sc}/U_1$).

Acest raport este bine să fie cît mai mic. Dacă $U_{1\,sc}$ este mai mic, tensiunea $U_2$ în secundarul transformatorului poate avea o variație mai mică din gol în sarcină, pentru o tensiune $U_1$ fixă și o impedanță $Z_s$ dată. Această condiție poate să fie necesară cînd transformatorul este destinat să lucreze cu sarcini diferite. In afară de aceasta, dacă $U_{1\,sc}/U_1$ este mic, avem un indiciu că reactanțele de scăpări ale transformatorului sînt mici.

c. Randamentul global și parțial al transformatorului. De obicei, randamentul global se cere să fie mare—cel puțin $90\%$. Pentru instalațiile de putere mare se poate cere $95\%$. Aprecierea finală a transformatorului se face după randamentul său, care reprezintă condiția esențială și cifra sa de calitate.

Cînd în proiectare rezultă un randament nesatisfăcător, este bine să se examineze separat randamentul primarului și al secundarului, pentru a vedea contribuția fiecăruia la formarea randamentului global, așa cum se va arăta mai jos.

Pentru a justifica metoda de proiectare optimă, este necesar să se arate în prealabil relațiile de bază ale funcționării transformatorului sau calculul electric. Acest calcul servește ca metodă de verificare finală a unui transformator pentru care s-au stabilit dimensiunile geometrice și parametrii electrici.

## 2. CALCULUL ELECTRIC AL TRANSFORMATORULUI.

### 2.1. FUNCȚIONAREA IN SARCINĂ.

Din cauza efectului pelicular și de proximitate, curenții circulă la transformatorul în sarcină pe fața exterioară a bobinajului primar (diametrul $D_1$ în fig. 1) și pe fața interioară a bobinajului secundar (diametrul $D_2$).

La frecvenţele înalte, adîncimea de pătrundere este neglijabilă faţă de diametrele $D_1$ sau $D_2$. Dacă $s_1 = a_1 h_1$ este secţiunea conductorului şi $\sigma$ conductivitatea, rezistenţa primarului este :

$$R_1 = \frac{\pi D_1 n_1}{s_1 \sigma} k_R \qquad (1)$$

în care calculul coeficientului de creştere a rezistenţei se poate găsi în literatura de specialitate [1].

La frecvenţele înalte (sute de kHz), se poate lua cu suficientă aproximaţie :

$$k_R \cong \frac{h_1}{p}$$

Atunci, $R_1$ devine

$$R_1 = \frac{\pi D_1 n_1}{a_1 p \sigma} \qquad (2)$$

care nu este altceva decît rezistenţa în curent continuu a unui conductor echivalent format de un strat superficial de grosime $p$ ($p$ fiind „constanta de pătrundere" sau „adîncimea de pătrundere" a curentului în conductor).

Pentru $\sigma$ şi calculul lui $p$, trebuie să luăm conductivitatea cuprului la cald. Dacă prin sistemul de răcire, se prevede să se menţină o temperatură medie de $60^0\ C$, luăm $\sigma = 5 \cdot 10^5 \frac{1}{\Omega . \text{cm}}$ sau $\sigma = 2 \cdot 10^{-6}\ \Omega\ cm$.

Pentru spira secundară. avem analog :

$$R_2 = \frac{\pi D_2}{H_1 p \sigma} \qquad (3)$$

Inductanţa se poate calcula prin diferite formule cunoscute. Formula lui Lorenz dă :

$$L_1 = 0{,}5\ D_1 n_1^2 Q\ 10^{-9} \qquad (4)$$

şi

$$X_1 = \omega L_1 \qquad (5)$$

în care $L_1$ este în Henry, dacă $D_1$ este în cm. Factorul $Q$ este o funcţie de $\frac{D}{H}$ ; se poate lua după diagrama din fig. 3.

Pentru spira secundară avem :

$$L_2 = 0{,}5\ D_2 Q\ 10^{-9} \qquad (6)$$

$$X_2 = \omega L_2 \qquad (7)$$

Inductanţa mutuală dintre bobinajul primar şi secundar se poate calcula după diverse formule. Formula lui Esmarch dă:

$$M = \frac{\pi^2 D_1^2}{2 H_1} n_1 \cdot n_2 \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{H_1}{H_2}\right)^2 + \left(\frac{D_2}{H_2}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\left(1 - \frac{H_1}{H_2}\right)^2 + \left(\frac{D_2}{H_2}\right)^2} \right] 10^{-9} \qquad (8)$$

în care $M$ este în Henry dacă $D$ şi $H$ se iau în cm.

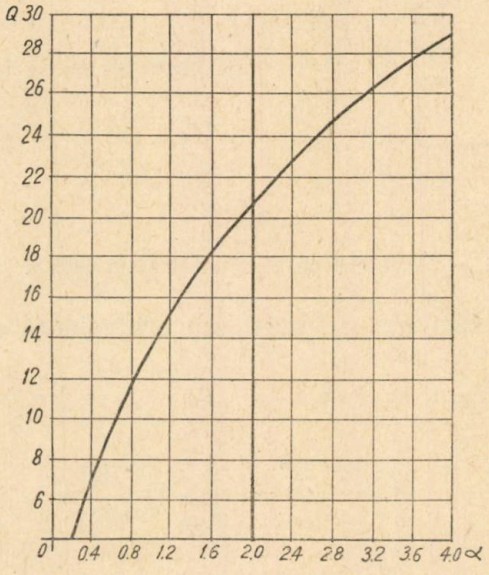



Fig. 3 — Fctorul Q pentru calculul inductanţei, $Q = f(\alpha)$.

In cazul nostru, $n_2 = 1$ şi dacă $\frac{H_1}{H_2} \simeq 1$, formula se poate simplifica:

$$M = \frac{\pi^2 D_1^2}{2 H_1} n_1 \left[ \sqrt{4 + \left(\frac{D_2}{H_2}\right)^2} - \frac{D_2}{H_2} \right] 10^{-9} \qquad (9)$$

$$X_m = \omega M \qquad (10)$$

Cu aceasta, putem să calculăm toate mărimile din schema electrică a transformatorului (fig. 4).

Sarcina transformatorului, la bornele 3 — 4 este cunoscută prin $Z_s$ şi cos $\varphi_2$ sau $R_s$ şi $X_s = \omega L_s$. De asemenea, se cunoaşte mărimea curentului $I_2$ în bobina inductoare şi prin urmare tensiunea $U_2$ în mărime şi fază şi puterea $P_2$.

Notăm cu $R_{II}$, $X_{II}$ și $Z_{II}$ rezistența, reactanța și impedanța totală a circuitului secundar:

$$R_{II} = R_2 + R_s\,;\; X_{II} = X_2 + X_s\,;\; Z_{II} = \sqrt{R_{II}^2 + X_{II}^2} \simeq X_{II} \qquad (11)$$

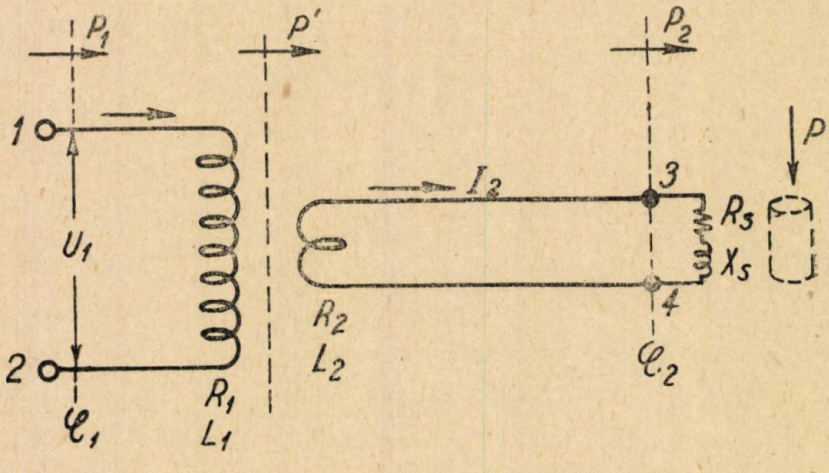



Fig. 4 — Schema electrică a transformatorului și sarcinii.

Rezistența, reactanța și impedanța echivalentă a primarului sînt atunci:

$$R_I = R_1 + k^2\, R_{II}\,;\quad X_I = X_1 - k^2\, X_{II}\,;\quad Z_I = \sqrt{R_I^2 + X_I^2} \simeq X_I \qquad (12)$$

în care:

$$k^2 = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{II}^2} = -\frac{X_m^2}{Z_{II}^2} \simeq \frac{M^2}{L_{II}^2} \qquad (13)$$

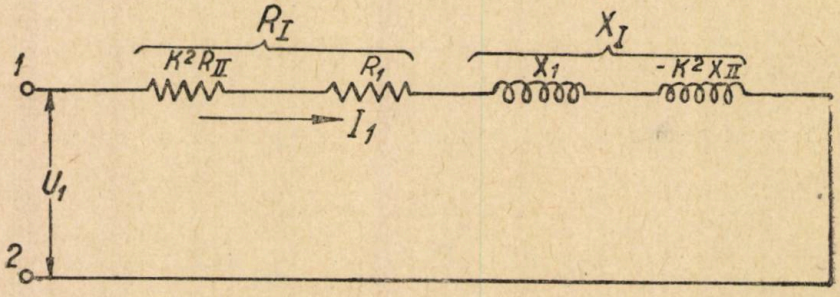



Fig. 5 — Schema echivalentă a transformatorului în sarcină.

Curentul și tensiunea primară sînt:

$$I_1 = \frac{I_2}{k} \qquad (14)$$

$$U_1 = Z_I\, I_1 \qquad (15)$$

Cu aceasta, schema din fig. 4 se poate reduce la schema din fig. 5.

In trecerea energiei electrice de la bornele 1—2 la bornele 3—4 se produc mai multe pierderi și deosebim mai multe randamente:

$$\eta_{primar} = \frac{P'}{P_1} = \frac{k^2 R_{II}}{R_I} \tag{16}$$

$$\eta_{secundar} \frac{P_2}{P'} = \frac{R_s}{R_{II}} \tag{17}$$

$$\eta_{transformator} = \eta_{primar} \cdot \eta_{secundar} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{k^2 R_s}{R_I} \tag{18}$$

De la bornele 3—4 la piesa încălzită intervine randamentul de transfer al bobinei inductoare:

$$\eta_{transfer} = \frac{P_s}{P_2} \tag{19}$$

De la bornele 1—2 la piesa încălzită avem un randament global de transfer:

$$\eta = \eta_{transformator} \cdot \eta_{transfer} = \frac{P_s}{P_1} \tag{20}$$

O dată cu pierderea de putere activă, se produce și o mare pierdere de putere reactivă. In primarul transformatorului, puterea re tivă este mult mai mare, decît în secundar și factorul de putere m mai mic. Dacă factorul de putere a sarcinii (la bornele 3 — 4) este $\cos \varphi_2 = \frac{R_s}{Z_s}$ este de ordinul zecimilor, factorul de putere la bornele primare 1—2:

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_I}{Z_I} \simeq \frac{R_I}{X_I} \tag{21}$$

este de ordinul sutimilor. Cu alte cuvinte, curentul magnetizant al fransformatorului este foarte mare, din cauza lipsei unui miez magnetic și prezenței unui flux mare de dispersie.

## 2.2. FUNCȚIONAREA IN GOL

Cînd curentul secundar se anulează, curentul primar nu mai este supus efectului de proximitate și el se deplasează, sub acțiunea efectului de buclă, pe partea interioară a bobinajului primar (diametrul $D_{10}$).

Din acest motiv, rezistența primarului devine:

$$R_{1_0} = \frac{\pi D_{10} n_1}{a_1 p \sigma} \tag{22}$$

reactanța se micșorează la valoarea:

$$X_{1_0} = \omega L_{1_0} = \omega\ 0{,}5\ D_{1_0}\ n_1^2\ Q\ 10^{-9} \tag{23}$$

și impedanța primarului în gol este:

$$Z_{1_0} = \sqrt{R_{1_0}^2 + X_{1_0}^2} \simeq X_{1_0} \tag{24}$$

Este de dorit ca această impedanță să fie suficient de mare, pentru ca să nu avem un curent în gol prea mare:

$$I_{1_0} = \frac{U_1}{Z_{1_0}} \tag{25}$$

La un raport $\frac{D}{H}$ dat, avem interesul să luăm un diametru mare, ca să realizăm un raport $I_{10}/I_1$ mic, la același număr de spire.

### 2.3. FUNCȚIONAREA IN SCURTCIRCUIT

Cînd impedanța de sarcină se anulează (bornele 3—4 scurt-circuitate), formulele (12) devin:

$$R_{I_{sc}} = R_1 + k_{sc}^2 R_2;\ X_{I_{sc}} = X_1 - k_{sc}^2 X_2;\ Z_{I_{sc}} = \sqrt{R_{I_{sc}}^2 + X_{I_{sc}}^2} \simeq X_{I_{sc}} \tag{26}$$

în care:

$$k_{sc}^2 = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} \simeq \frac{M^2}{L_2^2} \tag{27}$$

Tensiunea aplicată primarului, în această situație, pentru a absorbi același curent $I_1$ din funcționarea în sarcină, se numește tensiunea de scurtcircuit:

$$U_{1_{sc}} = I_1 Z_{I_{sc}} \simeq I_1 X_{I_{sc}} \tag{28}$$

Această tensiune reprezintă căderea de tensiune produsă de rezistențele și reactanțele de scăpări ale transformatorului; este de dorit ca valoarea ei să fie redusă, pentru a obține un raport $U_{1_{sc}}/U_1$ mai mic. Pentru aceasta trebuie să mărim cuplajul dintre bobinajul primar și secundar și să micșorăm diametrul. Distanța între bobinaje nu poate fi scăzută sub limita impusă de tensiunea dintre bobinaje și izolamentul utilizat (de obicei ulei). Se vede că tensiunea de scurt circuit și curentul de mers în gol pun condiții contradictorii și trebue făcut un compromis.

Pentru a micșora numărul calculelor de tatonare necesare pentru a realiza acest compromis, se va examina mai jos variația performanței transformatorului cu diferiți parametri, din care se va deduce o metodă nouă de proiectare.

## 3. VARIAȚIA PERFORMANȚEI TRANSFORMATORULUI CU DIMENSIUNILE ȘI CU SARCINA.

### 3.1. APROXIMAȚII ȘI NOTAȚII.

Pentru simplificarea formulelor se vor introduce cîteva aproximații justificate de practică.

*Înălțimile bobinajului primar* ($H_1$) *și secundar* ($H_2$) se iau egale, de obicei, pentrucă situația $H_2 > H_1$ se dovedește că este nefavorabilă, prin creșterea rezistenței bobinajului provocată de liniile de flux de la capetele bobinei care părăsesc direcția axială.

Deci, se va lua :

$$H_1 \simeq H_2 \simeq H \tag{29}$$

*Raportul dintre diametru și înălțime* se poate considera aproximativ același pentru toate situațiile :

$$\frac{D_1}{H_1} \simeq \frac{D_2}{H_2} \simeq \frac{D_{10}}{H_1} \simeq \frac{D}{H} = \alpha \tag{30}$$

Această aproximație este justificată în practică în cazul transformatorilor de putere, cu diametre suficient de mari față de jocul dintre bobinaje ($D_2 - D_1$) și grosimea $h_1$ a conductorului primar.

De obicei, transformatorul se pune în ulei și jocul dintre bobinaje se micșorează la limita admisă de rigiditatea dielectrică a uleiului cu marginea de siguranță respectivă. (Se poate indica, de exemplu, 1 mm pentru fiecare kilovolt diferență de potențial între bobinaje).

Secțiunea conductorului primar se ia cu latura $h_1$ mult mai mică, decît $a_1$. ($h_1$ este de obicei de ordinul milimetrilor).

*Factorul* $Q$ din formula de calcul a inductanței corespunzător rapoartelor $\frac{D_1}{H_1}$ și $\frac{D_{10}}{H_1}$, se va lua baza aproximațiilor de mai sus :

$$Q_1 \simeq Q_{10} \simeq Q \ . \tag{31}$$

*Raportul dintre inductanțe* : $L_2$ a spirei secundare și $L_s$ a impedanței de sarcină, se va nota :

$$\beta = \frac{L_2}{L_s} \tag{32}$$

*Parametrul dimensiunilor geometrice.* In desvoltările de mai jos se va folosi parametrul :

$$\gamma = \frac{\alpha}{Q}\left[\sqrt{4 + \alpha^2} - \alpha\right] \tag{33}$$

Acest parametru este o funcție de $\alpha = \frac{D}{H}$ și se poate calcula folosind curba $Q = f(\alpha)$ din fig. 3.

*Neglijarea rezistențelor față de reactanțe,* în circuitul primar și secundar al transformatorului rezultă de obicei reactanțe totale cu mult

mai mari decît rezistențele, de aceea impedanțele pot fi înlocuite cu reactanțele în calculul tensiunilor și curenților. In circuitul secundar al transformatorului apare rezistența $R_s$ a impedanței de sarcină, care deși poate să nu fie neglijabilă față de reactanța $X_s$, este de obicei, neglijabilă față de reactanța totală $X_{II} = X_2 + X_s$, la un transformator proiectat în condiții normale.

### 3.2 RANDAMENTUL

In expresia randamentului se introduc succesiv aproximațiile propuse :

$$\eta = \frac{k^2 R_s}{R_I} = \frac{k^2 R_s}{R_1 + k^2 (R_2 + R_s)} \simeq \frac{k^2 R_s}{R_1 + k^2 R_s} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{k^2 R_s}} \tag{34}$$

Se poate scrie pentru $k^2$ :

$$k^2 = \left(\frac{X_m}{X_{II}}\right)^2 = \left(\frac{M}{L_2 + L_s}\right)^2 \tag{35}$$

Folosind expresiile (6) , (9) și parametrul $\gamma$ se obține :

$$k^2 = n^2 (\pi^2 \gamma)^2 \left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right)^2 \tag{36}$$

și expresia randamentului devine :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_s} \frac{1}{n^2} \frac{1}{(\pi^2 \gamma)^2} \left(\frac{1 + \beta}{\beta}\right)^2}. \tag{37}$$

Din această expresie, n-ar trebui să se tragă concluzia greșită că randamentul ar crește cînd numărul de spire $n$ crește. Pentru o înălțime $H$ dată, rezistența $R_1$ a bobinajului crește aproximativ cu $n^2$ conform relației (2), dacă ținem seamă că înălțimea $a_1$ a conductorului variază aproximativ invers proporțional cu $n$, cînd $H$ rămîne constant.

Notînd :

$$\varrho = \frac{R_1}{n^2 R_s} \tag{38}$$

$$\xi = \varrho \left(\frac{1 + \beta}{\beta}\right)^2 \tag{39}$$

se obține :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{\xi}{(\pi^2 \gamma)^2}} \tag{40}$$

Dînd diferite valori lui $\alpha$, deci implicit lui $\gamma$ și lui $\xi$ se poate trasa variația randamentului cu $\alpha = \frac{D}{H}$ pentru diferite valori $\xi$ (fig. 6) sau variația cu $\xi$ pentru diferite valori $\alpha$ (fig. 7). Ambele familii de curbe arată că randamentul scade cînd $\alpha$ crește și $\xi$ = constant, sau

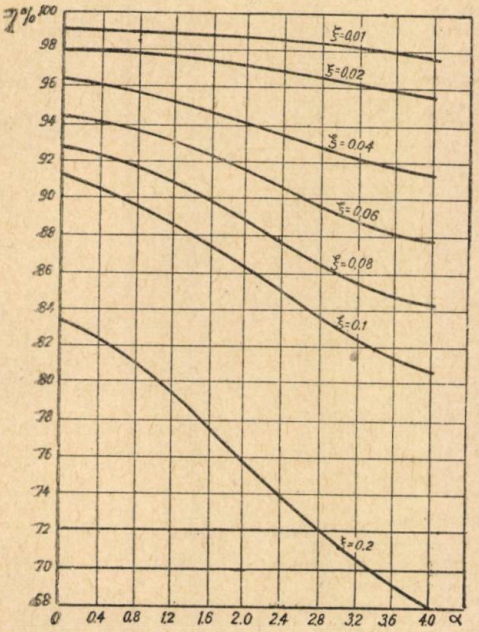



Fig. 6 — Variația randamentului transformatorului. $\eta = f(\alpha)$.

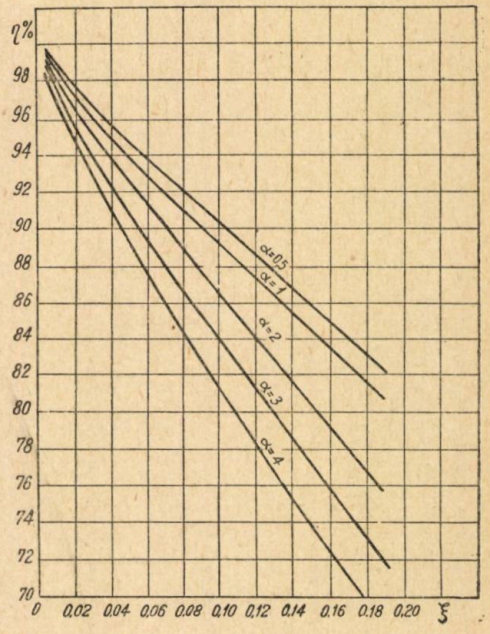



Fig. 7 — Variația randamentului transformatorului. $\eta = f(\xi)$.

scade cînd $\xi$ crește și $\alpha$ = const. Deci, pentru un randament bun trebuie să luăm un raport $\alpha = \frac{D}{H}$ mic și un factor $\xi$ mic. Pentru micșorarea lui $\xi$ este necesar ca $\varrho$ să fie mic (adică rezistența de sarcină $R_s$ cît mai mare față de $\frac{R_1}{n^2}$) sau $\beta$ să fie mare.

Din (2), se poate scrie :

$$\frac{R_1}{n^2} = \frac{\pi D_1}{n a_1 p \varrho} \simeq \frac{\pi D_1}{H_1 p \varrho} \tag{41}$$

deci micșorarea lui $\frac{R_1}{n^2}$ coincide în oarecare măsură cu micșorarea lui $\alpha$,

Din fig. 8 se vede că factorul $\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)^2$ scade repede cu $\beta$ pînă la $\beta = 3 \ldots 4$. Diagramele mai arată că influenţa variaţiei lui $\alpha$ este mică dacă $\xi$ este mic ($< 0{,}05$). Pentru $\alpha$, in jurul valorii 1, se obţin randamente bune dacă $\xi < 0{,}1$.

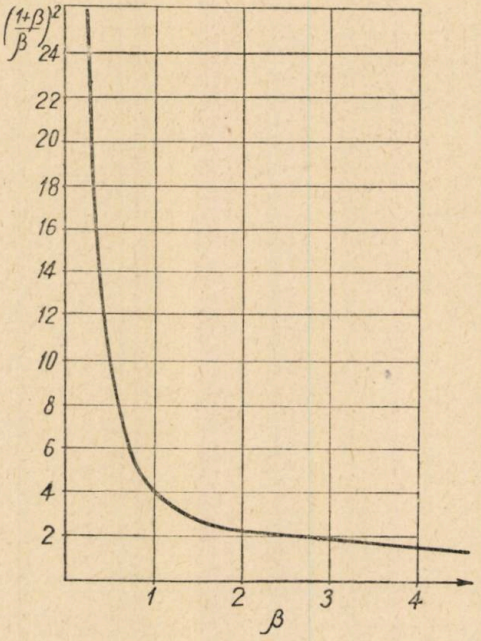



Fig. 8 — Variaţia factorului $\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)^2$.

### 3.3. CURENTUL DE MERS IN GOL

Cu aproximaţiile şi notaţiile introduse se poate scrie:

$$y = \frac{I_{10}}{I_1} = \frac{X_1 - \frac{X_m^2}{X_{II}}}{X_{10}} \simeq 1 - \frac{X_m^2}{X_1 X_{II}} \tag{42}$$

$$y = 1 - (\pi^2 \gamma)^2 \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) \tag{43}$$

In diagrama din fig. 9 s-a reprezentat variaţia lui $y$ cu $\alpha$ pentru diferite valori $\beta$, iar în diagrama din fig. 10 s-a reprezentat variaţia lui $y$ cu $\beta$ pentru diferite valori $\alpha$. Se vede că raportul $y$ variază

simțitor atît cu $\alpha$ cît și cu $\beta$; pentru a obține o valoare $Y$ mică este necesar un $\alpha$ mic și un $\beta$ mare. Mărirea lui $\beta$ este cu atît mai eficace cu cît $\alpha$ este mai mic. O creștere peste valoarea $\beta = 3 \ldots 4$ nu este interesantă.

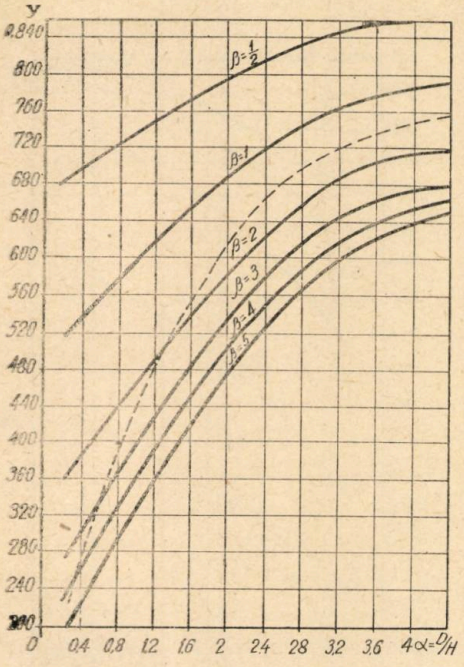



Fig. 9 — Variația curentului de mers în gol. $\frac{I_{10}}{I_1} = Y = f(\alpha)$

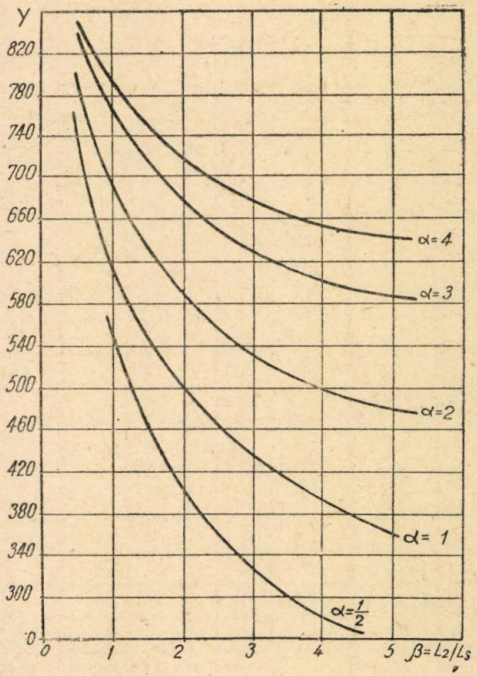



Fig. 10 — Variația curentului de mers în gol. $\frac{I_{10}}{I_1} = Y = f(\beta)$

### 3.4. TENSIUNEA DE SCURTCIRCUIT

Cu aproximațiile și notațiile introduse, se poate scrie:

$$X = \frac{U_{1\,sc}}{U_1} = \frac{X_1 - k^2_{sc}\, X_2}{X_1 - k^2\, X_{II}} = \frac{1 - \dfrac{X_m^2}{X_1 X_2}}{1 - \dfrac{X_m^2}{X_1 X_{II}}} = \frac{1 - \dfrac{M^2}{L_1 L_2}}{1 - \dfrac{M^2}{L_1(L_s + L_2)}} \qquad (44)$$

$$X = \frac{1 - (\pi^2 \gamma)^2}{1 - \dfrac{\beta}{1+\beta}(\pi^2 \gamma)^2} \qquad (45)$$

In diagrama din fig. 11 s-a reprezentat variaţia lui $X$ cu $\alpha$ pentru diferite valori $\beta$, iar în diagrama din fig. 12 s-a reprezentat variaţia lui $X$ cu $\beta$ pentru diferite valori $\alpha$. Se vede că raportul $X$ scade repede cu micşorarea lui $\alpha$. Diagrama nu trebuie utilizată însă pentru $\alpha < 0{,}5$ pentru că aproximaţiile făcute sînt mai puţin valabile şi erorile cresc repede. Pentru a obţine o valoare $X$ mică, este necesar un

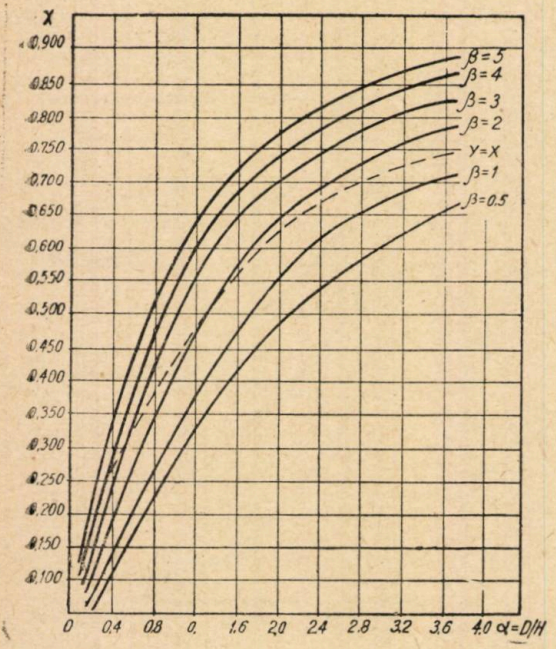



Fig. 11 — Variaţia tensiunii de scurt-circuit. $\frac{U_1 sc}{U_1} = X = f(\alpha)$

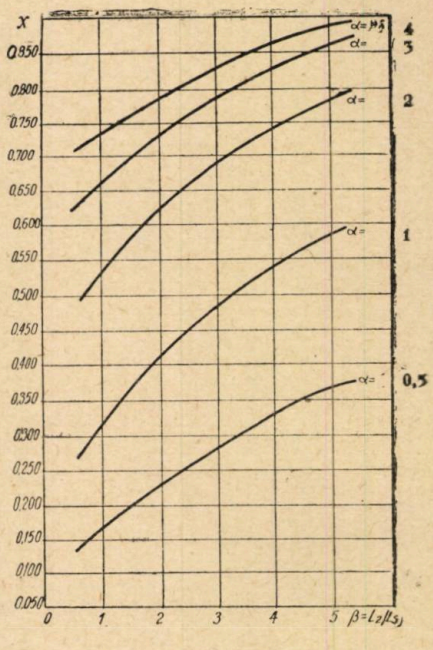



Fig. 12 — Variaţia tensiunii de scurt-circuit, $\frac{U_1 sc}{U_1} = X = f(\beta)$

$\alpha$ mic şi un $\beta$ mic. In ce priveşte $\beta$, se vede că apar cerinţe contradictorii pentru $X$ şi $Y$; pentru a micşora pe $X$ trebuie micşorat $\beta$, iar pentru a micşora pe $Y$ trebuie mărit $\beta$. La un $L_s$ dat $\beta$ creşte sau scade cînd diametrul transformatorului creşte sau scade.

Un compromis se poate realiza cînd $X = Y$. Din relaţiile (43) şi (45) obţinem:

$$X\,Y = 1 - (\pi^2 \gamma)^2 \tag{46}$$

Deci, pentru $X = Y$:

$$X = Y = \sqrt{1 - (\pi^2 \gamma)^2} \tag{47}$$

Cu ajutorul acestei relaţii s-a trasat curba punctată din fig. 9 şi 11.

La intersecția acestei curbe cu curbele $X = f(\alpha)$ sau $Y = f(\alpha)$ se obțin valorile $\alpha = \frac{D}{H}$ pentru care se realizează acest compromis. Situații avantajoase se obțin pentru valori $\alpha$ mici și valori $\beta$ mari. Trebuie să observăm însă că pentru un $\beta$ dat, o valoare $\alpha$ mică conduce la dimensiuni mari ale transformatorului, iar pentru un $\alpha$ dat, o valoare $\beta$ mare conduce de asemenea la dimensiuni mari.

### 3.5. RAPORTUL DE TRANSFORMARE.

Plecînd de la relația (13), se poate scrie:

$$k \simeq \frac{M}{L_2 + L_s} = n\,(\pi^2\,\gamma)\,\frac{\beta}{1+\beta} = n\,\varepsilon \qquad (48)$$

în care:

$$\varepsilon = (\pi^2\,\gamma)\,\frac{\beta}{1+\beta} \qquad (49)$$

este un factor de reducere a raportului numărului de spire, acest factor depinde de $\alpha = \frac{D}{H}$ și de $\beta = \frac{L_2}{L_s}$. In diagramele din fig. 13 s-a repre-

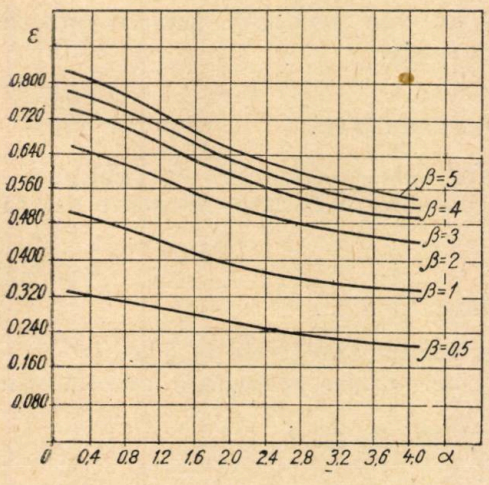



Fig. 13 — Variația factorului de corecție al raportului de transformare. $\varepsilon = f(\alpha)$

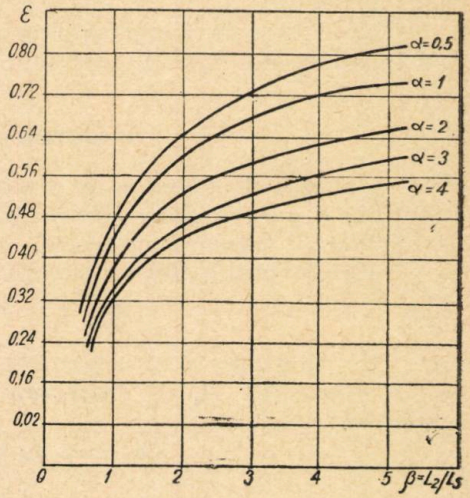



Fig. 14 — Variația factorului de corectie al raportului de transformare. $\varepsilon = f(\beta)$

zentat variația lui $\varepsilon$ cu $\alpha$ pentru diferite valori $\beta$, iar în diagramele din fig. 14 s-a reprezentat variația lui $\varepsilon$ cu $\beta$ pentru diferite valori $\alpha$.

Se vede că, pentru un număr de spire dat, raportul de transformare și amplificare de curent este cu atît mai mare, cu cît $\alpha$ este mai

mic la un β dat, sau cu cît β este mai mare pentru un α dat. Asta înseamnă că dacă se dă $L_s$ și numărul de spire, un transformator de dimensiuni mari dă rezultate mai bune; pentru un transformator dat, amplificarea scade cînd $L_s$ crește (β scade).

## CONCLUZII GENERALE.

Rezumînd concluziile obținute la punctele de mai sus, se poate spune că din punct de vedere al randamentului, al amplificării de curent și al curentului de mers în gol, este bine să luăm un transformator de dimensiuni mari, la care se obține un raport $\beta = \frac{L_2}{L_s}$ mare, un raport $\alpha = \frac{D}{H}$ mic și un raport $Y = \frac{I_{10}}{I_1}$ mic. Mărimea β nu este necesar să depășească valoarea (3... 4), iar α nu este necesar să scadă sub 0,5. In ce privește alegerea bobinajului primar, în afara numărului de spire n, (de care depinde amplificarea de curent), se va ține seamă la alegerea secțiunii conductorului că este bine să se realizeze o valoare ξ mai mică de cît 0,1.

In ce privește tensiunea de scurt circuit și raportul $X = \frac{U_{1sc}}{U_1}$, s-a văzut că ar fi de dorit un raport β mic. Judecînd după curbele punctate diu fig. 9 și 11, care indică situația de compromis dintre $X$ și $Y$, se poate spune că pentru α esfe recomandabil $\alpha = 0{,}6 \ldots 1$, dacă $\beta = 3$ sau $\alpha = 1 \ldots 1{,}4$, dacă $\beta = 2$.

Cînd sarcina transformatorului nu este constantă, performanța sa se înrăutățește, dacă $L_s$ crește și $R_s$ scade.

## 4. METODA DE PROIECTARE.

Punctul de plecare în proiectare este cunoașterea impedanței de sarcină, a puterii dată sarcinii și a curentului $I_1$ care se poate debita în primarul transformatorului.

Datele problemei sînt astfel:

$$R_s, \; L_s, \; P_2 \text{ (sau } I_2) \text{ și } I_1.$$

Se aleg apoi β și α potrivit cu recomandările de la § 3.

*Diametrul* $D_2$ *și înălțimea* $H_2$ *ale spirei secundare* rezultă din relațiile:

$$L_2 = \beta \; L_s = 0{,}5 \; Q_2 \; D_2 \; 10^{-9}$$

$$\alpha = \frac{D_2}{H_2}$$

$$Q_2 = f(\alpha) \text{ — (v. fig. 3).}$$

Cunoscînd pe α și β, se obține din fig. 13 sau 14 parametrul ε, apoi fiind dat $I_1$ și $I_2$, se obține *numărul de spire* n din relația:

$$n = \frac{I_2}{I_1} \frac{1}{\varepsilon}$$

Cunoscînd pe $D_2$ și $H_2$ se calculează rezistența $R_2$ a spirei secundare, cu relația (3), se află puterea disipată în această rezistență de curentul $I_2$ și se alege secțiunea goală a spirei, pentru a permite trecerea unui debit de apă de răcire corespunzător (ridicarea de temperatură admisă $60^o - 80^0$).

Cu valorile $\alpha$ și $\beta$ de mai sus, se găsește în fig. 11 sau 12 mărimea $X = \frac{U_{1sc}}{U_1}$.

Tensiunea secundară fiind cunoscută ($U_2 = Z_s I_2$) se poate găsi cu aproximație $U_1$ din relația:

$$U_1 = U_{1sc} + k U_2 = \frac{k}{1 - X} U_2$$

Cunoscînd pe $U_1$ cu aproximație, se poate alege *distanța dintre bobinajul primar și secundar*:

$$2 \Delta = D_2 - D_1.$$

Distanța $\Delta$ trebuie să fie suficientă pentru a suporta tensiunea $U_1$ ($1kV$/mm în ulei, $3kV$/cm în aer).

Se obține astfel *diametrul* $D_1$ *și înălțimea* $H_1$ *a bobinajului primar*:

$$D_1 = D_2 - 2\Delta$$

$$H_1 \simeq H_2.$$

Fiind dat $H_1$ și $n$ se alege *dimensiunea* $a_1$ *a conductorului primar*, astfel ca să rămînă între spire o distanță potrivită cu tensiunea pe spiră.

Se calculează rezistența $R_1$ și puterea disipată de curentul $I_1$ și se alege dimensiunea $h_1$, astfel ca secțiunea goală a conductorului să permită trecerea unui debit de apă de răcire corespunzător.

Peretele conductorului primar și secundar trebuie să aibă o grosime de cel putin $5$ $p$.

Odată cunoscute dimensiunile transformatorului. se face calculul exact al performanței sale, după relațiile date la § 2. Dacă este necesar, se modifică distanța $\Delta$ sau alte dimensiuni, după concluziile primului calcul și se reface calculul electric.

Primit la redacție la 15 IV 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *Chr. Vazaca*—Incălzirea prin inducție în joasă și înaltă frecventă. Editura Academiei R. P. R. 1956.

## ОПТИМАЛЬНЫЙ РАСЧЁТ СИЛОВЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

(Краткое содержание)

Анализируется роль силового трансформатора высокой частоты в электронных генераторах для индукционного нагрева и зависимость его работы от различных параметров. Исследование имеет целью развить метод проектирования, который избегал бы или уменьшал последовательно-приближённые расчёты.

Исходя от основных уравнений воздушного трансформатора получают ряд диаграмм, позволяющих следить за изменением условий работы трансформатора при изменении его размеров или сопротивления нагрузки. Выводится новый метод оптимального расчёта трансформатора в данном случае применения.

## THE OPTIMUM DESIGN OF THE HIGH FREQUENCY POWER TRANSFORMER FOR INDUSTRIAL ELECTRONIC GENERATORS

(Résumé)

The rôle of the high frequency power transformer used in the electronic generators for induction heating and the variations of its performance with several parameters are analized, with a view to obtaining a method of design which would avoid or lessen the cut and try calculations.

Starting from the basic equations of the air-core tranformer, a series of diagrams are obtained which may be used to follow the variations in the transformer's performance with its physical dimensions or with the load impedance.

A new metod is derived which allows the optimum design of the transformer for a given case of application.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.319.551
517.9

# ASUPRA TRATĂRII IDEALIZATE A CIRCUITELOR RELAXAT-OSCILANTE

de M. DRĂGĂNESCU

## 1. INTRODUCERE

Termenul de «oscilații de relaxare» a fost introdus de Van der Pol pentru a caracteriza oscilațiile care prezintă cuasidiscontinuități în ciclul lor, ceea ce face ca aceste oscilații să fie bogate în armonice și să apară puternic deformate. Tot el a arătat legătura strînsă care există între oscilațiile armonice și oscilațiile de relaxare. De exemplu, pentru oscilatorul cu un singur tub, el a stabilit ecuația cunoscută [1] $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ unde, dacă $\varepsilon$ este mic (de exemplu, $\varepsilon = 0{,}1$), oscilațiile sunt aproape armonice însă, pe măsură ce $\varepsilon$ crește, oscilațiile se deformează iar pentru valori mari ale lui $\varepsilon$ (de exemplu $\varepsilon = 10$), capătă caracterul oscilațiilor de relaxare. Rezolvarea analitică a ecuației lui Van der Pol, scrisă mai înainte, este posibilă în special pentru valori mici ale lui $\varepsilon$, cînd ecuația este cuasiliniară, în timp ce pentru valori mari ale lui $\varepsilon$, rezolvarea analitică devine extrem de complicată. Studiul analitic al oscilațiilor de relaxare fiind foarte dificil, în tratarea unor asemenea probleme se pune în special accentul pe tratarea topologică, în planul fazelor $(x, \dot{x})$. Analiza topologică este însă o analiză calitativă; ea este utilă și în cazul cînd problema se poate rezolva analitic deoarece ghidează studiul analitic către anumite forme de soluții, corespunzătoare anumitor regiuni din planul fazelor.

In articolul de față se expun unele observații asupra tratării idealizate a circuitelor electrice. Un circuit se consideră idealizat atunci cînd se neglijează anumiți parametrii mici ai circuitului, cum sînt capacitățile și inductanțele parazite. In analiza topologică tratarea idealizată introduce pe lîngă noțiunea cunoscută de punct singular, noțiunea de punct critic [2]. Punctele critice sînt punctele unde ecuațiile diferențiale care descriu sistemul încetează de a-l mai descrie. Pentru asemenea puncte, Mandelstam postulează [2] apariția unei discontinuități în comportarea sistemului, discontinuitate care se poate determina din considerații energetice. Oscilațiile cu discontinuități au caracterul oscilațiilor de relaxare. In articol se arată pe marginea unor exemple simple, că este necesară o definire mai precisă a noțiunii de punct critic, pentru că nu totdeauna se poate asocia punctului critic o discontinuitate. Se urmărește tratarea neidealizată și idealizată în cazul unui circuit simplu cu organ dinatron. Tratarea idealizată dă un răspuns corect, prin folosirea postulatului lui Mandelstam, în cazul cînd siste-

mul oscilează; însă, răspunsul nu mai este corect în cazul cînd sistemul nu oscilează. In acest ultim caz, tratarea idealizată duce la concluzii eronate în ceea ce priveşte comportarea sistemului, deoarece capacitatea parazită a organului dinatron joacă un rol hotarîtor în comportarea lui. Şi în cazul cînd sistemul oscilează, capacitatea este esenţială, deoarece în lipsa capacităţii parazite nu se pot explica oscilaţiile de relaxare din punct de vedere fizic.

## 2. OSCILAŢIILE DE RELAXARE ALE UNUI CIRCUIT CU ORGAN DINATRON.

Pentru circuitul din fig. 1, avînd în vedere notaţiile din figură, se pot scrie ecuaţiile circuitului

$$\begin{aligned} u + L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 &= O \\ i &= f(u) \\ u &= \frac{1}{C}\int i\,dt \\ i_1 &= i + i_c \end{aligned} \tag{1}$$

unde a doua ecuaţie reprezintă caracteristica organului dinatron. Se va presupune o caracteristică simetrică faţă de origine şi care trece prin origine:

$$f(u) = -\frac{1}{\varrho}u + b\,u^3 \tag{2}$$

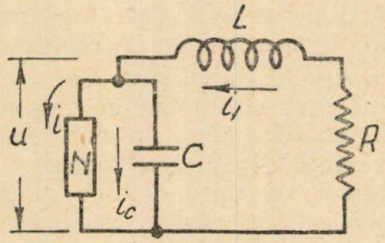



Fig. 1—Circuit oscilant cu organ dinatron.

Din relaţiile (1) se obţine ecuaţia diferenţială

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} = \left[Lf'(u) + RC\right]\frac{du}{dt} + u + Rf(u) = O \tag{3}$$

Notînd

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{4}$$

și schimbînd variabila independentă conform relației

$$\tau = \omega_0 t \tag{5}$$

se obține ecuația

$$\ddot{u} + [L f'(u) + RC]\,\omega_0 \dot{u} + u + R f(u) = O \tag{6}$$

unde derivatele lui $u$ se înțeleg în raport cu $\tau$.

Ținînd cont de (4), ecuația (6) devine

$$\ddot{u} + \sqrt{\frac{L}{C}}\left[\frac{RC}{L} + f'(u)\right]\dot{u} + u + R f(u) = O \tag{7}$$

Este cunoscut [1] că circuitul din fig. 1 trece către oscilații de relaxare o dată cu creșterea inductanței ($L \to \infty$). Atunci în ecuația (7) termenul $\frac{R\,C}{L}$ va fi neglijat față de $f'(u)$:

$$\ddot{u} + \mu f'(u)\,\dot{u} + u + R f(u) = O \tag{8}$$

unde

$$\mu = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{9}$$

$\mu$ avînd o valoare foarte mare. Pentru studiul traiectoriilor în planul fazelor nu se va folosi planul obișnuit ($u$, $\dot{u}$) ci, după Liénard, planul ($u$, $v$) unde

$$v = \frac{\dot{u}}{\mu} + f(u) \tag{10}$$

Se poate constata ușor că $v$ reprezinta curentul $i_1$, prin inductanța $L$. Acum se pot obține ecuațiile diferențiale ale traiectoriilor în planul ($u$, $v$). Din (10) se obține,

$$\frac{du}{d\tau} = \mu\,[v - f(u)] \tag{11}$$

iar diferențiind (10) și ținînd cont de (8),

$$\frac{dv}{d\tau} = -\frac{u + R f(u)}{\mu} \tag{12}$$

Făcînd raportul ecuației (12) la ecuația (11) se obține ecuația diferențială a traiectoriilor în planul fazelor:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{[u + R f(u)]}{\mu^2\,[v - f(u)]} \tag{13}$$

Pentru a obține traiectoriile (curbele integrale ale ecuației (13), nu este nevoie să se rezolve ecuația (13), deoarece sub presupunerea că $\mu \to \infty$ se poate scrie

$$\left[v - f(u)\right] dv = -\frac{u + R f(u)}{\mu^2}\,du \approx O,$$

de unde

$$\begin{aligned} v &\simeq ct \\ v &\simeq f(u) \end{aligned} \tag{14}$$

reprezintă ecuaţiile traectoriilor (fig. 2). Caracteristica dinatronului a fost considerată simetrică faţă de origine şi trecînd prin origine, deşi relaţiile obţinute pot fi folosite şi pentru caracteristica reală.

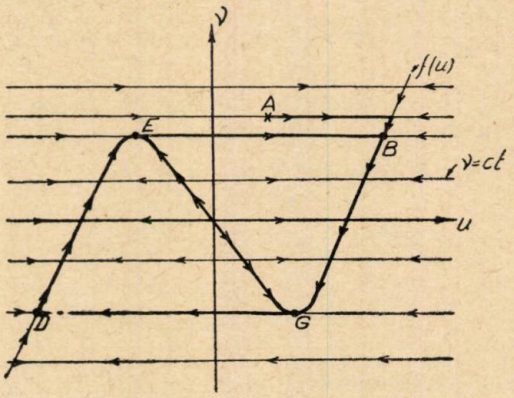



Fig. 2. — Planul fazelor pentru circuitul din fig. 1. Cazul $R > \varrho$.

Rămîne să se găsească sensul de parcurgere a acestor traiectorii. Pentru traiectoria $v = ct$ din (11) rezultă:

$$\begin{aligned} &pt. \quad v > f(u) \qquad du > O \\ &pt. \quad v < f(u) \qquad du < O \end{aligned} \tag{15}$$

Pentru traiectoria $v = f(u)$ din (12) rezultă:

$$dv = -u\left(1 - \frac{R}{\varrho} + R\,bu^2\right)\frac{d\tau}{\mu}$$

Dacă $R < \varrho$

$$\begin{aligned} &pt. \quad u > o \qquad dv < O \\ &pt. \quad u < o \qquad dv > O \end{aligned} \tag{16}$$

Sensurile de parcurgere a traiectoriilor din fig. 2 corespund condiţiilor (15) şi (16), ultima pentru cazul $R < \varrho$. Dacă punctul $A$ reprezintă condiţiile iniţiale se constată că se obţin oscilaţii staţionare. Oricare ar fi condiţiile iniţiale, oriunde s-ar plasa punctul $A$ în plan, se obţin aceleaşi oscilaţii staţionare. Este uşor a ne convinge că aceste oscilaţii sînt oscilaţii de relaxare. Astfel traiectoriile $v = ct$, conf. relaţiei (11). sînt parcurse cu viteză foarte mare, de ordinul lui $\mu$, iar timpul de parcurgere este foarte mic, de ordinul lui $1/u$. Traiectoria $v = f(u)$, din contră, este parcursă cu viteză mică (relaţia (12)) încît porţiunile $v = ct$ din ciclul de oscilaţie constituie discontinuităţi ale lui $u$, ceea ce dă oscilaţiilor caracterul de oscilaţii de relaxare.

In cazul $R > \varrho$, condiția (16) trebuie înlocuită, în care caz se constată că în planul fazelor nu se mai poate obține un ciclu închis, ceea ce este perfect explicabil din punct de vedere fizic. Se poate face și un calcul al perioadei oscilațiilor ținînd cont că contribuția principală la perioada oscilațiilor este dată de porțiunile $v = f(u)$, timpul pentru parcurgerea porțiunilor $v = ct$ fiind neglijabil.
Din (12)

$$d\tau = -\mu \frac{dv}{u + Rf(u)}$$

de unde

$$T_1 = -\mu \oint \frac{dv}{u + Rf(u)} \simeq -2\mu \int_B^C \frac{dv}{u + Rf(u)}$$

Cum pe porțiunile $v = f(u)$ din (10) rezultă

$$dv = f(u)\, du$$

și

$$T_1 \simeq 2\mu \int_B^C \frac{f(u)}{u + Rf(u)}\, du$$

Ținînd cont de relația (5) perioada oscilațiilor este

$$T = -\frac{2\mu}{\omega_0} \int_B^C \frac{f(u)}{u + Rf(u)}\, du \qquad (17)$$

Se constată că perioada oscilațiilor crește cu $\mu$. Revenind la ecuația (8) care determină comportarea circuitului, pe măsură ce $\mu$ crește, oscilațiile intră în domeniul oscilațiilor de relaxare iar perioada oscilațiilor crește. Oscilații de relaxare au loc pentru $\mu$ mare. Aceasta are loc în cazul că se mărește inductanța $L$ sau se micșorează capacitatea $C$ (relația 9). Practic, capacitatea $C$ se poate reduce pînă la capacitatea parazită a organului $N$. Totuși faptul că penru $C \to O$, oscilațiile capătă caracter de oscilații de relaxare, sugerează tratarea circuitului din fig. 1, neglijind complect capacitatea $C$.

### 3. TRATAREA IDEALIZATĂ A CIRCUITULUI DIN FIG. 1

Se consideră circuitul din fig. 3, idealizat prin neglijarea capacității parazite a organului dinatron și chiar a rezistenței $R$.

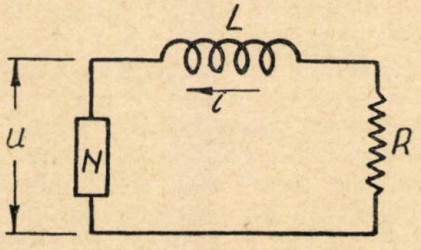



Fig. 3. — Circuitul cu organ dinatron, idealizat.

Cu notațiile din figură se poate scrie:

$$u + L\frac{di}{dt} + Ri = O$$

$$i = f(u) \tag{1}$$

$$f(u) = -\frac{1}{\varrho}u + bu^3$$

Ca plan al fazelor se alege planul $u$, $i$. A doua ecuație (1) reprezintă direct ecuația traiectoriilor în planul fazelor, care de fapt s-a redus la o simplă curbă de fază (fig. 4). Presupunînd $R < \varrho$ (cazul în care din punct de vedere fizic pot avea loc oscilații) din (1) se poate deduce sensul de parcurgere a curbei de fază:

$$L\frac{di}{dt} = -Ri - u = -\left[\left(1 - \frac{R}{\varrho}\right) + Rbu^2\right]u \tag{2}$$

încît pentru

$$\begin{aligned} u > O \quad & di < O \\ u < O \quad & di > O \end{aligned} \tag{3}$$

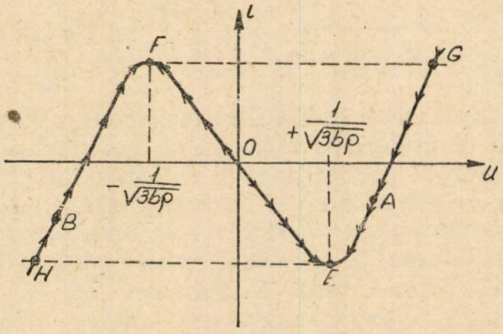



Fig. 4. — Planul fazelor pentru circuitul idealizat din fig. 3. Cazul $R > \varrho$.

Din examinarea fig. 4 rezultă că pentru circuitul idealizat au dispărut traiectoriile $i = ct$. In primul rînd, trebuie remarcat că circuitul din fig. 3 spre deosebire de cel din fig. 1 este descris de o ecuație diferențială de ordinul întîi din care cauză planul fazelor se reduce la o curbă de fază iar condițiile inițiale nu mai pot fi oarecari, ci trebuie să se plaseze pe curba de fază, adică să îndeplinească condiția $i_0 = f(u_0)$. Această constrîngere a condițiilor inițiale este impusă de tratarea idealizată; în realitate, oricît de mică ar fi capacitatea, condițiile inițiale pot fi oarecari, adică se pot plasa oriunde în plan. Totuși, dacă circuitul prezintă oscilații de relaxare care nu depind de condițiile inițiale, așa cum este cazul aici, constrîngerea adusă condițiilor inițiale de tratarea idealizată nu prezintă mare importanță.

Să presupunem că în fig. 4, punctul $O$ reprezintă condițiile inițiale. Acest punct este un punct de echilibru nestabil. O perturbație

oricît de mică, va duce punctul reprezentativ, fie în $E$, fie în $F$. Şi de pe ramurile $A$ şi $B$ ale curbei de fază, punctul reprezentativ va fi dus respectiv în $E$ sau $F$. Totuşi, aceste puncte nu sînt puncte de echilibru. In punctele de echilibru, stabil sau nestabil, $\frac{di}{dt} = O$ şi $\frac{du}{dt} = O$. Relaţia (2) dă pe $\frac{di}{dt}$ iar din $i = f(u)$ se găseşte, ţinînd cont de (2)

$$\frac{du}{dt} = \frac{\frac{di}{dt}}{-\frac{1}{\varrho} + 3\,bu^2} = \frac{-\frac{1}{L}\left[\left(1 - \frac{R}{\varrho}\right) + R\,bu^2\right]u}{-\frac{1}{\varrho} + 3\,b\,u^2} \tag{4}$$

Pentru punctul $O$, din (2) şi (4) rezultă că într-adevăr şi $\frac{di}{dt} = O$ $\frac{du}{dt} = O$. Pentru punctele $E$ şi $F$, din (4) rezultă că $\frac{du}{dt} = \infty$. Aceste puncte nu sînt puncte de echilibru, mişcarea punctului reprezentativ trebuie să se continuie şi aceasta în nici un caz pe curba de fază în în jurul punctului critic, avînd în vedere sensurile de parcurgere. Pentru punctele $E$ şi $F$ unde $\frac{du}{dt} = \infty$, analiza matematică nu mai poate răspunde la comportarea viitoare a sistemului. Mandelstam a numit asemenea puncte, *puncte critice* şi postulează că ori de cîte ori punctul reprezentativ atinge un punct critic, apare o discontinuitate pentru o variabilă a sistemului.

Analiza circuitului idealizat duce la acest impas, la apariţia punctelor critice, unde trebuie să aibă loc o discontinuitate care trebuie determinată din consideraţii fizice. Pentru circuitele electrice se poate presupune că energia sistemului în timpul intervalului infinit de scurt al discontinuităţii este constantă. Intr-adevăr pentru circuitul din fig. 3 în timpul discontinuităţii energia înmagazinată în cîmpul magnetic al bobinei $L$ rămîne constantă, ceea ce înseamnă că curentul prin $L$ rămîne constant. Astfel, punctul reprezentativ va sări din $F$ în $G$ şi din $E$ în $H$, încît mişcarea lui va repeta ciclul reprezentat în fig. 2.

In tratarea idealizată saltul are loc instantaneu. In realitate, trecerea din $F$ în $G$ se va face într-un timp foarte scurt, discontinuitatea este în fond o cuasidiscontinuitate. Rapiditatea saltului va fi cu atît mai mare, cu cît capacitatea parazită este mai mică.

Capacitatea parazită este un element important al circuitului. Pe măsură ce capacitatea aceasta s-a micşorat, s-a trecut de la oscilaţii armonice la oscilaţii de relaxare, dar atîta timp cît ea există, caracterul oscilaţiilor se păstrează, în sensul că nu exisă o deosebire principială între oscilaţiile armonice şi cele de relaxare; capacitatea este necesară în ambele cazuri. In cazul că această capacitate ar lipsi caracterul oscilaţiilor este altul. Ce explicaţie fizică se poate da pentru producerea saltului din $F$ în $G$ (fig. 4), în cazul că nu ar exista nicio capacitate în circuit? Intr'un caz similar, cum este cazul circuitului

cu tub cu gaz din fig. 5, cu toate că nu se ţine cont de inductanţa tubului, oscilaţiile se explică simplu prin încărcarea şi descărcarea condensatorului, legate de faptul dacă tubul este stins sau aprins. Oscilaţiile din fig. 5 nu sînt oscilaţii de relaxare în sensul lui Van der Pol şi este interesant că în literatura sovietică [3] se face o distincţie între oscilaţiile de relaxare (Van der Pol) şi oscilaţiile cu caracter de

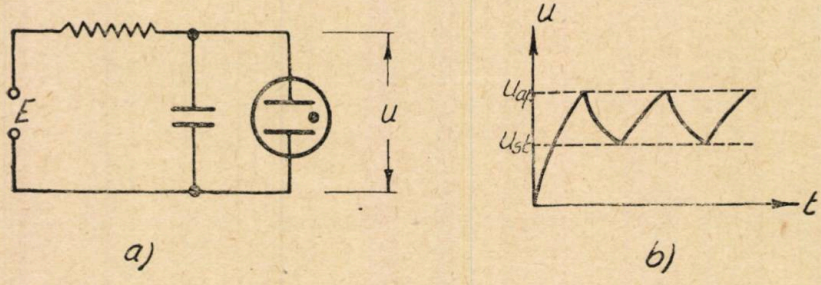



Fig. 5. — Oscilaţii de relaxare la un circuit cu tub cu gaz.

relaxare ca cele din fig. 5*). Pentru oscilaţiile din fig. 5 nu este necesară prezenţa inductanţei serie a organului, iar în cazul că este prezentă, oscilaţiile au alt caracter, acela descris de Van der Pol. Oscilaţiile din fig. 5 sînt descrise de două ecuaţii diferenţiale, una valabilă în perioada de încărcare a condensatorului şi alta în perioada de descărcare. In cazul circuitului din fig. 3 nu reiese clar din punct de vedere fizic ce s-ar întîmpla dacă ar lipsi capacităţile parazite (atît ale organului neliniar cît şi ale rezistenţei); însă, dacă prin circuitul idealizat se urmăreşte răspunsul circuitului real, atunci postulatul lui Mandelstam apare întemeiat.

## 4. TEORIA DISCONTINUĂ A OSCILAŢIILOR DE RELAXARE

In paragraful precedent a fost subliniată importanţa elementelor parazite în comportarea circuitelor. Pentru circuite simple nu este greu să se ţină cont, în calcule, de capacităţile şi inductanţele parazite. Pentru circuite complicate însă este mult mai comod să se neglijeze elementele parazite, însă analiza se va izbi de greutăţile menţionate înainte, în special de apariţia punctelor critice. Aplicînd presupunerea lui Mandelstam că în aceste puncte critice vor avea loc discontinuităţi, care se pot determina din continuitatea energiei sistemului în timpul discontinuităţii, tratarea idealizată a circuitelor duce la rezultate corecte pe o cale mult mai simplă. Pe baza acestei teorii "discontinue" a oscilaţiilor de relaxare, s-au obţinut rezultate remarcabile în studiul multor circuite ca, de exemplu, multivibratorii [2]. Astfel, pentru des-

*) Pentru primele se foloseşte termenul „relaxaţionîe kolebanii" iar pentru celelalte „razrîvnîe (rupere) kolebanii" [3].

crierea circuitului idealizat se aleg două variabile $x$, $y$ susceptibile de a prezenta discontinuităţi, pentru care se pot scrie ecuaţiile

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P(x, y)}{R_1(x.y)} \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{P(x, y)}{R_2(x,y)} \tag{2}$$

Ecuaţia diferenţială a traiectoriilor în planul fazelor $(x, y)$ va fi atunci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{3}$$

Din sistemul

$$\begin{aligned} P(x)\ y) &= 0 \\ Q(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

se determină punctele singulare ale ecuaţiei (3), deoarece pentru aceste puncte $\frac{dy}{dx}$ este nedeterminat. Aceste puncte coincid cu punctele de echilibru stabil sau nestabil ale circuitului. Fără a rezolva ecuaţia (3), din caracterul punctelor singulare, se determină aspectul traiectoriilor în jurul acestor puncte.

Din sistemul

$$\begin{aligned} R_1(x.\ y) &= 0 \\ R_2(x.\ y) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

se determină punctele critice. Dacă $R_1(x, y) = R_2(x, y)$ sau una din expresiile $R$ este indentică cu 1, atunci

$$R(x, y) = 0$$

determină o curbă de puncte critice. Pentru aceste puncte, sistemul (1) — (2) încetează de a mai descrie fenomenul, urmînd a determina discontinuităţile. In felul acesta, cunoscînd punctele singulare şi caracterul lor, punctele critice şi discontinuităţile corespunzătoare, numai cu aceste elemente, se poate determina calitativ comportarea sistemului. [ (2),. cap XX-XXII].

## 5. ASUPRA PUNCTELOR CRITICE ŞI CAPACITĂŢILOR PARAZITE

Revenind la exemplul din paragrafele 2 şi 3, se constată că prin neglijarea capacităţilor parazite, nu s-a putut da o explicatie fizică a oscilaţiilor de relaxare şi s-ar putea spune că existenţa capacităţilor parazite este esenţială pentru producerea oscilaţiilor de relaxare a unui organ dinatron. In ceea ce priveşte tratarea matematică a problemei, neglijarea capacităţilor parazite duce la apariţia punctelor critice, unde se postulează discontinuitatea tocmai ca un efect al capacităţilor neglijate.

Să reluăm tratarea idealizată din paragr. 3, pentru cazul $R > \varrho$. Transcriind ecuațiile (2) și (4) p. 3

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{R}{\varrho}\right) + R\, b\, u^2\right] u \tag{1}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{-\frac{1}{L}\left[\left(1 = \frac{R}{\varrho}\right) + R\, b\, u^2\right] u}{-\frac{1}{\varrho} + 3\, b\, u^2} \tag{2}$$

se constată că punctele de echilibru $\left(\frac{di}{dt} = 0, \frac{du}{dt} = 0\right)$ se obțin din ecuația

$$\left(1 - \frac{R}{\varrho}\right) u + R\, b\, u^2 = 0$$

sau

$$-\frac{u}{\varrho} + b\, u^3 = -\frac{u}{R}$$

ale cărei soluții s-au obținut grafic în fig. 6 la intersecția dreptei $i = -\frac{u}{R}$ cu curba $i = -\frac{u}{\varrho} + b\, u^3$. Există și puncte critice la $u = \pm\sqrt{\frac{1}{3\, b\, \varrho}}$ unde $\frac{du}{dt} = \infty$. Aceste puncte ($E$ și $F$) sînt aceleași ca și în cazul $R > \varrho$. Din relația (1) se deduce sensul de parcurgere al curbei de fază. Sensurile s-au reprezentat direct în fig. 6. Se constată că toate cele trei puncte singulare sînt puncte de echilibru stabil, circuitul nu mai poate prezenta oscilații.

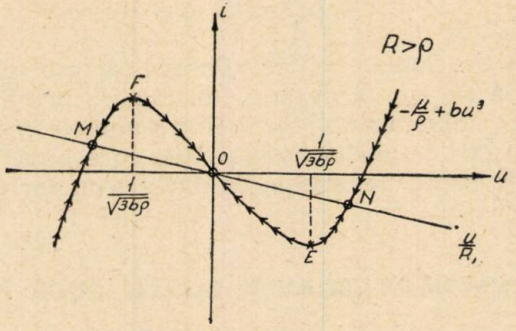



Fig. 6. — Planul fazelor pentru circuitul idealizat din fig. 3. Cazul $R > \varrho$.

Se mai constată că, în acest caz, punctele critice nu pot fi atinse de punctul reprezentativ, decît numai dacă ele reprezintă condițiile inițiale. Iar în acest caz, este foarte puțin probabil că va avea loc o discontinuitate, cu toate că în teoria discontinuă a oscilațiilor de relaxare expusă în paragr. 4, punctului critic i se asociază imediat o

discontinuitate. Din analiza circuitului neidealizat, prezentată în anexă (fig. 7) rezultă un conţinut mai bogat pentru punctul critic. Din regiunea punctului critic, hasurată în fig. 7, se poate trece la oricare din punctele $M$, $O$ şi $N$; trecerea către $N$ este semnificativă însă nu poate fi privită ca o discontinuitate, deoarece viteza cu care traiectoriile sînt parcurse în jurul punctului 0 este mică. *) Punctele $E$ şi $F$ din trata-

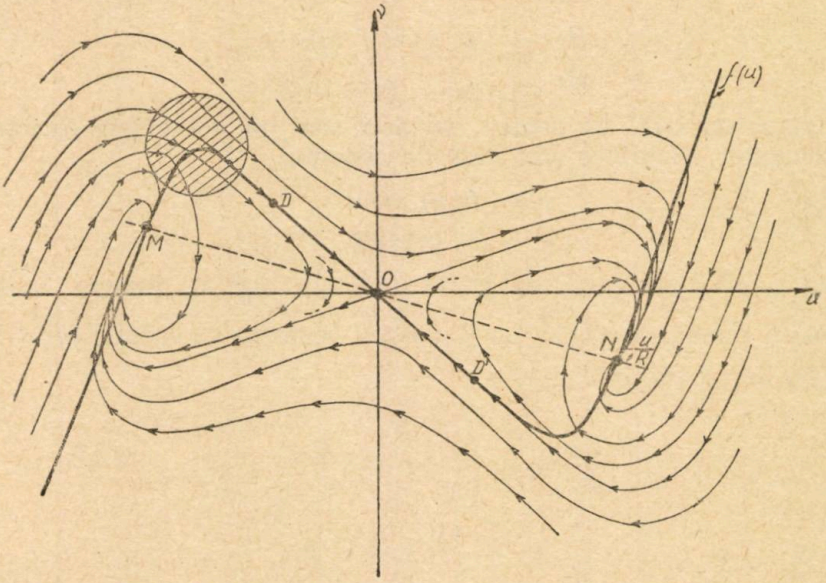



Fig. 7. — Planul fazelor pentru circuitul neidealizat din fig. 1. Cazul $R > \varrho$.

rea idealizată (fig. 6), pe care punctul reprezentativ nu şi le poate apropia în evoluţia lui pot fi socotite ca *punte particulare*, fără prea mare importanţă. In schimb definiţia punctului critic ar trebui completată, pentru a cuprinde cazul în care el poate fi apropiat de punctul reprezentativ în evoluţia lui. In toate cazurile întîlnite postularea discontinuităţii pentru asemenea puncte critice este verificată. Analiza idealizată a circuitului în cazul $R > \varrho$ mai constată că punctul 0 este un punct stabil (fig. 6) în timp ce în fig. 7, unde se ţine cont de influenţa capacităţilor parazite, origina este un punct de echilibru instabil (v. anexa). Numai dacă punctul reprezentativ pleacă de pe porţiunea $DD'$ va atinge origina. Insă nu va putea rămîne aici, căci la o mică variaţie punctul reprezentativ va trece. fie în $M$ fie în $N$. Se constată încă o dată rolul important al capacităţii parazite care fiind totdeauna prezentă, face ca punctul 0 în realitate să nu fie stabil. Avînd în vedere rolul important al elementelor parazite, tratarea idealizată, care neglijează aceste elemente, trebue folosită cu prudenţă, ceea ce rezultă şi din exemplul din acest paragraf.

*) Acest lucru rezultă din caracterul punctului 0. [2] [3]

Anexă

## CALCULUL CIRCUITULUI DIN Fig. 1 IN CAZUL $R > \varrho$

Pentru analiza topologică se poate pleca de la relaţiile 11 şi 12 paragraful 2

$$\frac{du}{d\tau} = \mu \left[ v - f(u) \right] \tag{1}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -\frac{u + R f(u)}{\mu} \tag{2}$$

de unde se constată că pentru circuitul real nu vor exista puncte critice. Punctele singulare sînt date de sistemul

$$\begin{aligned} v - f(u) &= 0 \\ u + R f(u) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

a cărui soluţie sînt punctele $M$, $O$ şi $N$ din fig. 6. Pentru a studia caracterul punctului $O$, în jurul acestui punct se va socoti $f(u) = -\frac{u}{\varrho}$

Ecuaţiile (1) şi (2) devin:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \mu \left[ \frac{1}{\varrho} u + v \right] \\ \frac{dv}{d\tau} &= -\frac{1}{\mu} \left[ 1 - \frac{R}{\varrho} \right] u \end{aligned} \tag{4}$$

Ecuaţia caracteristică a sistemului (4) este

$$\begin{vmatrix} \frac{\mu}{\varrho} - \lambda & \mu \\ -\frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{R}{\varrho}\right) & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de unde

$$\lambda^2 - \frac{\mu}{\varrho}\lambda + 1 - \frac{R}{\varrho} = 0 \tag{5}$$

Cum $R > \varrho$, termenul liber al ecuaţiei 5 este negativ, încît rădăcinile ecuaţiei vor fi reale şi de semn contrar. O asemenea situaţie caracterizează un punct singular "şea". Un asemenea punct caracterizează un regim de echilibru instabil. [2] [3]

Traiectoriile în jurul acestut punct se pot urmări în fig. 7, în jurul punctului $O$. Sensul de parcurgere s-a dedus ţinînd seamă de relaţiile (4).

Pentru a studia caracterul punctelor $M$ şi $N$, se constată în primul rînd că aceste puncte vor avea o comportare identică. Caracteristica

printr-unul din puncte, socotit ca origine, se poate scrie în jurul acestui punct, *)

$$v = f'(u_M)\ u = f'(u_N)\ u = \frac{2}{\varrho} - \frac{3}{R} \tag{6}$$

Ecuaţiile (1) şi (2) devin

$$\frac{du}{d\tau} = \mu\left[-\left(\frac{2}{\varrho} - \frac{3}{R}\right)u + v\right]$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -\frac{2}{\mu}\left[\frac{R}{\varrho} - 1\right]u \tag{7}$$

a căror ecuaţie caracteristică este

$$\lambda^2 + \mu\left[\frac{2}{\varrho} - \frac{3}{R}\right]\lambda + \frac{2}{\mu}\left[\frac{R}{\varrho} - 1\right] = 0 \tag{8}$$

Se poate socoti $\frac{2}{\varrho} - \frac{3}{R} > 0$ încît, atît coeficientul lui $\lambda$, cît şi termenul liber sînt pozitivi. Cum în coeficientul lui $\lambda$ intervine $\mu$, acest coeficient va fi mare, în comparaţie cu termenul liber. Astfel, radăcinile ecuaţiei vor fi în general reale şi ambele negative. Aceasta situaţie caracterizează un punct nodal — stabil, un punct către care tind toate traiectoriiie din jurul lui. Sensul de parcurgere a traiectoriilor în jurul punctului se deduce ţinînd seemă de ecuaţia (7). In fig. 7 se pot urmări traiectoriile şi sensul de parcurgere în apropierea acestor puncte ($M$ şi $N$).

Cunoscînd aspectul traiectoriilor în jurul acestor puncte se poate completa aproximativ întregul aspect topologic al planului fazelor, ceea ce s-a făcut în fig. 7.

Primit la redacţie la 25.V.1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *T. Tănăsescu*—Manual de tuburi şi circuite electronice vol. III (sub tipar).
2. *Minorski* — Introduction to non-linear mechanics, 1947, cap. VI, XX-XXII. (Urmăreşte îndeaproape pe „Andronov şi Haichin" şi „Krîlov şi Boguliubov").
3. *Kapcinski*—Metodî teorii kolebanii v radiotehnike, Mosc. 1954, pag. 91-101.

## ОБ ИПЕАЛИЗИРОВАННОЙ ТРАКТОВКЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ

### (Краткое содержание)

В статье излагаются некоторые замечания об идеализированной трактовке электрических цепей. Электричческая цепь идеализирована, если пренебрегаются некоторые малые параметры, как например паразитные ёмкости и индуктивности. Топологический анализ идеализированных цепей вводит наряду с пониятием особой точки также и понятие критической

*) O tratare pe baza teoriei stabilităţii lui Liapunov duce la aceleaşi rezultate

точки. Обычно для критических точек постулируется (Манделстам) появление разрыва в поведении системы. Исследуя цепь с динатроном, устанавливается, что идеализированная трактовка ведёт к правильным результатам (применяя постулат Мандельстама) при автоколебательной системе. Если система не автоколебательна, то идеализированная трактовка ведёт к неправильным результатам, так как паразитная ёмкость динатрона играет наиважную роль. Даже при автоколебательной системе паразитная ёмкость существенна; в противном случае невозможно объяснить релаксационные колебание с физической точки зрения.

## SUR LES CIRCUITS QUI PRODUISENT DES OSCILLATIONS RELAXÉES

(R é s u m é)

On expose quelques observations sur le traitement idéalisé des circuits électriques. Un circuit électrique est considéré idéalisé, quand on néglige certains petits paramètres comme la capacité et les inductances parasites. L'analyse topologique des circuits idéalisés introduit, á côté de la notion du point singulier, la notion du point critique (2), due à Mandelstam. De règle, pour un point critique, on postule l'apparition d'une discontinuité dans le compartoment du système, mais on montre, à l'aide d'un simple exemple, qu'il n'est pas toujours ainsi. En analysant un circuit avec un organe dynatron, on constate que le traitement idéalisé donne une réponse correcte (en utilisant le postulat de Mandelstam) dans le cas d'oscillation du système; mais la réponse n'est pas correcte si le système n'oscille pas. En ce dernier cas le traitement idéalisé mène à des conclusions erronées sur le comportement du système, la capacité parasite (negligée) jouant un rôle décisif. Même, en cas que le système oscille, la capacité parasite est essentielle, autrement il n'est pas possibile à expliquer les oscillations de relaxation du point de vue physique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.396.64

# GAMA DINAMICĂ A AMPLIFICATORILOR DE IMPULSURI CU REACŢIUNE NEGATIVĂ

de VLAD PAUKER

Considerînd diverse scheme de amplificatori cu reacţie negativă, o serie de autori au arătat că, în anumite condiţii, la aplicarea unui semnal cu timp de creştere mic faţă de constantele de timp ale circuitelor ce cuprind elemente reactive parazite, pot apare pe grilele diferitelor etaje amplitudini de semnal care depăşesc cu mult valorile ce apar în cazul aplicării unor semnale cu timp de creştere mare.

In articolul de faţă ne propunem să studiem fenomenele care apar în circuitul de amplificare din fig. 1.

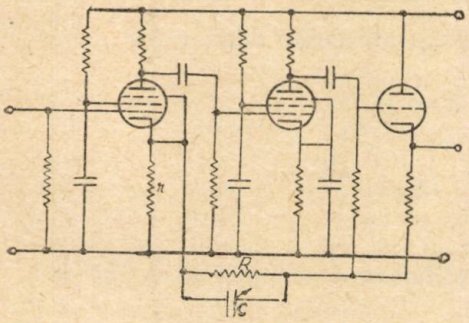


Fig. 1.

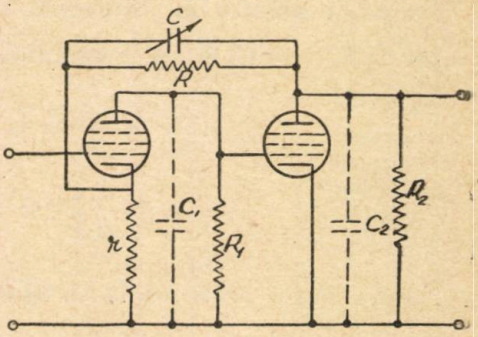


Fig. 2.

In domeniul frecvenţelor înalte, schema considerată este echivalentă cu schema de amplificare cu două tuburi cu reacţie negativă din fig. 2, în care s-au reprezentat numai elementele ce intervin la înaltă frecvenţă.

J. E. Flood [1] a studiat acest circuit în ipoteza că amplificatorul are un răspuns monoton la aplicarea unui semnal treaptă. Dar, din cauza neglijării unor fenomene, rezultatele obţinute de Flood sînt în parte nesatisfăcătoare.

In cele ce urmează, vom studia fenomenele limitării pe grilă a amplificatorului cu trei tuburi (sau a celui echivalent cu două tuburi), în cazul general al unui răspuns oarecare.

* * *

Se ştie că limitarea pe grilă la un amplificator cu reacţie negativă, apare datorită faptului că tensiunea de ieşire şi deci de reacţie variază mai încet decît tensiunea de intrare, astfel încît tensiunea efectiv aplicată căii de amplificare, egală cu diferenţa dintre tensiunea de semnal

și tensiunea de reacție, este în primul moment mare. Acesl fenomen, care nu apare în schemele de amplificare fără reacție, face ca pericolul de distorsiuni neliniare să fie cu mult mai mare în cazul aplicării unor semnale cu timp de creștere mic, decît în cazul aplicării semnalelor cu timp de creștere mare.

Considerînd schema din fig. 2, introducem următoarele notații:

$S_1' = \frac{S_1}{1 + S_{K1}\, r}$ — panta echivalentă a primului tub, ținînd seamă de reacție locală de curent;

$A_{01} = S_1' R_1$ — amplificarea primului etaj;

$A_0 = S_1' R_1 S_2 R_2$ — amplificarea totală fără reacție;

$F = 1 + A_0 B_0$ — amplificarea de reacție;

$A_0' = \frac{A_0}{F}$ — factorul cu reacție;

toate acestea la frecvență zero (în bandă).

$\tau_1 = C_1 R_1$ $\tau_2 = C_2 R_2$ — constantele de timp ale celor două etaje

$$\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2} \qquad b = \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}$$

$$a = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) \qquad d = \frac{RC}{\tau}$$

Se poate arăta că factorul de amplificare a schemei este dat de:

$$A' = \frac{A_0}{F + [2\,a + d\,(F - 1)]\,\tau\, p + \tau^2 p^2} \tag{1}$$

Vom introduce un nou parametru $\lambda$, prin relația:

$$\lambda = \frac{4\,F}{[2\,a + d\,(F - 1)]^2} \tag{2}$$

Acest parametru caracterizează în întregime forma tensiunii de ieșire (sau a caracteristicii de frecvență) a amplificatorului.

Dacă se aplică la intrarea amplificatorului un semnal treaptă, se constată că pentru $\lambda = 1$ tensiunea de ieșire crește monoton, pentru $\lambda = 2$ tensiunea de ieșire prezintă o depășire de circa 5 %. Pentru $\lambda \leq 2$, caracteristica de frecvență a amplificatorului este monotonă.

Inlocuind (2) în (1) obținem:

$$A' = \frac{A_0}{F + 2\sqrt{\frac{F}{\lambda}}\,\tau\, p + \tau^2 p^2} \tag{1'}$$

In primul rînd, ne vom îndrepta atenția, asupra tensiunii pe grila celui de al doilea tub, deoarece aici intervin nivele mai mari de semnal și prin urmare, pericolul de limitare este mai mare.

$$U_{g2} = \frac{U_{ieș}}{A_2} = U_i \frac{A'}{A_2} = U_i A_{01} \frac{1 + \tau_2 P}{F + 2\sqrt{\frac{F}{\lambda}}\,\tau p + \tau^2 p^2} \tag{3}$$

aici $A_2 = \dfrac{A_{02}}{1 + \tau_2 p}$ — amplificarea etajului al doilea.

Inlocuid în (3) expresia tensiunii de intrare $U_i$ prin $\dfrac{u_i}{p}$ — transformata Laplace a funcțiunii treaptă, se obține

$$U_{g2} = \frac{u_i}{p} \cdot A_{01} \frac{1 + b\,\tau p}{F + 2\sqrt{\frac{F}{\lambda}}\,\tau p + \tau^2 p^2} \cdot \tag{3'}$$

Originala expresiei (3') este dată de:

$$u_{g2} = u_i \frac{A_{01}}{F}\left[1 - e^x \left(\cos x \sqrt{\lambda - 1} + \frac{1 - g\,\lambda}{\sqrt{\lambda - 1}} \sin x \sqrt{\lambda - 1}\right)\right] \tag{4}$$

unde

$$x = \frac{t}{\tau}\sqrt{\frac{F}{\lambda}} \; ; \quad g = b\sqrt{\frac{F}{\lambda}} = \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}\,\frac{F}{\lambda}}$$

Maximul tensiunii $u_{g2}$ are loc la

$$x_0 = \frac{arc\ tg \dfrac{g\sqrt{\lambda - 1}}{g - 1} + n\pi}{\sqrt{\lambda - 1}} \qquad \begin{matrix} n = 1 \text{ pentru } g < 1 \\ n = O \text{ pentru } g \geq 1 \end{matrix} \tag{5}$$

iar valoarea acestui maxim este dată de:

$$u_{g2\,max} = u_i \frac{A_{01}}{F}\left[1 + e^{-x_o}\sqrt{\lambda g^2 - 2g + 1}\right] = u_i \frac{A_{01}}{F}(1 + h) \tag{6}$$

Notînd cu $h$ valoarea depășirii se observă că

$$h = \sqrt{\lambda g^2 - 2g + 1}\; e^{-\frac{arc\ tg \frac{g\sqrt{\lambda - 1}}{g - 1} + n\pi}{\sqrt{\lambda - 1}}} \tag{7}$$

In cazul răspunsului monoton al amplificatorului ($\lambda = 1$) obținem expresia dată de Flood [1]:

$$h = (g - 1)\, e^{-\frac{g}{g - 1}} \tag{8}$$

Dacă $\lambda \neq 1$, din (7) rezultă ce depăşirea $h \neq 0$ pentru orice valoare a lui $g$ şi creşte odată cu creşterea lui $g$. Dacă $\lambda = 1$, atunci $h = 0$, pentru $g \leq 1$.

In fig. 3 se reprezintă variaţia lui $h$, în funcţie de $g$ pentru diverse valori ale lui $\lambda$.

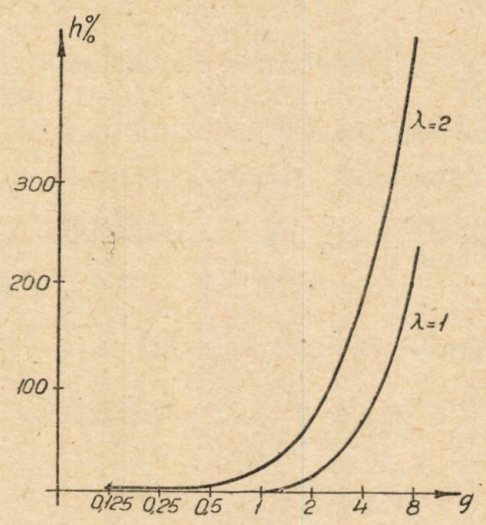



Fig. 3

Pentru evitarea limitării pe grila celui de al doilea etaj, s-ar părea că $g$ trebuie să fie cît mai mic (în orice caz apropiat de 1) *).

Să revenim însă asupra expresiei (6) şi să considerăm factorul $A_{01}/F$:

$$\frac{A_{01}}{F} = \sqrt{\frac{S_1'^2 R_1^2}{F^2}} = \sqrt{\frac{S_1' R_1 S_2 R_2}{F} \cdot \frac{S_1'}{C_1} \frac{C_2}{S_2} \cdot \frac{C_1 R_1}{C_2 R_2} \cdot \frac{I}{F}} =$$

$$= \sqrt{A_0' \frac{\delta_1}{\delta_2}} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{\lambda}{F}} \cdot \sqrt{\frac{I}{\lambda}} = A_m \frac{1}{g\sqrt{\lambda}} \qquad (9)$$

unde

$$A_m = \sqrt{A_0' \frac{\delta_1}{\delta_2}}$$

$\delta_1 = \frac{S_1'}{C_1}$ $\delta_2 = \frac{S_2}{C_2}$ — factorii de merit ai celor două etaje.

*) Flood recomandă acest lucru pe baza relaţiei (8). De altfel trebuie arătat că satisfacerea acestei condiţii este de obicei foarte anevoioasă, căci factorul de reacţie are valori mari.

Tensiunea maximă pe grila celui de al doilea etaj este dată acum de:

$$u_{g2\,max} = u_i\, A_m \frac{1+h}{g\sqrt{\lambda}} = u_i\, A_m\, H \qquad (10)$$

unde am notat

$$H = \frac{1+h}{g\sqrt{\lambda}}$$

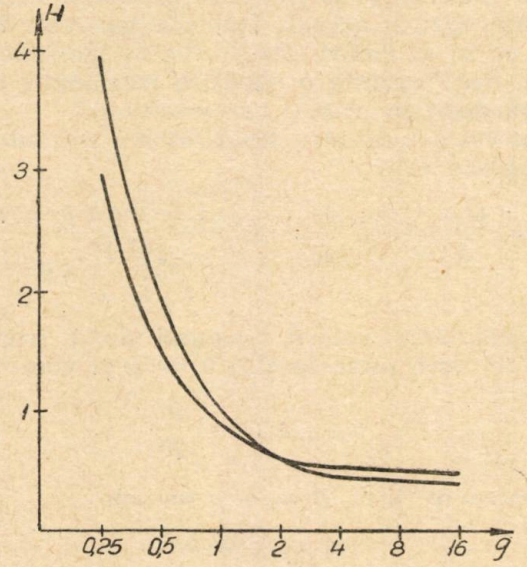
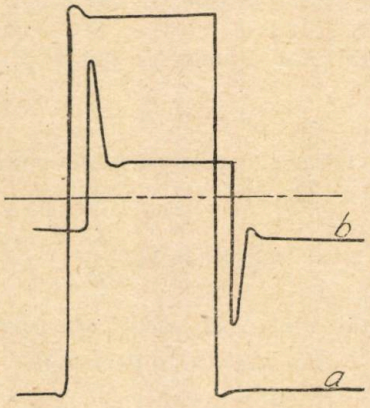



Fig. 4.

In general, deoarece factorul de amplificare ($A'_0$) și factorii de merit ai etajelor sînt dați, valoarea lui $A_m$ este impusă și, prin urmare, valoarea maximă a tensiunii pe grila celui de al doilea etaj este determinată de factorul $H$, reprezentat în fig. 4, funcție de parametrul $g$.




Fig, 5

Pentru ca valoarea maximului tensiunii pe grila celui de al doilea tub să fie cît mai mică (deci $H$ cît mai mic), se observă că este necesar ca $g$ să fie cît mai mare (de dorit peste 2), concluzie contrară aparenţelor amintite mai sus.

Pentru ilustrarea celor de mai sus, se vor compara oscilogramele ridicate experimental în două cazuri diferite, ale tensiunilor pe grila etajului al doilea (fig. 5). Curba $a$ corespunde amplificatorului avînd $g = 1$, iar curba $b$ — amplificatorului avînd $g = 7$. In rest, cei doi amplificatori sînt identici (capacităţi parazite egale, factori de amplificare şi de reacţie egali şi aceeaşi formă a tensiunii de ieşire).

Se observă că în al doilea caz (curba $b$) tensiunea pe grila celui de al doilea etaj, deşi prezintă o depăşire însemnată, atinge o valoare maximă mai mică decît în primul caz (curba $a$).

In ceeace priveşte tensiunea grilă-catod a primului tub, imaginea acesteia după Laplace este:

$$U_{g1} = \frac{U_{ieş}}{A} = U_i \frac{A'}{A} = U_i \frac{1 + 2\,a\,\tau\,p + \tau^2 p^2}{F + 2\sqrt{\frac{F}{\lambda}}\,\tau p + \tau^2 p^2} \qquad (11)$$

Pentru determinarea valorii tensiunii după trecerea regimului tranzitoriu ($t = \infty$) vom pune în (11) $0 = p$ şi vom obţine:

$$u_{g1\ (t=\infty)} = \frac{u_i}{F}$$

In primul moment, însă, ($t = 0$. $p = \infty$).

$$u_{g1\ (t=0)} = u_i$$

Prin urmare, cu toate că valoarea finală a tensiunii pe grila primului tub este de $F$ ori mai mică decît cea de intrare, la dimensionarea montajului trebuie ţinut seamă că în primul moment între grila şi catoda tubului apare tensiunea de intrare în întregime.

In general, nu trebuie să ne îndreptăm atenţia asupra mărimii tensiunii pe grila primului tub, căci pericolul de limitare apare în primul rînd la tubul al doilea.

Să comparăm valorile maxime pe care le pot atinge tensiunile pe grilele celor două tuburi.

Tensiunea maximă care apare pe grila primului tub, după cum am văzut este

$$u_{g1} = u_i$$

Tensiunea maximă care apare pe grila celui de al doilea tub este (admiţînd $\lambda = 1$ şi $g \gg 1$)

$$u_{g2} = u_i\, A_m \frac{1}{e}$$

Se vede că $u_{g2}$ este mai mare decît $u_{g1}$ pentru $A_m > e$, sau, cum $\delta_1 \approx \delta_2$ şi deci $A_m \approx \sqrt{A_0'}$, $u_{g2}$ va fi mai mare decît $u_{g1}$ dacă

$$A_0' > e^2 = 7{,}4 \qquad (12)$$

De obicei, amplificarea montajului este mult mai mare, ceea ce justifică neglijarea pericolului de limitare pe primul etaj.

* * *

Fenomenul de care ne ocupăm are încă un aspect, care generează un alt mod de analiză, complet echivalent, însă cu cel folosit.

Acest aspect constă în aceea că odată cu creșterea amplitudinii semnalului sinusoidal aplicat unui amplificator cu reacție negativă, banda de trecerea acestuia se îngustează.

Explicația fenomenului este legată de însuși principiul de compensare a amplificatorilor cu reacție negativă. La frecvențele de la capătul benzii de trecere, cîștigul căii de amplificare scade, ceea ce duce la scăderea tensiunii de reacție și deci, la creșterea semnalului efectiv aplicat căii de amplificare.

Prin urmare, amplitudinea tensiunii aplicate căii de amplificare crește cu frecvența, cu toată că semnalul de intrare rămîne constant ca amplitudine.

Dacă amplitudinea tensiunii pe grila tubului depășește o anumită valoare $u_{MAX}$, în amplificator vor apare distorsiuni neliniare, ceea ce va duce la scăderea amplificării.

Pentru a urmării variația cu frecvență a amplitudinii tensiunii pe grila etajului al doilea, ne vom folosi de expresia (3) în care vom pune $p = j\omega$.

Vom considera cazul cînd caracteristica de frecvență a amplificatorului este monotonă ($\lambda = 2$):

$$u_{g2} = u_i \, A_{01} \frac{1 + j\, b\, \tau\, \omega}{F + j\sqrt{2F}\,\tau\,\omega - \tau^2\,\omega^2}$$

sau în modul

$$| u_{g2} | = u_i \frac{A_{01}}{F} \sqrt{\frac{1 + b^2 y}{1 + \frac{y^2}{F^2}}} \tag{13}$$

unde

$$y = \tau^2\,\omega^2$$

Din (13) și ținînd seama de (9) obținem:

$$u_i = | u_{g2} | \frac{\sqrt{2}}{A_m} g \sqrt{\frac{1 + \frac{y^2}{F}}{1 + 2g^2 \frac{y}{F}}} \tag{14}$$

Atribuind lui $|u_{g2}|$ o valoare particulară $u_{MAX}$ la care tubul al doilea începe să distorsioneze, vom căpăta pentru $u_i$ valoarea maximă admisibilă a semnalului care poate fi aplicat, fără ca să apară distorsiuni neliniare. Se observă că această valoare depinde de frecvență.

Pentru $y \ll F$ (în mijlocul benzii de trecere) din (14) rezultă:

$$u_{i\,max} = u_{max} \frac{\sqrt{2}}{A_m} \cdot g \approx u_{max} \cdot g \sqrt{\frac{2}{A_0}} \tag{15}$$

Modulul amplificării montajului scade cu 3 *db*, față de valoarea sa în bandă la $y = F$.

Pentru această valoare din (14) se obține

$$u_{i\,max} = u_{max} \frac{\sqrt{2}}{A_m} \sqrt{\frac{2\,g^2}{1 + 2\,g^2}}$$

și pentru

$$g^2 \gg 1$$

$$u_{i\,max} = u_{max} \frac{\sqrt{2}}{A_m} \approx u_{max} \sqrt{\frac{2}{A_0'}} \qquad (16)$$

Deci, pentru ca banda amplificatorului să nu scadă, amplitudinea semnalului aplicat trebuie să fie în orice caz mai mică, decît amplitudinea maximă admisibilă pe grila etajului al doilea, cu toate că distorsiunile neliniare în bandă apar abia pentru semnalele mult mai mari, după cum se vede comparînd expresiile (15) și (16).

In ceea ce privește limitarea pe gr la primului tub, se poate arăta și în acest caz, că acest lucru, în general, nu apare atîta timp cît tubul al doilea încă nu limitează.

Primit la redacție la 1 V 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *Flood J. E.*—Negativ—feedback amplifiers. Overloading under pulse conditions. Wireless Engineer—August 1952.

## ДИНАМИЧЕСКИЙ ДИАПАЗОН ИМПУЛЬСНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

(Краткое содержание)

В настоящей работе рассматриваются условия сеточного ограничения двух или трёхкаскадного импульсного усилителя с отрицательной обратной связью.

Устанавливаются условия уменьшения до минимума опасности сеточного ограничения в случае усиления импульсов.

Также устанавливается максимальная величина гармонического сигнала, при которой полоса пропускания усилителя не уменьшается.

## GAME DYNAMIQUE DES AMPLIFICATEURS D'IMPULSION AVEC REACTION NEGATIVE

(Résumé)

Dans cet article on analyse les conditions de limitation par les courant de grille de l'amplificateur d'impulsion à contre-réaction à deux (ou trois) étages.

On déduit les conditions dans les quelles on la limitation en cas d'amplification des impulsions.

On établit aussi la plus grande valeur du signal harmonique pour laquelle la bande passante ne devient pas plus étroite.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.396.611

# PROIECTAREA OSCILATORILOR DE PUTERE (CLASA *C*) PENTRU APLICAŢIILE INDUSTRIALE ŞI DE LABORATOR

de BERNSTEIN DOREL

Proiectarea acestor oscilatori se face în trei faze:

I. Proiectarea regimului de funcţionare a tubului (dat sau ales cu condiţia de a asigura puterea necesară) ca amplilicator clasa *C*, printr-una din metodele cunoscute.

Obişnuit se urmăreşte obţinerea unei puteri utile maxime. Puterea utilă are ca expresie

$$P_u = \frac{1}{2} \xi \alpha_1 E_a I_M$$

unde

$$\xi = \frac{U_a}{E_a} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{I_1}{I_M}$$

şi cu notaţia generală de mai jos:

$E_a$ — tensiunea anodică de alimentare în c. c. ;
$E_g$ — tensiunea de negativare—c. c. ;
$U_a$ — tensiunea alternativă la bornele impedanţei anodice ;
$U_g$ — tensiunea alternativă de excitaţie ;
$Z_a$ — impedanţa anodică (care satisface regimul de funcţionare) ;
$Z_g$ — impedanţa spaţiului grilă-catod, datorită funcţionării cu curent de grilă ;
$I_M$— valoarea de vîrf a curentului anodic :
$P_u$ — puterea alternativă dată în impedanţă anodică (între anod-catod.
$\eta$ — randamentul cu care funcţionează tubul.

Pentru ca puterea utilă $P_u$ să fie cît mai mare, se alege $E_a$ şi $I_M$ cît mai mari în raport cu caracteristicile tubului. Apoi se mai alege o funcţionare cu $\xi$ de ordinul 0,9 şi $\alpha_1$ de ordinul 0.45. astfel încît semiunghiul $\theta$ de deschidere a pulsului curentului anodic să fie de circa 70° (valoarea cea mai mare a lui $\alpha_1$ care este 0,5. se obţine pentru $\theta = 90°$ ; dar randamentul scade destul de repede cu creşterea lui $\theta$, dincolo de 60°).

Astfel, din aceste condiţii rezultă toate celelalte mărimi care caracterizează funcţionarea în *Cl. C.*

II. Se pune condiţia ca tubul să funcţioneze cu autoexcitaţie, adică amplificatorul să devină oscilator.

In acest scop se realizează o reacție pozitivă, cu un factor de reacție β, a cărui valoare este condiționată de datele funcționării tubului ca amplificator. Deci

$$\beta = \left| \frac{\mathbf{U}_g}{\mathbf{U}_a} \right|$$

III. Se alege rețeaua de reacție și se dimensionează elementele astfel ca să fie satisfăcute condițiile;

a) frecvența de lucru — $f_o$;
b) impedanța anodică — $z_a$;
c) factorul de reacție — β.

In determinarea circuitului trebuie să se țină seamă și de influența circuitului de grilă, căci puterea de excitație a oscilatorului se obține tot din puterea de ieșire. Deci, puterea utilă calculată $P_u$ se distribuie astfel:

$P_s$ — puterea dată în sarcină;
$P_{excit}$ — puterea de excitație;
$P$ — puterea care se disipă în rețeua de reacție.

Puterea dată în sarcină este:

$$P_s = \frac{1}{2} \frac{U_a^2}{R_s}$$

unde $R_s$ — rezistența de sarcină.

Puterea de excitație este:

$$P_{excit} = \frac{1}{2} \frac{U_g^2}{Z_g} = \frac{1}{2} \frac{(\beta U_a)^2}{Z_g} = \frac{1}{2} \frac{U_a^2}{\frac{Z_g}{\beta^2}} = \frac{1}{2} \frac{U_a^2}{\zeta}.$$

$\zeta = \frac{Z_g}{\beta^2}$ este impedanța care se transferă în circuitul anodic—între anod și catod—datorită curenților de grilă.

Influența acestei impedanțe asupra elementelor reactive ale circuitului este neglijabilă; ea determină îndeosebi valoarea rezistenței de sarcină $R_s$.

Deci, în cele ce urmează, vom determina circuitul oscilatorului, admițînd că:

$$R_s = f_1 (Z_a . Z_g, \beta),$$

iar

$$X = f_2 (Z_a, \beta)$$

unde $X$ reprezintă elementele reactive ale circuitului.

Vom considera trei tipuri obișnuite de oscilator:

1) oscilatorul cu reacție magnetică;
2) oscilatorul Colpitts;
3) oscilatorul Hartley.

## 1. OSCILATORUL CU REACȚIE MAGNETICA

Schema de principiu :

$L$ — inductanța circuitului anodic ;
$r$ — rezistența serie a circuitului anodic ;
$c$ — capacitatea de acord a circuitului anodic ;
$R_s$ — rezistența de sarcină.

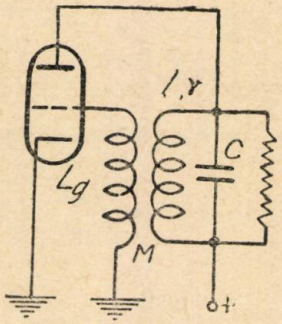



Fig. 1.

Dacă se consideră o funcționare în gol ($R_s = \infty$), circuitul oscilant prezintă un factor de calitate $Q_0$, care se alege în funcție de frecvența de lucru și de materialele ce stau la dispoziție.

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{r}$$

Am arătat că o parte din puterea generată se disipă în circuit. Randamentul citcuitului $\eta_c$ este dat de relația :

$$\eta_c = 1 - \frac{Q_s}{Q_0}$$

unde $Q_s$ = factorul de calitate al circuitului în sarcină

$$Q_s = Q_0 \ (1 - \eta_c)$$

Din calculul regimului de funcționare a amplificatorului a rezultat $Z_a$.

$$Z_a = \omega_0 \ L \ Q_s = \omega_0 \ L \ Q_0 \ (1 - \eta_c)$$

Randamentul circuitului $\eta_c$ se alege în funcție de puterea generată :

$$\eta_c = 0{,}85 - 0{,}98$$

și anume 0,85 la puteri mici de ordinul zecilor de wați și 0,98 la puteri de ordinul kilowaților.

Din relația de mai sus rezultă

$$L = \frac{Z_a}{\omega_0 \ Q_0 \ (1 - \eta_c)} \qquad (1)$$

Frecvența de rezonanță este:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{\omega_0^2 \frac{Z_a}{\omega_0 Q_0 (1-\eta_c)}} = \frac{Q_0(1-\eta_c)}{\omega_0 Z_a} \quad \text{Deci:}$$

$$C = \frac{Q_0(1-\eta_c)}{\omega_0 Z_a} \tag{2}$$

Pentru determinarea lui $R_S$, ținem seamă de circuitul din fig. 2.

$$Q_S = Q_0(1-\eta_c) = \frac{\omega_0 L}{r}(1-\eta_c)$$

$$Q_S = \frac{\omega_0 L}{r + \frac{\omega_0^2 L^2}{\zeta} + \frac{\omega_0^2 L^2}{R_S}}$$

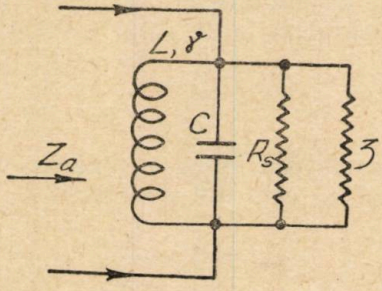



Fig. 2.

Egalînd relațiile de mai sus, obținem:

$$\frac{1-\eta_c}{r} + \frac{1}{r + \frac{\omega_0^2 L^2}{\zeta} + \frac{\omega_0^2 L^2}{R_S}}$$

$$r = (1-\eta_c)\left(r + \frac{\omega_0^2 L^2}{\zeta} + \frac{\omega_0^2 L^2}{R_S}\right)$$

$$r\,[\,1-(1-\eta_c)\,] - (1-\eta_c)\frac{\omega_0^2 L^2}{3} = (1-\eta_c)\frac{\omega_0^2 L^2}{R_S}$$

$$\frac{\eta_c}{1-\eta_c} r - \frac{\omega_0^2 L^2}{\zeta} = \frac{\omega_0^2 L^2}{R_S}$$

$$R_S = \frac{\omega_0^2 L^2}{\frac{\eta_c}{1-\eta_c} r - \frac{\omega_0^2 L^2}{\zeta}} = \frac{1}{\frac{\eta_c}{1-\eta_c}\frac{r}{\omega_0^2 L^2} - \frac{1}{\frac{Zg}{\beta^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\eta_c}{Q_0(1-\eta_c)} \cdot \frac{1}{\frac{\omega_0 Z_a}{\omega_0 Q_0(1-\eta_c)}} - \frac{\beta^2}{Z_g}} = \frac{1}{\frac{\eta_c}{Z_a} - \frac{\beta^2}{Z_g}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\eta_c} \cdot \frac{Z_a}{Z_g}}$$

$$R_S = \frac{Z_a}{\eta_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\eta_c} \cdot \frac{Z_a}{Z_g}} \qquad (3)$$

Inductanța din circuitul de grilă (de cuplaj):

$$\beta \approx \frac{\omega_0 M I_L}{\omega_0 L I_L} = \frac{M}{L}$$

$$M = \beta L = k\sqrt{L L_g}$$

Deci,

$$L_g = \frac{\beta^2}{k^2} L \qquad (4)$$

Rezumînd rezultatele obținute, proiectarea circuitului se face cu relațiile

$$L = \frac{Z_a}{\omega_0 Q_0(1-\eta_c)} = \varphi_1(Z_a) \qquad (1)$$

$$C = \frac{Q_0(1-\eta_c)}{\omega_0 Z_a} = \varphi_2(Z_a) \qquad (2)$$

$$R_S = \frac{Z_a}{\eta_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\eta_c} \cdot \frac{Z_a}{Z_g}} = \varphi_3(Za, Z_g \beta) \qquad (3)$$

$$L_g = \frac{\beta^2}{k^2} L \qquad (4)$$

## 2. MONTAJUL COLPITTS

$$\mathbf{Z}_{ac} = \frac{R_S}{1 + j\omega C_a R_S} \qquad \mathbf{Z}_{ga} = r_L + j\omega_6 L \approx j\omega_0 L$$

$$\mathbf{Z}_g = \varrho_g \qquad \mathbf{Z}_{gc} = \frac{Z_g}{1 + j\omega C_g Z_g} = \frac{\varrho_g}{1 + j\omega C_g \varrho_g}$$

Factorul de reacție $\beta$ este determinat de relația :

$$\beta = \left| \frac{Z_{gc}}{Z_{gc} + Z_{ag}} \right| = \frac{C_a}{C_g} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L^2}{Q_g^2} \cdot \frac{C_a^2}{C_g^2}}}$$

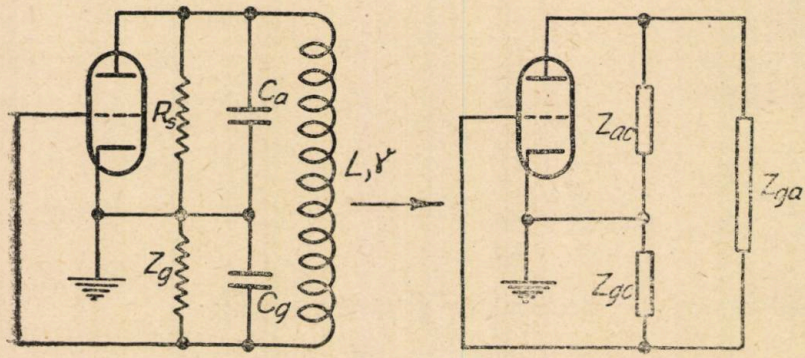



Fig. 3. Fig. 4.

Dacă neglijăm efectul curentului de grilă obținem :

$$\beta = \frac{C_a}{C_g} \tag{1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_a C_g}{C_a + C_g}}} = \frac{1}{\sqrt{LC_a \frac{1}{1 + \frac{C_a}{C_g}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{1+\beta} C_a}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{1+\beta} C_a}} \tag{2}$$

Pe baza relației (2) și cu ipoteza făcută $\left( \beta = \frac{C_a}{C_g} \right)$ circuitul anodic se prezintă astfel :

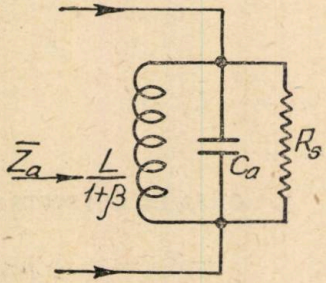



Fig. 5.

In acest mod, circuitul s-a redus la cazul precedent (1) tratat anterior.

$$\frac{L}{1+\beta}=\frac{Z_a}{\omega_0 Q_0(1-\eta_c)}$$

deci:

$$L=\frac{Za(1+\beta)}{\omega_0 Q_0(1-\eta_c)} \tag{3}$$

$$Q_0=\frac{\omega_0 L}{(1+\beta)r}$$

$$C_a=\frac{Q_0(1-\eta_c)}{\omega_0 Z_a} \tag{4}$$

$$\frac{C_a C_g}{C_a+C_g}=\frac{1}{\omega_0^2 L}=\frac{C_g}{1+\frac{C_g}{C_a}}=\frac{C_g}{1+\frac{1}{\beta}}=\frac{\beta}{1+\beta}C_g$$

$$C_g=\frac{1+\beta}{\beta}\cdot\frac{1}{\omega_0^2 L}=\frac{1+\beta}{\beta}\cdot\frac{1}{\omega_0^2\frac{Z_a(1+\beta)}{\omega_0 Q_0(1-\eta_c)}}=\frac{1}{\beta}\frac{Q_0(1-\eta_c)}{\omega_0 Z_a}.$$

Ţinînd seamă de relaţia (4) se regăseşte condiţia (1):

$$C_g=\frac{C_a}{\beta} \tag{5}$$

Dacă ţinem seama de efectul curentului de grilă, atunci avem circuitul:

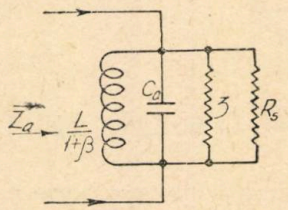



Fig. 6.

Acest circuit este identic cu cel tratat la cazul 1.

Deci:

$$R_s=\frac{Z_a}{\eta_c}\cdot\frac{1}{1-\frac{\beta^2}{\eta_c}\cdot\frac{Z_a}{Z_g}}$$

In concluzie, pentru proiectarea circuitului Colpitts folosim relațiile :

$$L = \frac{Z_a (1 + \beta)}{\omega_0 Q_0 (1 - \eta_c)} = \psi_1 (\beta, Z_a)$$

$$C_a = \frac{Q_0 (1 - \eta_c)}{\omega_0 Z_a} = \psi_2 (Z_a)$$

$$C_g = \frac{1}{\beta} C_a = \psi_3 (\beta, Z_a)$$

$$R_s = \frac{Z_a}{\eta_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\eta_c} \frac{Z_a}{Z_g}} = \psi_4 (\beta, Z_a, Z_g)$$

### 3. MONTAJUL HARTLEY

Schema de principiu :

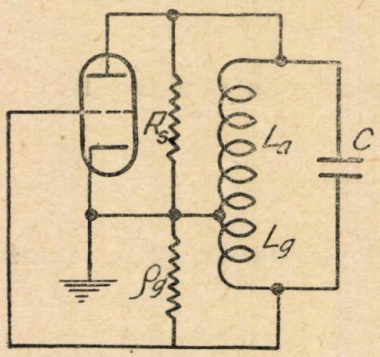



Fig. 7.

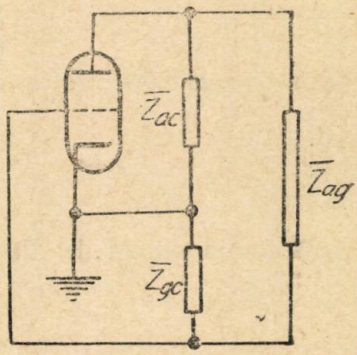



Fig. 8.

$$L = L_a + L_g + 2k\sqrt{L_a L_g}$$

Intr-o primă aproximație putem scrie :

$$L = L_a + L_g$$

$$\bar{\beta} = \frac{\mathbf{U}_g}{\mathbf{U}_a} = \frac{\mathbf{Z}_{gc}}{\mathbf{Z}_{gc} + \mathbf{Z}_{ga}}$$

Neglijînd efectul curentului de grilă obținem :

$$\mathbf{Z}_{gc} = j\,\omega\,L_g$$

$$\mathbf{Z}_{ga} = \frac{1}{j\,\omega\,C}$$

Din condiția :

$$j\omega L_g + j\omega L_a + \frac{1}{j\omega C} = 0$$

rezultă :

$$\frac{1}{\omega C} = \omega (L_a + L_g)$$

$$\bar{\beta} = \frac{j\omega L_g}{j\omega L_g - \frac{j}{\omega C}} = \frac{\omega L_g}{\omega L_g - (L_a + L_g)} = -\frac{L_g}{L_a}$$

$$\beta = \frac{L_g}{L_a} \qquad (1)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{L_a\left(1 + \frac{L_g}{L_a}\right)C}} = \frac{1}{\sqrt{L_a C (1+\beta}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_a C (1 + \beta}} \qquad (2)$$

Pe baza relației (2) și în ipoteza $Z_g$ mare putem reprezenta :

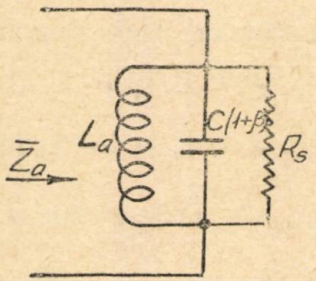



Fig. 9.

In acest mod schema montajului Hartley s-a redus la schema montajului 1.

Deci :

$$L_a = \frac{Z_a}{\omega_0 Q_0 (1 - \eta_c)} \qquad (3)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L_a}{r}$$

$$C = \frac{Q_0 (1 - \eta_c)}{\omega_0 Z_a (1 + \beta)} \qquad (4)$$

$$L_g = \beta L_a \qquad (5)$$

Dacă ţinem seamă şi de $\varrho_g$, atunci determinarea lui $R_s$ se face pe baza relaţiei stabilite la cazul 1.

$$R_s = \frac{Z_a}{\eta_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\eta_c} \cdot \frac{Z_a}{Z_g}}$$

Rezumînd, proiectarea se face pe baza relaţiilor :

$$L_a = \frac{Z_a}{\omega_0 Q_9 (1-\eta_c)} = f_1 (Z_a)$$

$$C = \frac{Q_0 (1 - \eta_c)}{\omega_0 Z_a (1 + \beta)} = f_2 (\beta, Z_a)$$

$$L_g = \beta L_a = f_3 (\beta. Z_a)$$

$$R_s = \frac{Z_a}{\eta_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta_2}{\eta_c} \cdot \frac{Z_a}{Z_g}} = f_4 (\beta, Z_a, Z_g)$$

*Observaţie.* In cele de mai sus, s-a neglijat inductanţa mutuală dintre bobinele $L_a$, $L_g$. Dacă se ţine seamă şi de ea, scriem :

$$L = L'_a + L'_g + 2 k \sqrt{L'_a L'_g} = L'_a + L'_g + 2 k L'_a \sqrt{\beta} = L_a + L_g$$

$L'_a$ $L'_g$ sînt inductanţele bobinelor, luate separat :

$$L_a = L'_a + k L'_a \sqrt{\beta} = L'_a (1 + k \sqrt{\beta})$$

$$L_g = L'_g + k L'_a \sqrt{\beta} = L'_g \left(1 + \frac{k}{\sqrt{\beta}}\right)$$

Deci, considerînd bobinele independente se vor calcula cu relaţiile :

$$L'_a = \frac{1}{1 + k \sqrt{\beta}} L_a$$

$$L'_g = \frac{1}{1 + \frac{k}{\sqrt{\beta}}} L_g$$

**EXEMPLU DE PROIECTARE**

Este necesar un oscilator, de circa 1 kw lucrînd la frecvenţa $f_0 = 1 Mhz$.

I. Alegem tubul $T_{300-1}$ a cărui date maximale sînt :

$E_{a\,max} = 4000$ v
$I_{a\,0\,max} = 550$ mA
$P_{d_a\,max} = 450$ W
$P_{d_g\,max} = 50$ W

Alegem :

$$E_a = 3000 \text{ V}$$
$$I_{aM} \leq \frac{I_{a,o\ max}}{\alpha_0}$$
$$\theta = 70^0$$
$$U_{a,\ min.} = 1{,}5\ U_{g\ max}$$

Aproximînd caracteristicile tubului ca fiind liniare ($n = 1$), obţinem :

$$\alpha_1 = \frac{I_{a\,1}}{I_{aM}} \qquad \alpha_1 = 0{,}435$$

$$\alpha_0 = \frac{I_{a.o}}{I_{aM}} \qquad \alpha_0 = 0{,}25$$

$$I_{aM} \leq \frac{I_{a,o\ max}}{\alpha_0} = \frac{550}{0.25} = 2200 \text{ mA} .$$

Alegem :

$$I_{aM} = 1800 \text{ mA}$$

Deci :

$$I_{a,o} = \alpha_0\ I_{aM} = 0{,}25 \times 1800 = 450 \text{ mA}$$
$$I_{a,1} = \alpha_1\ I_{aM} = 0{,}435 \times 1800 = 782 \text{ mA}$$

Din caracteristicile tubului rezultă perechea de valori care satisface curentul anodic maxim, ales

$$U_{a,min} = 250 \text{ V}$$
$$U_{g,max} = 160 \text{ V}$$

Regimul de funcţionare a circuitului anodic :

$$U_a = E_a - U_{a\ min} = 3000 - 250 = 2750 \text{ V}$$
$$I_{a,o} = 350 \text{ mA}$$
$$I_{a,1} = 782 \text{ mA}$$

Puterea absorbită de la sursă :

$$P_a = E_a \times I_{a,o} = 3000 \times 0{,}45 = 1350 \text{ W} .$$

Puterea alternativă dată în sarcină :

$$P_u = \frac{1}{2}\ U_a I_{a\,1} = 2750 \times 0{,}782 = 1080 \text{ W}$$

Puterea disipată pe anod :

$$P_d = P_a - P_u = 1350 - 1080 = 270 \text{ W}$$
$$P_d < P_{d\ max} = 450 \text{ W}$$

Impedanța anodică :

$$Z_a = \frac{U_a}{I_{a\,1}} = \frac{2750}{0{,}782} = 3500\ \Omega \ .$$

Regimul de funcționare în circuitul de grilă

$$U_{g\,Max} = 160\ V$$

$$E_g = \frac{E_a - (U_a - \mu\, U_{g\,Max})\cos\theta}{\mu\,(1 - \cos\theta)} = \frac{3000 - (2750 - 35 \times 160)\cos 70^0}{35\,(1 - \cos 70^0)}$$

$$E_g = 170\ V$$

$\mu = 35$ (din caract. tubului).

Tensiunea de excitație:

$$U_g = E_g + U_{g\,max} = 170 + 160 = 330\ V$$

Curentul de grilă maxim, corespunzător lui:

$$U_{a\,min} = 250$$

$$U_{g\,Max} = 160\ V$$

este:

$$I_{gM} = 0{,}4\ A$$

Deschiderea pulsului curentului de grilă este de $2\theta_g$.

$$\theta_g = \text{arc cos}\ \frac{E_g}{U_g} = \text{arc cos}\ \frac{170}{330}$$

$$\theta_g = 31^0$$

Aproximînd caracteristicile statice ale curentului de grilă cu parabole de gradul 2, obținem:

$$\alpha_{1g} = \frac{I_{g\,1}}{I_{gM}} = 0{,}17\ ;$$

$$\alpha_{og} = \frac{I_{g\,o}}{I_{gM}} = 0{,}08$$

Aproximînd caracteristicile statice ale curentului de grilă ca fiind liniare, obținem:

$$\alpha_{1g} = \frac{I_{g\,1}}{I_{gM}} = 0{,}22\ ;$$

$$\alpha_{og} = \frac{I_{go}}{I_{gM}} = 0{,}12$$

Admitem al doilea caz, care ne va conduce la valori mai mari ale curentului de grilă:

$$I_{go} = \alpha_{og} I_{gM} = 0{,}12 \times 40 = 48\ mA;$$

$$I_{g1} = \alpha_{1g} I_{gM} = 0{,}22 \times 400 = 88\ mA.$$

Puterea de excitație:

$$P_{excit} = \frac{1}{2} U_g I_{g1} = \frac{1}{2} 330 \times 0{,}088 = 14{,}5\ W.$$

Puterea dată grupului de negativare automată:

$$P_n = E_g I_{go} = 170 \times 0{,}048 = 8{,}3\ W.$$

Puterea disipată pe grilă:

$$P_{dg} = P_{excit} - P_n = 14{,}5 - 8{,}3 = 6{,}2\ W.$$

$$P_{dg} < P_{dg\ max},$$

Grupul de negativare automată:

$$R_g = \frac{E_g}{I_{g0}} = \frac{170}{48} = 3{,}55\ k\,\Omega$$

$$C_{g_{pF}} = \frac{10^{13}}{f_{H_z} R_{g_\Omega}} = \frac{10^{13}}{10^6 \times 3{,}55 \cdot 10^3} = 2800\ {}_pF$$

Alegem:

$$R_g = 3500\ \Omega;\ C_g = 3000\ {}_pF.$$

Impedanța spațiului grilă catod:

$$\varrho_g = \frac{U_g}{I_{g1}} = \frac{330}{88} = 3{,}75\ k\,\Omega$$

II. Din calculul regimului de funcționare ca amplif. Cl. C am obținut:

$$U_a = 2750\ V \qquad P_u = 1080\ V$$

$$U_g = 330\ V \qquad P_{excit} = 14{,}5\ W$$

$$Z_a = 3500\ \Omega$$

$$Z_g = 3750\ \Omega$$

Pentru ca amplificatorul să devină autoexcitat, vom aplica o reacție pozitivă care să asigure tensiunea de excitație necesară cînd tensiunea anodică are valoarea calculată. Factorul de reacție:

$$\beta = \frac{Ug}{Ua} = \frac{330}{2750} = 0{,}12 \qquad \beta = 12\%$$

Puterea în impedanţă de sarcină $R_S$ :

$\eta_c = 0{,}95$ randamentul circuitului :

$P_C = (1 - \eta_c)\, Pu = 0{,}05 \times 1080 = 54$ W ;

$P_S = Pu - P_{excit} - P_c = 1080 - 14{,}5 - 54 = 1011{,}5$ W.

In sarcină se va obţine deci puterea cerută $\approx$ 1kW.

III. Alegînd un oscilator cu reacţie magnetică, aplicăm formulele (Caz I. pag. 6 şi obţinem :

$Q_0 = 200$ factorul de calitate în gol. $\eta_c = 0{,}95$ .

$$L = \frac{Za}{\omega_0 Q_0 (1 - \eta_c)} = \frac{3500}{2\pi . 10^6 2 . 10^2 . 5 . 10^{-2}} = 55\ \mu H$$

$$C = \frac{Q_0 (1 - \eta_c)}{\omega_0 Za} = \frac{200\ (1 - 0{,}95)}{2\pi . 10^6 \times 3{,}5 . 10^3}\, 10^{12} = 450\ \text{pF}$$

$$Lg = \frac{\beta^2}{k^2} L = \left(\frac{0{,}12}{0{,}1}\right)^2 L = 1{,}44 \times 55 = 80 \mu H$$

$k = 0{,}1$ — coeficientul de cuplaj .

$$R_S = \frac{Za}{\eta_c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\eta_c} \frac{Za}{Zg}} = \frac{3500}{0{,}95} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0{,}12^2 \times 3500}{0{,}95 \times 4750}} = \frac{3500}{0{,}95 \times 0{,}985}$$

$R_S = 3750\ \Omega$ .

$R_S$ este o impedanţă, considerată în paralel cu circuitul oscilant (indiferent dacă sarcina se conectează direct sau printr-un cuplaj).

Schema oscilatorului este dată în fig. 10.

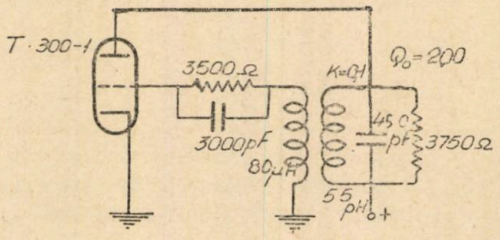



Fig. 10.

Lucrînd în condițiile calculate, tubul funcționează fără răcire. Caracteristicile tubului sînt în fig. 11.

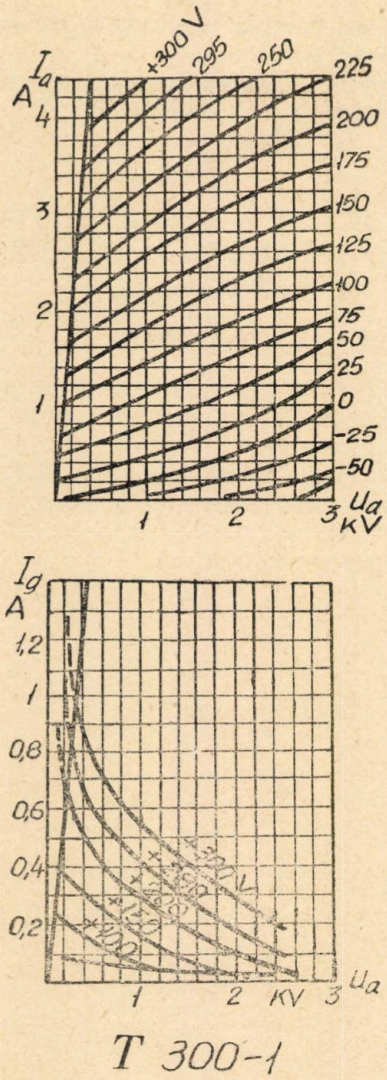



Fig. 11.

*Catedra de Electronică*

Primit la redacție la 1 V 1956.

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИЛОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ КЛАССА *C* ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ И ЛАБОРАТОРНЫХ ПРИМЕНЕНИЙ

(Краткое содержание)

Рассчитывается режим работы лампы в качестве усилителя класса *C* для максимальной выходной мощности.

Из условий колебаний выводятся формулы проектирования элементов цепи для трёх типов схемы.

Приводится пример расчёта.

## MÉTHODE POUR CALCULER LES OSCILATEURS DE PUISSANCE — CLASSE *C* — DESTINÉS AUX APPLICATIONS INDUSTRIELLES ET DE LABORATOIRE

(Résumé)

On calcule le régime de fonctionnement d'un tube qui travaille comme amplificateur classe *C*. Le régime choisi correspond à une puissance de sortie maximum.

A partir des conditions d'oscillation on déduit les formules qui permettent de déterminer les élements du circuit dans certains cas qu'on a étudié.

On donne un exemple numérique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.396.64

# ANALIZA FUNCŢIONĂRII AMPLIFICATORILOR CLASĂ C DEZACORDAŢI

de M. BERLADSCHI

Circuitele de sarcină ale amplificatorilor clasă $C$, folosiţi în radiotehnică, sînt circuite oscilante care lucrează în mod obişnuit la rezonanţă; frecvenţa proprie a circuitului este egală cu frecvenţa sau cu un multiplu al frecvenţei semnalului aplicat pe grilă. In literatura de specialitate, condiţiile de funcţionare ale tubului amplificator într-o astfel de situaţie sînt studiate detaliat [1 — 5].

Se ştie însă că — în special la punerea în funcţiune a etajelor clasă $C$ — circuitul anodic este de cele mai multe ori dezacordat, după cum chiar în timpul funcţionării circuitului se poate dezacorda din diferite motive (variaţia cuplajului cu circuitul de sarcină etc.). In aceste situaţii, puterea disipată pe anodul tubului creşte apreciabil, tputînd periclita siguranţa sa. De aceea, analiza funcţionării amplificatorilor de putere selectivi dezacordaţi prezintă un interes practic. Acest caz, ale cărui multiple probleme au fost numai parţial tratate în literatură [6 — 8], constituie obiectul studiului de faţă.

## 1. FORMA TENSIUNII ANODICE ALTERNATIVE

Dezacordul circuitului oscilant poate proveni datorită, pe de o parte, variaţiei frecvenţei semnalului (de la valoarea normală $\omega_0$), iar pe de altă parte variaţiei capacităţii de acord (de la valoarea normală $C_0$). Ţinînd seamă de aceasta, impedanţa circuitului anodic se poate pune — la o frecvenţă oarecare — sub forma

$$\mathbf{Z} = Z\angle\varphi = \frac{-j\frac{1}{\omega C}(R + j\omega L)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \approx \frac{L/C}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \qquad (1)$$

unde s-a presupus, ca de obicei, că în jurul rezonanţei $R \ll \omega L$, Dacă la frecvenţa de rezonantă

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$$

Rezistenţa circuitului are valoarea $R_0$, (1) devine

$$\mathbf{Z} = \frac{Z_0/\lambda}{\frac{R}{R_6} + jQ\left(\gamma - \frac{1}{\lambda\gamma}\right)} \qquad (2)$$

unde

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_0}$$

este factorul de calitate al circuitului, presupus constant (independent de frecvenţă în jurul rezonanţei), iar

$$Z_0 = \frac{L}{C_0 R_0}$$

reprezintă impedanţa circuitului de acord. S-a mai notat

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\lambda = \frac{C}{C_0}$$

Semnalul aplicat pe grila tubului fiind presupus sinusoidal

$$u_g = -E_g + U_g \omega_1 t \tag{3}$$

curentul anodic va fi de forma

$$i_a = I_{ao} + I_{a1} \cos(\omega_1 t + x_1) + I_{a2} \cos(2\omega_1 t + x_2) + \cdots \tag{4}$$

unde frecvenţa de lucru s-a notat *) $\omega_1$. La această frecvenţă unghiul de fază al impedanţei anodice este

$$\varphi = \text{arc cos } \lambda \frac{Z_1}{Z_0} = \text{arc tg } Q \left(\gamma_1 - \frac{1}{\lambda \gamma_1}\right) \tag{5}$$

deoarece în jurul rezonanţei valoarea raportului $R/R_0$ este apropiată de unitate. Aici $\gamma_1 = \omega_1/\omega_0$.

Circuitul anodic va oferi diferitelor componente ale curentului impedanţe $Z_1\ Z_2, \ldots\ Z_k$ ale căror valori se obţin punînd în (2) $\gamma = k\gamma_1$, unde $k = 1, 2, \ldots$ reprezintă ordinul armonicei respective. Aceste impedanţe determină căderile de tensiune $U_{a1} = Z_1 I_{a1}$, $U_{a2} = Z_2 I_{a2}$, $U_{a3} = Z_3 I_{a3} \ldots U_{ak} = Z_k I_{ak}, \ldots$, decrescătoare cu ordinul armonicei. La dezacorduri nu prea mari, componentele armonice ale tensiunii sînt, ca şi în amplificatorul acordat, mici faţă de fundamentala $U_{a1}$. Forma tensiunii anodice se poate aprecia calculînd valoarea raportului

$$\frac{U_{a2}}{U_{a1}} = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{I_{a2}}{I_{a1}}$$

*) Spre a o deosebi de frecvenţa curentă, în particular – de frecvenţele armonicelor

Din (2) se obține cu ușurință

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \sqrt{\frac{1 + Q^2\left(\gamma_1 - \frac{1}{\lambda\gamma_1}\right)^2}{1 + Q^2\left(2\gamma_1 - \frac{1}{2\lambda\gamma_1}\right)^2}}$$

iar raportul $I_{a\,2}/I_{a\,1}$ depinde *) de unghiul de deschidere a curentului anodic (tabela 1).

Tabela 1

| $\theta$ | $\frac{I_{a2}}{I_{a1}}$ | $\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)_{max}$ | variază C | | variază $\omega_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\lambda_{min}$ | $\lambda_{max}$ | $\gamma_{1min}$ | $\gamma_{1max}$ |
| 60° | 0,705 | 0,142 | 0 82 | 1,28 | 0,92 | 1,14 |
| 70° | 0,614 | 0,163 | 0,81 | 1,34 | 0,91 | 1,16 |
| 80° | 0,520 | 0,192 | 0,79 | 1,44 | 0,89 | 1,21 |
| 90° | 0,424 | 0,236 | 0,76 | 1,60 | 0.87 | 1,28 |

Pentru ca raportul $U_{a2}/U_{a1}$ să aibă o anumită valoare, se poate deduce în acest fel valoarea corespunzătoare a raportului impedanțelor. Impunînd condiția $\frac{U_{a2}}{U_{a1}} \leq 0,1$ se găsește

$$\frac{Z_2}{Z} \leq \frac{0,1}{I_{a2}/I_{a1}}$$

ceeace permite ca să determine dezacordul ($\lambda$ sau $\gamma_1$) maxim corespunzător (tabela 1). De remarcat că, la aceste dezacorduri, factorul de calitate $Q$ nu mai influențează (ca în imediata vecinătate a acordului) valoarea raportului $Z_2/Z_1$.

După cum se vede, pentru cazurile interesante în practică (emițătorii de radio), dezacordul care se poate ivi în timpul exploatării nu depășește limitele prezentate în tabela 1, astfel încît pentru scopul propus aici se poate considera că tensiunea anodică alternativă este sinusoidală.

Prin urmare, se va putea scrie

$$u_a = E_a - U_a \cos(\omega_1 t + \psi) \qquad (6)$$

(considerînd faza tensiunii de semnal drept origine de fază).

*) În ipoteza că tubul are caracteristice liniare și pulsul curentului anodic este simetric (§ 3).

## 2. DIAGRAMA CURENTULUI ŞI TENSIUNILOR

Studiul analitic al funcţionării amplificatorului implică adoptarea unei relaţii analitice pentru curentul anodic al tubului. Aşa cum se procedează de cele mai multe ori, vom presupune că curentul anodic este dat de o ecuaţie liniară *).

$$i_a = \frac{u_a + \mu u_g}{R_i}$$

Introducînd expresiile tensiunilor din (3) şi (6) se ajunge la

$$i_a = \frac{1}{R_i}\left[U \cos(\omega_1 t - \delta) - E\right] \tag{8}$$

unde

$$U = \sqrt{(\mu U_g - U_a \cos\psi)^2 + (U_a \sin\psi)^2} \tag{9}$$

$$E = \mu E_g - E_a \tag{10}$$

$$\delta = \text{arc tg}\ \frac{U_a \sin\psi}{\mu U_g - U_a \cos\psi} \tag{11}$$

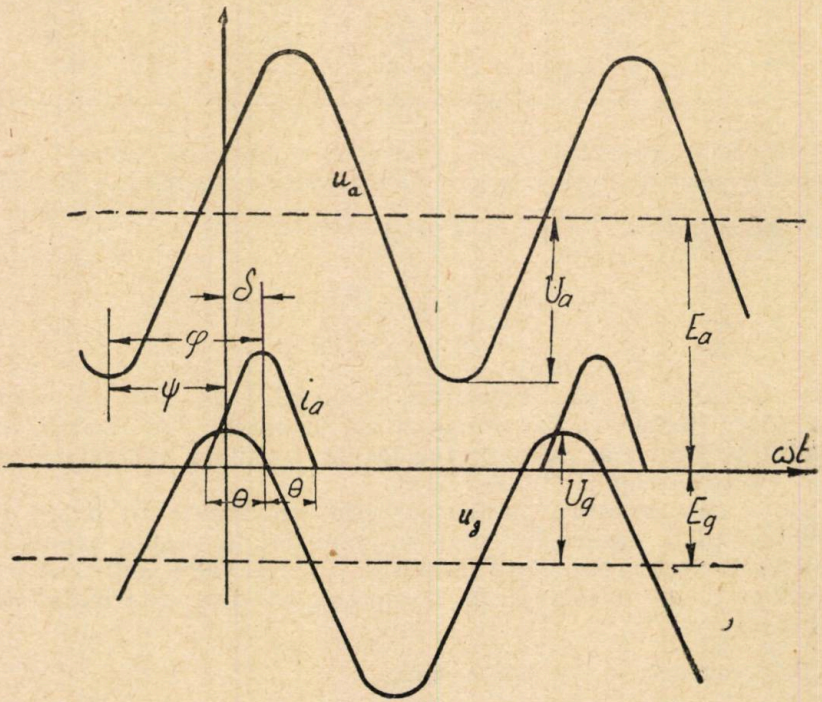



Fig. 1 — Tensiunile de grilă şi de placă şi curentul anodic într-un amplificator clasă *C* dezacordat.

In fig. 1 se arată variaţia în timp a tensiunilor $u_g$ şi $u_a$ şi pulsul de curent anodic $i_a$, iar în fig. 2 — diagrama complexă pentru componentele alternative ale celor două tensiuni şi componenta fundamentală a curentului anodic în cazul unei sarcini inductive.

*) Ipoteză cu atît mai valabilă, cu cît amplificatorul dezacordat lucrează în regim subexcitat.

Ecuația (8) arată că pulsul curentului de placă este ca și în cazul acordului — simetric, însă decalat cu unghiul $\delta$ față de tensiunea de grilă. In consecință, descompunerea pulsului în componente armonice se poate face *) în acelaș fel ca în amplificatorii acordați și deci fundamentala $I_{a1}$ are aceeași fază $\delta$. Cum

$$U_a = -Z_1 I_{a1} \tag{12}$$

rezultă

$$\varphi = \psi + \delta \tag{13}$$

Trebuie subliniat că unghiurile $\varphi$, $\psi$, $\delta$ sînt de același semn **) — pozitive sau negative, după cum sarcina anodică este inductivă, respectiv capacitivă.

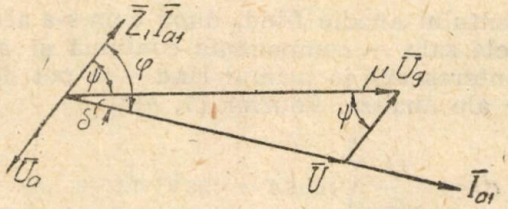



Fig. 2 — Diagrama complexă pentru componentele fundamentale.

Din fig. 2 sau prin calcule trigonometrice elementare se poate deduce

$$\frac{\sin\varphi}{\mu U_g} = \frac{\sin\psi}{U} = \frac{\sin\delta}{U_a} \tag{14}$$

Unghiul de deschidere a curentului anodic se determină scriind ecuația pulsului (8) sub forma

$$i_a = \frac{1}{R_i}[U\cos x - E] \tag{15}$$

($x = \omega_1 t - \delta$), adică considerînd originea timpului în momentul în care curentul este maxim și punînd $i_a = 0$; rezultă

$$\cos\theta = \frac{E}{U} \tag{16}$$

Pentru generalizare se va nota

$$v = \frac{U}{\mu U_g} \tag{17}$$

$$v_a = \frac{U_a}{\mu U_g} \tag{18}$$

$$e = \frac{E}{\mu U_g} \tag{19}$$

*) In ipoteza că se cunoaște ordonata maximă și deschiderea pulsului.
**) Dat fiind felul în care sînt scrise relațiile (6) și (8).

astfel încît, relațiile (14) și (16) devin, respectiv

$$\frac{\sin \varphi}{1} = \frac{\sin \psi}{v} = \frac{\sin \delta}{v_a} \tag{20}$$

$$\cos \theta = \frac{e}{v} . \tag{21}$$

Tubul și amplitudinea semnalului fiind date, se va lucra în cele ce urmează cu parametrii indiciali $v$, $v_a$, $e$.

### 3. DESCOMPUNEREA CURENTULUI ANODIC. CIRCUITUL ECHIVALENT AL AMPLIFICATORULUI

Pulsul curentului anodic fiind, după cum s-a arătat mai sus, simetric, componentele sale — componenta continuă și aplitudinea fundamentalei, care interesează în primul rînd — se pot determina prin metodele obișnuite ale analizei Fourier [1, 5]:

$$I_{ao} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_a \, dx = \frac{U}{\pi R_i} \int_0^{\theta} (\cos x - \cos \theta) \, dx = \frac{U}{\frac{\pi}{\sin \theta - \theta \cos \theta} R_i}$$

sau

$$I_{ao} = \frac{E}{\beta R_i} \tag{22}$$

unde

$$\beta = \frac{\pi \cos \theta}{\sin \theta - \theta \cos \theta} \tag{23}$$

In mod similar,

$$I_{a1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i_a \cos x \, dx = \frac{2U}{\pi R_i} \int_0^{\theta} (\cos^2 x - \cos \theta \cos x) \, dx = \frac{U}{\frac{\pi}{\theta - \sin \theta \cos \theta} R_i}$$

sau

$$I_{a1} = \frac{U}{\alpha_i R_i} \tag{24}$$

unde

$$\alpha_i = \frac{\pi}{\theta - \sin \theta \cos \theta} \tag{25}$$

In fig. 3 se reprezintă variația coeficienților $\alpha_i$ și $\beta$ în funcție de unghiul $\theta$.

Pe de altă parte, din ecuațiile (11) și (14) se deduce

$$U = \frac{\mu U_g - U_a \cos \psi}{\cos \delta}$$

și deci

$$I_{a1} = \frac{\mu U_g}{\alpha_i R_i \cos \delta} - \frac{Z_1 \cos \psi}{\alpha_i R_i \cos \delta} I_{a1}$$

sau

$$I_{a1} = \frac{\mu U_g}{\alpha_i R_i \cos \delta + Z_1 \cos \psi} \tag{26}$$

Aceeaşi relaţie se poate deduce în cantităţi complexe din fig, 2:

$$\mathbf{I}_{a1} = \frac{\mu\, \mathbf{U}_g}{\alpha_i R_i + \mathbf{Z}_1} \qquad (27)$$

De aici putem trage concluzia importantă că fundamentala curentului anodic într-un amplificator clasă $C$ dezacordat se termină pe baza aceluiaşi circuit echivalent (fig. 4) ca şi la acord, ţinînd seamă de valoarea *complexă* a impedanţei de sarcină şi de valoarea *noua* a unghiului de deschidere a curentului (în general diferită de cea de la acord).

## 4. DETERMINAREA UNGHIULUI DE DESCHIDERE A CURENTULUI

Funcţionarea unui amplificator clasă $C$ acordat este determinată de tensiunile de alimentare anodică şi de grilă, amplitudinea semnalului şi impedanţa de sarcină, deci patru mărimi: $E_a$, $E_g$. $U_g$, $\mathbf{Z}$. Predeterminarea condiţiilor de funcţionare — în ultimă instanţă, calculul

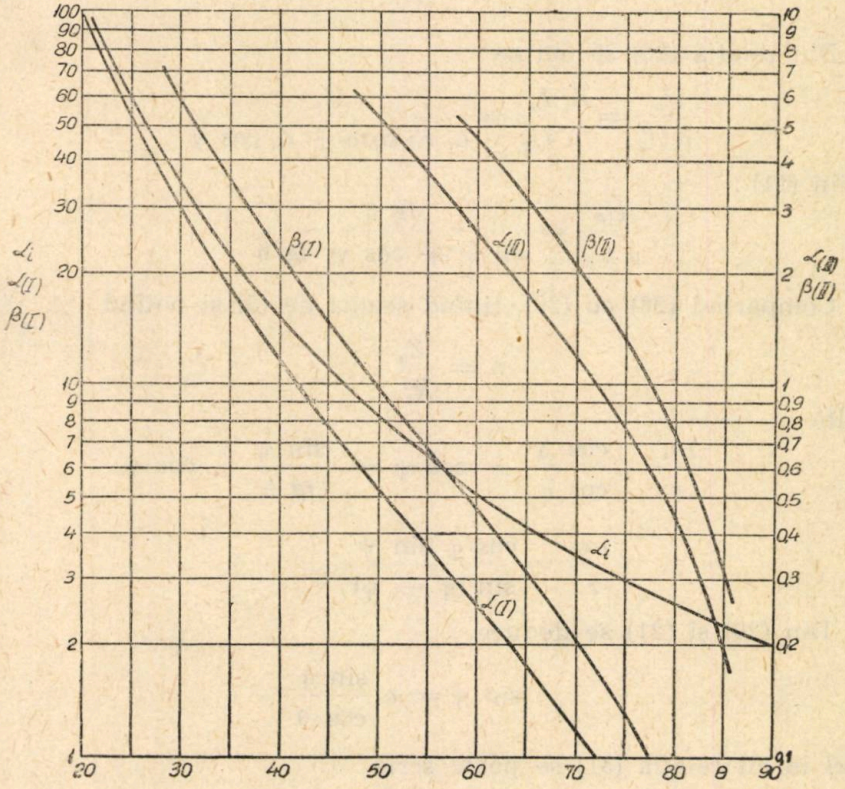



Fig. 3 — Curbele coeficienţilor αí, α, β.

puterii utile şi al randamentului — implică determinarea prealabilă a unghiului θ, ceea ce se face prin metodele cunoscute, eventual impunînd condiţii suplimentare [1 — 6].

In cazul dezacordării circuitului de sarcină, este de asemenea necesar să se calculeze în primul rînd unghiul de deschidere $\theta$, însă de data aceasta la cele patru mărimi menționate mai sus se adaugă încă una, unghiul de fază $\varphi$ al impedanței $Z_1$.

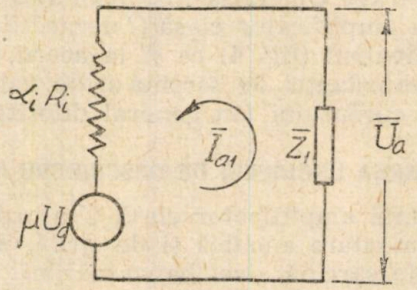



Fig. 4 — Circuitul echivalent al amplificatorului.

Din relația (26) se obține:

$$\frac{U_a}{\mu U_g} = \frac{Z_1 I_{a1}}{\mu U_g} = \frac{Z_1}{\alpha_i R_i \cos\delta + Z_1 \cos\psi} \tag{28}$$

iar din (11):

$$\frac{U_a}{\mu U_g} = \frac{tg\ \delta}{\sin\psi + \cos\psi\ tg\ \delta} \tag{29}$$

Comparînd (28) cu (29), ținînd seama de (5) și notînd

$$r = \frac{Z_0}{R_i} \tag{30}$$

rezultă

$$\frac{\lambda\alpha_i}{r} \cdot \frac{\cos\delta}{\cos\varphi} + \cos\psi = \frac{\sin\psi}{tg\ \delta} + \cos\psi$$

sau

$$\frac{\lambda\alpha_i}{r} = \frac{\cos\varphi \sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)} \tag{31}$$

Din (20) și (21) se deduce

$$\sin\psi = e\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}$$

astfel în cît relația (31) se poate scrie

$$r \sin 2\varphi = \frac{2\lambda}{e}\alpha_i \cos\theta \sin\left[\varphi - \text{arc sin}\left(e\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\right)\right] \tag{32}$$

Ecuația (32) permite în principiu determinarea unghiului $\theta$ cînd se cunosc tensiunile de alimentare $E_a$ și $E_g$ (reprezentate de parametrul $e$), impedanța anodică la rezonanță $Z_i$ (parametrul $r$) și unghiul

de fază $\varphi$ *). Practic însă, calculul, chiar grafic, este destul de complicat deoarece intervin ca variabile independente $e$, $r$, $\varphi$, iar coeficientul $\alpha_i$, este funcția de necunoscuta $\theta$. Se poate proceda în felul următor: pentru fiecare valoare a parametrului $e$, se trasează cîte o diagramă cu curbele

$$\theta = \theta\,(r \sin 2\varphi),$$

pentru diferitele valori ale lui $\varphi$. Se înțelege însă că procedeul este prea incomod în practică, deoarece este necesar să se lucreze cu mai multe diagrame.

De aceea este preferabil un calcul mai simplu, chiar dacă ar fi mai puțin exact. In primul rînd, trebuie observat că curentul anodic în tub depinde în special de tensiunea de grilă și mult mai puțin de tensiunea anodică. Chiar dacă circuitul anodic este puternic dezacordat, adică tensiunea (sinusoidală) la bornele circuitului va fi mult decalată în urmă sau înaintea tensiunii de excitație, *pulsul de curent nu-și schimbă* prea mult poziția (față de situația de la acord). Cu alte cuvinte, pe măsură ce unghiul de fază $\varphi$ al impedanței anodice crește (în valoare absolută) de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ și amplitudinea $U_a$ a tensiunii anodice alternative după cum se știe, scade, unghiul $\delta$ rămîne destul de mic, iar unghiul de deschidere $\theta$ crește foarte puțin (a se vedea exemplul din § 6).

Ținînd seamă de aceste considerente de ordin fizic, este indicată pentru calcul următoarea metodă de aproximații succesive, care presupune cunoscute condițiile de funcționare ale amplificatorului la acord:

1°. Se presupune inițial că tensiunea anodică alternativă este aceeași ca la acord, deci se cunoaște $v_a$,

2°. La un dezacord $\varphi$ dat. se deduc $\delta$, $\psi$, $v$ cu ajutorul relațiilor (20) și (11):

$$\sin\delta = v_a \sin\varphi \tag{33}$$

$$v = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} \tag{34}$$

$$\psi = \varphi - \delta \tag{13}$$

Pentru ușurarea determinărilor, în fig. 5 s-au reprezentat curbele $\delta = \delta(\varphi)$ pentru diferite valori ale lui $v_a$ și $\psi = \psi(\varphi)$ pentru diferite valori ale lui $v$.

3°. Cunoscînd $v$ și $e$ (tensiunile de alimentare) se deduce unghiul de deschidere $\theta$ — relația (21).

4°. Cu ajutorul ecuației (28):

$$\frac{1}{v_a} = \frac{\lambda\,\alpha_i}{r} \cdot \frac{\cos\delta}{\cos\varphi} + \cos\psi \tag{35}$$

se deduce în a doua aproximație valoarea parametrului $v_a$.

Apoi calculul se reia de la început pînă ce se ajunge la aceeași valoare de la care s-a plecat. De obicei a doua aproximație dă o precizie satisfăcătoare.

*) In cazul cînd variază capacitatea circuitului de sarcină, mărimile $\varphi$ și $\lambda$ sînt legate prin ecuația (5), cu $\gamma_1 = 1$.

## 5. CALCULUL PUTERILOR IN AMPLIFICATORUL DEZACORDAT

Puterea utilă dezvoltată în circuitul anodic al amplificatorului are expresia

$$P_u = \frac{1}{2} Z_1 I_{a1}^2 \cos \varphi \tag{36}$$

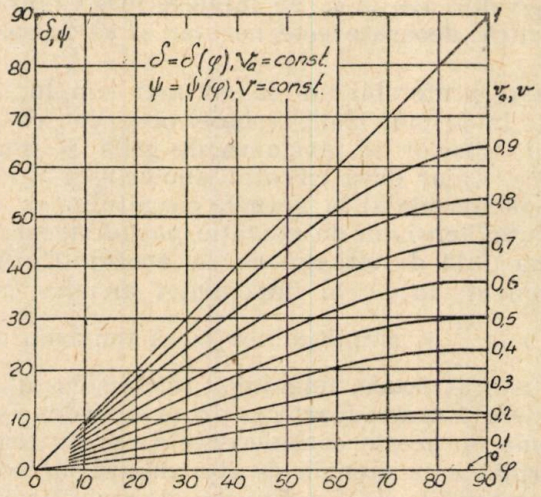



Fig. 5 — Curbele pentru determinarea unghiurilor δ şi ψ.

Ţinînd seamă de relaţiile (5), (24), (30), (16), (19), ecuaţia (30) se va scrie

$$P_u = \frac{e^2 r \cos^2 \varphi}{2 \lambda \alpha^2} \cdot \frac{(\mu U_g)^2}{R_i} \tag{37}$$

unde

$$\alpha = \alpha_i \cos \vartheta = \frac{\pi \cos \vartheta}{\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta} . \tag{38}$$

Acest factor este reprezentat în fig. 3. în funcţie de unghiul θ. La acord puterea utilă are valoarea

$$P_{uo} = \frac{e^2 r}{2 \alpha_0^2} \cdot \frac{(\mu U_g)^2}{R_i} \tag{39}$$

unde $\alpha_0$ reprezintă valoarea coeficientului α corespunzătoare unghiului de deschidere $\theta_0$ la rezonanţă. Aşadar, notînd

$$p_u = \frac{\cos^2 \varphi}{\lambda} \left( \frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^2 \tag{40}$$

se poate scrie

$$P_u = p_u P_{uo} \tag{41}$$

Puterea absorbită de amplificator

$$P_a = E_a I_{ao} \tag{42}$$

se poate pune, ţinînd seamă de (19) şi (22), sub forma

$$P_a = \frac{e\, e_a}{\beta} \cdot \frac{(\mu\, U_g)^2}{R_i} \tag{43}$$

unde

$$e_a = \frac{E_a}{\mu\, U_g} \cdot \tag{44}$$

La acord,

$$P_{ao} = \frac{e\, e_a}{\beta_0} \cdot \frac{(\mu\, U_g)^2}{R_i} \tag{45}$$

$\beta_0$ reprezentînd valoarea coeficientului $\beta$ la rezonanţă. Prin urmare, se poate scrie

$$P_a = p_a\, P_{ao} \tag{46}$$

unde

$$p_a = \frac{\beta_o}{\beta} \cdot \tag{47}$$

Puterea disipată pe anod va fi evident,

$$P_d = P_a - P_u = \left( \frac{e\, e_a}{\beta} - \frac{e^2\, r \cos^2 \varphi}{2\, \lambda\, \alpha^2} \right) \cdot \frac{(\mu\, U_g)^2}{R_i} \tag{48a}$$

sau

$$P_d = p_a\, P_{ao} - p_u\, P_{uo} \tag{48b}$$

Se înţelege că aplicarea acestor relaţii cere determinarea prealabilă a unghiului de deschidere $\theta$ corespunzător defazajului $\varphi$ dat. In acest mod, se poate deduce — pentru funcţionarea cu tensiunile normale de alimentare — defazajul (dezacordul) maxim permis — la care disipaţia anodică atinge valoarea admisă de tub.

## 6. EXEMPLU PRACTIC

Pentru concretizarea celor expuse mai sus, s-a considerat cazul unui amplificator clasă *C* cu tubul *TC* 04/10 ($\mu \approx 25$, $R_i \approx 11{,}800$ ohmi), care lucrează (la acord) în următoarele condiţii:

$E_a = 500\ V$ $\quad e_a = 0{,}25$
$E_g = 36\ V$
$E = 400\ V$ $\quad e = 0{,}20$
$U_g = 80\ V$
$U_a = 450\ V$ $\quad v_a = 0{,}225$
$U = 1550\ V$ $\quad v = 0{,}775$
$Z_o = 10000\ \Omega$ $\quad r = 0{,}848$

$\theta = 75{,}05^0$
$P_{uo} = 10\ W$
$P_{ao} = 13{,}1\ W$

Presupunînd că variază capacitatea circuitului acordat și procedînd așa cum s-a arătat mai sus, se găsesc pentru diferite dezacorduri (diferite valori ale lui $\lambda$, respectiv ale unghiului de fază $\varphi$) valorile din tabela 2. Variația unghiului de deschidere $\theta$, a defazajului $\delta$ a tensiunii anodice $U_a$ și a puterii disipate $P_d$ cu faza $\varphi$ se reprezintă în fig. 6. După cum se vede, tubul alimentat cu tensiunile de lucru normale ajunge la limita de disipație (10 $W$) pentru un unghi de fază de circa 50° al impedanței anodice.

Tabela 2

| $\lambda$ | $\varphi^0$ | $\delta^0$ | $v_a$ | $\theta^0$ | $U_a$ (V) | $P_u$ (W) | $P_a$ (W) | $P_d$ (W) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,82 | 81,5 | 3,15 | 0,056 | 78,35 | 112 | 0,541 | 18,93 | 18,29 |
| 0,84 | 80,3 | 3,50 | 0,062 | 78,32 | 124 | 0,683 | 18,75 | 18,07 |
| 0,86 | 79,0 | 3,93 | 0,070 | 78,27 | 140 | 0,846 | 18,67 | 17,82 |
| 0,88 | 76,7 | 4,50 | 0,081 | 78,20 | 162 | 1,180 | 18,50 | 17,32 |
| 0,90 | 74,0 | 5,20 | 0,093 | 78,10 | 186 | 1,623 | 18,30 | 16,68 |
| 0,92 | 70,0 | 6,05 | 0,112 | 77,92 | 224 | 2,325 | 17,43 | 15,60 |
| 0,94 | 63,1 | 7,00 | 0,137 | 77,57 | 274 | 3,680 | 17,19 | 13,51 |
| 0,96 | 52,4 | 7,78 | 0,171 | 76,88 | 342 | 5,660 | 15,83 | 10,17 |
| 0,98 | 32,5 | 6,35 | 0,205 | 75,90 | 410 | 8,585 | 14,27 | 5,69 |
| 1,00 | 0 | 0 | 0,225 | 75,05 | 450 | 10,000 | 13,11 | 3,11 |
| 1,02 | —31,0 | —6,13 | 0,203 | 75,92 | 406 | 8,570 | 14,30 | 5,73 |
| 1,04 | —48,5 | —7,34 | 0,169 | 76,90 | 338 | 6,190 | 15,90 | 9,71 |
| 1,06 | —60,0 | —6,70 | 0,133 | 77,50 | 266 | 3,945 | 17,02 | 13,07 |
| 1,08 | —66,4 | —5,72 | 0,110 | 77,86 | 220 | 2,680 | 17,75 | 15,07 |
| 1.10 | —70,5 | —4,96 | 0,092 | 78 02 | 184 | 1,905 | 18,17 | 16,27 |
| 1,12 | —73,4 | —4,40 | 0 079 | 78,15 | 158 | 1,428 | 18,40 | 16,97 |
| 1.14 | —75,2 | —3,83 | 0,069 | 78,24 | 138 | 1,134 | 18,60 | 17,47 |
| 1,16 | —76,7 | —3.40 | 0,060 | 78,29 | 120 | 0,912 | 18,70 | 17,79 |
| 1,18 | —78,0 | —3,05 | 0.054 | 78,31 | 108 | 0,740 | 18,73 | 18,00 |

## 7. VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ

De obicei, schema practică a unui amplificator de putere acordat este prevăzută cu un miliampermetru de c. c. pentru măsurarea curentului anodic mediu, deci a puterii absorbite, iar pentru determinarea puterii utile — un ampermetru termic în circuitul oscilant*) sau un voltmetru electronic la bornele circuitului oscilant (pe tub).

Pentru a putea verifica datele obținute (prin calcul) în tabela 2 s-a folosit montajul amplificatorului clasă $C$ din fig. 7. Cu valorile date ale constantelor circuitelor, pentru a se obține impedanța de 10.000 Ω (la acord) considerată în exemplul de mai sus, rezistența circuitului anodic trebuie să fie de 10,55 Ω ($Q$ = 30,8), deci circuitul secundar trebuie să reflecteze o rezistență de 4,25 Ω; stabilirea cuplajului $M$ la valoarea 8,55 μ $H$ a asigurat reglajul corect al impedanței anodice.

*) Sau în circuitul de sarcină cuplat cu circuitul anodic.

După punerea în funcțiune și reglarea amplificatorului acordat în condițiile menționate la § 6, s-a variat capacitatea circuitului anodic

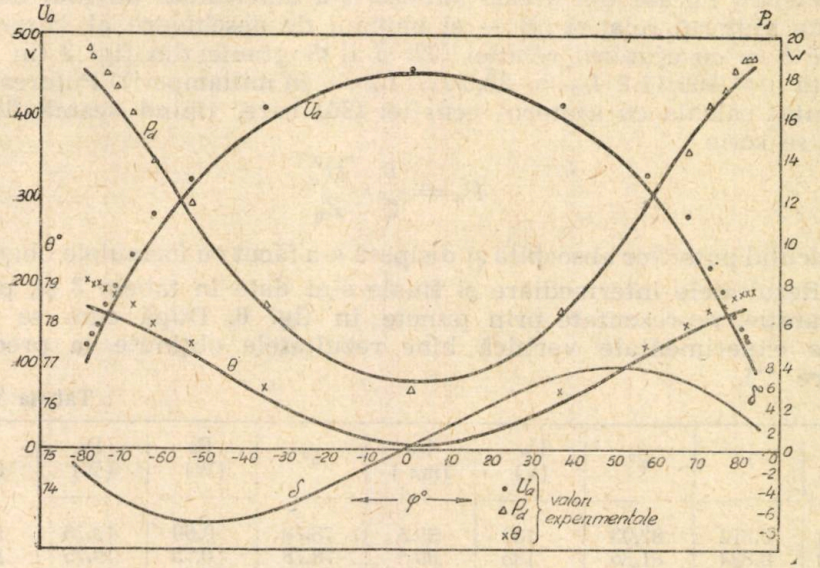



Fig. 6 — Exemplu practic, Variația mărimilor electrice caracteristice în funcție de dezacord. Curbele indică rezultatele predeterminării analitice, punctele—rezultatele experimentale.

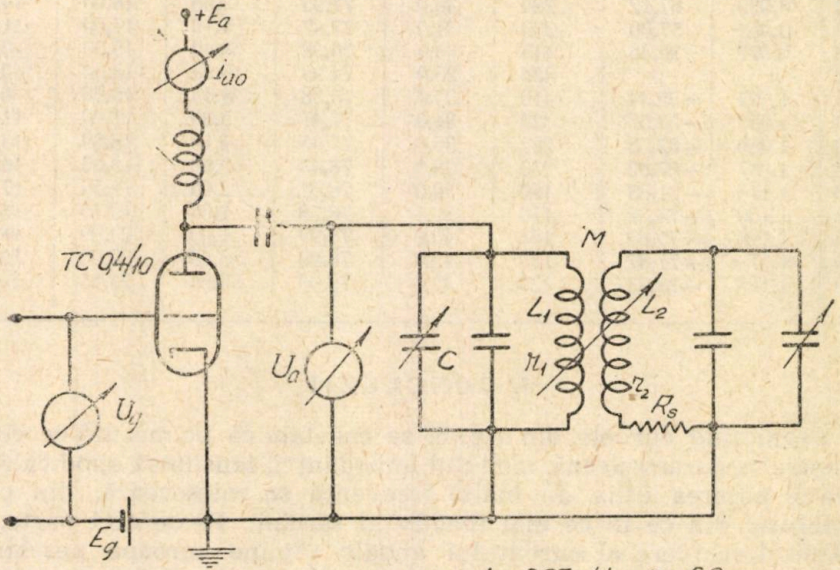



Fig. 7 — Schema montajului pentru verificarea experimentală.

primar *) măsurîndu-se la diferite dezacorduri curentul anodic continuu $I_{ao}$ și tensiunea anodică de înaltă frecvență $U_a$.

Pentru fiecare din aceste situații, s-a determinat unghiul de fază $\varphi$ — cu ajutorul relației (5) — și unghiul de deschidere al curentului anodic $\theta$ — cu ajutorul relației (22) și al diagramei din fig. 3 (în cazul de față $\beta = 400/11{,}8$ $I_{ao} = 33{,}9/I_{ao}$, $I_{ao}$ — în miliamperi). Puterea utilă s-a putut calcula cu ajutorul ecuației (36) care, ținînd seamă de (12) și (5) se scrie

$$P_u = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{U_a^2}{Z_0} \qquad (49)$$

iar calculul puterilor absorbită și disipată s-a făcut cu formulele obișnuite.

Rezultatele intermediare și finale sînt date în tabela 3 și, pentru comparație, reprezentate prin puncte în fig. 6. După cum se vede, datele experimentale verifică bine rezultatele obținute la predeterminare **).

**Tabela 3**

| C (pF) | $\lambda$ | $\varphi^0$ | $U_a$ (V) | $I_{ao}$ (mA) | $\theta^0$ | $P_u$ (W) | $P_a$ (W) | $P_d$ (W) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2070 | 0,812 | 82,03 | 130 | 39.5 | 78,78 | 0,69 | 19,75 | 19.06 |
| 2100 | 0,824 | 81,36 | 135 | 39,5 | 78,78 | 0,75 | 19,75 | 19,00 |
| 2145 | 0,840 | 80,40 | 145 | 39,5 | 78,78 | 0,87 | 19.75 | 18.88 |
| 2200 | 0.862 | 78,53 | 160 | 39,0 | 78,65 | 1,10 | 19,50 | 18,40 |
| 2255 | 0,884 | 76,08 | 190 | 38,0 | 78,43 | 1,60 | 19.00 | 17.40 |
| 2310 | 0,906 | 72.67 | 220 | 37,5 | 78,32 | 2,19 | 18,75 | 16 56 |
| 2370 | 0,929 | 67,12 | 280 | 36,0 | 77,95 | 3,68 | 18,00 | 14,32 |
| 2430 | 0,952 | 57,00 | 330 | 34,0 | 77,47 | 5,19 | 17,00 | 11.81 |
| 2490 | 0.977 | 36.46 | 415 | 30,0 | 76,38 | 8,40 | 15,00 | 6.60 |
| 2550 | 1 | 0 | 455 | 26,0 | 74.95 | 10,35 | 13,00 | 2,65 |
| 2610 | 1,024 | −35,34 | 410 | 30,0 | 76,38 | 8.60 | 15,00 | 6,80 |
| 2670 | 1,050 | −53,57 | 320 | 34,0 | 77,47 | 5,38 | 17,00 | 11.62 |
| 2720 | 1,066 | −62,38 | 280 | 36,0 | 77,95 | 4,18 | 18,00 | 13,82 |
| 2775 | 1,087 | −67,92 | 230 | 38,0 | 78,43 | 2,88 | 19,00 | 16,12 |
| 2830 | 1,110 | −71,83 | 190 | 39,0 | 78,67 | 2,00 | 19,50 | 17,50 |
| 2880 | 1,130 | −74,22 | 170 | 39,5 | 78,78 | 1,63 | 19.75 | 18.12 |
| 2930 | 1,148 | −75,83 | 145 | 40,0 | 78,90 | 1,20 | 20,00 | 18.80 |
| 2980 | 1,170 | −77,37 | 130 | 40,0 | 78,90 | 0,99 | 20,00 | 19,00 |
| 3030 | 1,188 | −78,33 | 120 | 40,5 | 79,00 | 0,85 | 20,25 | 19,40 |

## 8. CONCLUZII

Examinînd curbele din fig. 6, se constată că pe măsură ce circuitul anodic se dezacordează, modulul impedanței, tensiunea anodică alternativă și puterea utilă de înaltă frecvență se micșorează, din cauza caracterului din ce în ce mai reactiv al sarcinii. Pe de altă parte, unghiul de deschidere al curentului anodic rămîne aproape neschimbat (crește numai înălțimea pulsului de curent), iar decalajul pulsului ($\delta$,

*) Condensatorul primar a fost etalonat. Cum frecvența nu s-a schimbat, circuitul secundar a rămas acordat.

**) Diferențele se datoresc neliniarității caracteristicilor tubului, dar mai ales erorilor aparatelor de măsurat.

în raport cu semnalul aplicat pe grilă) este foarte mic. Aceasta se datorește faptului că curentul de placă depinde în special de tensiunea de grilă și mai puțin de tensiunea de placă. Totuși, cu cît $\varphi$ este mai mare, deci $U_a$ mai mic, tensiunile anodice instantanee sînt mai ridicate, pulsurile de curent devin mai înalte ($i_{amax}$ și $I_{ao}$ cresc) și $\theta$ crește ușor; din aceeași cauză, la $\varphi$ mari, curentul anodic nu mai este controlat (determinat) de o tensiune anodică alternativă și pulsul de curent revine în fază cu semnalul ($\delta = 0$ pentru $\varphi = 90^0$).

Metoda propusă permite, după cum s-a arătat, predeterminarea tuturor condițiilor de funcționare ale unui amplificator clasă *C* dezacordat. Fiind bazată pe ipoteze simple, aplicarea ei destul de comodă și dă rezultate pe deplin satisfăcătoare din punct de vedere al preciziei.

*Catedra de Electronică*

Primit la redacție la 25 V 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *T. Tănăsescu*, — Circuite electronice, vol. I, caietul 2, Editura I. P. B., București, 1952, pag. 458-500.
2. *T. Tănăsescu* — Buletinul științific al Academiei R. P. R., seria Matematici-Fizică-Chimie, tom. II. Nr. 4, 1950.
3. *T. Tănăsescu* — Studii și cercetări de fizică, tom. II, Nr. 3—4, 1951, pag. 327.
4. *F. E. Terman* — Radio engineering, McGraw Hill, NewYork, 1947, pag. 374-397.
5. *S. S. Arșinov* — Calculul generatorilor electronici, Editura Energetică de Stat, Moscova 1955.
6. *L. I. Modet, I. H. Neviajski* — Emițătorii radio, Editura de Stat pentru radio, Moscova, 1955, pag. 118-120.
7. *L. E. Dwork* — Proceedings of the I. R. E., Nr. 6, 1950, pag. 637.
8. *S. I. Evtianov* — Electrosviazi, Nr. 4 1956, pag. 17.

## АНАЛИЗ РАБОТЫ РАССТРОЕННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ КЛАССА *C*

### (Краткое содержание)

В статье рассматривается работа усилителей мощности класса *C* при изменении ёмкости контура или частоты сигнала возбуждения. Расчёт производится предполагая линейными характеристики лампы. Показано, что при расстройке анодного контура импульсанодного тока увеличивается, оставаясь симметричным и приведен метод расчёта режима работы лампы-угла отсечки анодного тока, переменного анодного напряжения, полезной и рассеиваемой мощности—при разных расстройках. В заключении приводится пример практического расчёта а также результаты экспериментальной проверки.

# ANALYSE DU FONCTIONNEMENT DES AMPLIFICATEURS CLASSE *C* DÉSACORDÉS

(R é s u m é)

On examine le fonctionnement des amplificateurs classe *C* lorsque la capacité du circuit oscillant ou la fréquence de la tension de grille varient. Le calcul est conduit en considérant linéaires les caractéristiques du tube. On montre qu'au désaccord du circuit anodique, les impulsions du courant de plaque augmentent mais elles restent symétriques. On développe une méthode pour la prédétermination des conditions de fonctionnement: tension anodique alternative, puissance utile et dissipée aux différents désaccords.

La méthode est illustrée par l'exemple d'un calcul pratique suivi par les résultats des vérifications expérimentales.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

# TELECOMUNICAȚII

621.392.1

## LIMITAREA SPECTRULUI DE FRECVENȚE AL SEMNALELOR DE COMUNICAȚII

de Prof. SERGIU CONDREA

### 1. INTRODUCERE

In transmisiunile de comunicații la mare distanță, o problemă deosebit de importantă, din punct de vedere tehnic și economic, este limitarea spectrului de frecvențe utilizat pentru fiecare cale de comunicație (telegrafică, telefonică, fototelegrafică sau de televiziune). Comunicațiile care folosesc o bandă largă de frecvențe necesită echipamente complicate și costisitoare, atît în cazul transmisiunilor pe linii aeriene și în cablu, cît și în cazul transmisiunilor prin radio-relee. Creșterea continuă a numărului de căi de telecomunicații, pe anumite artere, impune utilizarea intensivă a liniilor, prin sisteme de comunicații multiple pe același circuit. Numărul de căi simultane care se pot realiza pe un singur circuit sau pe o singură undă purtătoare de radio-frecvență, nu se poate mări oricît, din cauza dificultăților crescînde pentru transmiterea unui spectru de frecvențe larg, prin întregul lanț de aparate și linii, de la emisia semnalelor, pînă la recepția lor. De aceea, problema limitării spectrului de frecvențe ale diferitelor semnale la strictul necesar, cu alte cuvinte îngustarea benzilor de frecvențe transmise pe fiecare cale, pînă la limita admisibilă, prezintă un aspect practic de mare actualitate.

Din punct de vedere al conținutului comunicației, adică al cantității de informație transmisă, diferitele sisteme de telecomunicații utilizează lățimi de bandă diferite pentru aceeași cantitate de informație. Astfel, o cale telefonică într'un cablu coaxial ocupă o bandă de frecvențe de o lățime de 4 kHz, iar aceeași cale, într-o transmisiune prin radio-relee, cu modulație de frecvență, ocupă un interval de frecvențe de zeci de ori mai mare. Dar aceeași cantitate de semnale inteligibile, adică aceeași cantitate de fraze, poate fi transmisă cu o bandă mult mai îngustă, prin codificarea mesajelor. Pînă în prezent, singura codificare aplicată în practică pentru comunicații verbale o reprezintă telegraful, în care însă informația este emisă și recepționată sub formă de simboluri grafice, în loc de sunete *). O încercare de codificare a vocei s-a făcut prin instalația experimentală denumită VOCODER, cu ajutorul căreia banda de frecvențe necesară unei convorbiri s-a putut reduce la a zecea parte din cea obișnuită (250 Hz în loc de 2500 Hz). Aceasta nu este însă o rezolvare practică, atît din punct de vedere al soluției tehnice, mult

*) In modulația impulsurilor prin cod (MIC), codificarea se aplică semnalelor elementare (impulsuri), nu mesajelor.

prea complicată, cît și din punct de vedere al fidelității de reproducere a vocii, care devine impersonală.

Dacă comparăm eficacitatea sistemului de transmisie telefonic cu cel telegrafic, numai din punct de vedere al cantității de semnale inteligibile transmise, se poate constata superioritatea telegrafului, mulțumită codificării. Intr-o convorbire telefonică obișnuită se transmit în medie 13—14 litere pe secundă. Aceasta înseamnă că pentru fiecare sunet semnificativ al vorbei este necesară în medie o bandă specifică de 2700 : 13,5 = 200 Hz. In telegrafia cu aparate teleimprimatoare aritmice, viteza de transmitere este de 50 baud, adică circa 7 litere pe secundă (litera e formată din 5 impulsuri, plus un start și un stop, deci în total 7 × 7 = 49). Banda de frecvențe ocupată pe o cale telegrafică cu curenți purtători este de 120 Hz. Rezultă că banda specifică pe literă transmisă este 120 : 7 = 17 Hz, adică de circa 12 ori mai îngustă decît în telefonie. Aceasta poate fi o indicație că în telefonie este posibilă o îngustare mai importantă a spectrului de frecvențe.

Limitarea spectrului de frecvențe în telefonia multiplă cu curenți purtători s-a făcut pînă acum prin două mijloace: 1) prin suprimarea unei benzi laterale și a frecvenței purtătoare și 2) prin reducerea lățimii benzii de frecvențe efectiv transmise.

Prima metodă a eliminat frecvențe care nu sînt necesare pentru transportul informației, permițînd suprapunerea pe un singur circuit fizic a unui mare număr de căi telefonice, putînd ajunge pînă la 1860 în cazul circuitelor coaxiale. Calitatea transmisiei nu numai că nu a scăzut dar s-a îmbunătățit, prin suprimarea purtătorului, supus fluctuațiilor de atenuare a liniei.

A doua metodă, folosind filtrele pentru delimitarea unei benzi de frecvențe strict necesare, a urmărit asigurarea unei inteligibilități acceptabile. Astfel, prin măsurători de articulație, cu ajutorul logatomilor, s-a constatat că, în prezența unui nivel normal de perturbații, o bandă de frecvențe vocale cuprinsă între 300 și 2600 Hz, corespunde la o articulație de circa 82 %, adică aproape 90 % pentru inteligibilitatea frazelor. De aceea majoritatea sistemelor de transmisiuni telefonice s-au limitat, pînă acum cîțiva ani, numai la această bandă.

Unele sisteme simplificate au mers mai departe, reducînd banda de frecvențe pînă la intervalul 400 — 2000 Hz, cum sînt sistemele Tfc, iar altele folosesc dispozitive de dublare a numărului căilor normale (în caz de nevoie), prin înjumătățirea benzii la fiecare cale normală, — cum sînt sistemele de 12 căi cu bandă largă.

In ultimii ani însă, s-a urmărit îmbunătățirea calității transmisiunii, atît din punct de vedere al inteligibilității, pentru convorbiri de mare distanță și internaționale, cît și din punct de vedere al naturaleței vocii. Pentru a asigura reproducerea fidelă a timbrului și intonațiilor vorbirii s-a lărgit banda de frecvențe efectiv transmise, pînă la intervalul 300 — 3400 Hz. Noile sisteme cu curenți purtători, cît și noile aparate telefonice se construiesc pentru a transmite această bandă lărgită.

Prin urmare, îngustarea spectrului de frecvențe transmis pe linie, nu s-ar putea face decît cu condiția ca banda inițială să fie reconstituită la recepție. Trebuie reduse, cu alte cuvinte, acele caracteristici

ale semnalului, care nu conțin nici o informație și care introduc frecvențe care nu sînt indispensabile transmisiunii utile.

Vom studia aici două procedee pe care le-am indicat încă din 1928 în unele brevete de invențiuni și anume comprimarea frecvențelor prin înregistrare și prin demultiplicare. Unul din procedeele preconizate în aceste brevete a fost studiat în 1946, într-o formă puțin deosebită, de D. Gabor, în Anglia, care a clădit pe această bază o nouă teorie a comunicațiilor.

## 2. SEMNALE ELEMENTARE CU SPECTRU LIMITAT

Semnalele de telecomunicații, atît cele discrete, cum sînt semnalele telegrafice, cît și cele continui, cum sînt transmisiunile telefonice, pot fi descrise, fie ca funcții de timp $s\ (t)$, fie ca funcții de frecvență $S\ (f)$, prin transformarea Fourier:

$$\left.\begin{aligned} s\ (t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S\ (\omega)\ e^{j\omega t}\ d\omega, \\ S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s\ (t)\ e^{-j\omega t}\ dt. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Atît semnalul ca atare, cît și răspunsul unui sistem de transmisiune la un semnal, pot fi studiate în două moduri diferite: descompunînd semnalul în elemente tranzitorii, cum sînt treptele sau *impulsurile unitate* (funcția Dirac), sau descompunîndu-l în elemente permanente, componentele *sinusoidale*. Dar, atît impulsul unitate, care are o durată infinitezimală și un spectru de întindere infinită, cu amplitudine constantă, cît și unda sinusoidală, care are o durată infinită și un spectru dintr-o linie unică, sînt abstracțiuni, irealizabile în practică. Reale sînt numai impulsurile de o durată finită și semnalele sinusoidale tot de o durată finită.

Ansamblul infinit al semnalelor elementare în care se poate descompune semnalul real, adică diferitele frecvențe sau diferitele impulsuri — reprezentate matematic prin variabile complexe — pot forma două spații Hilbert determinate sau două spații funcționale, dacă elementele se consideră funcții complexe, cu condiția ca pătratele modulelor să fie sumabile, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} S\ (t)\cdot S^*\ (t)\ dt \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cdot S^*\ (\omega)\ dt \quad \text{să fie finite.}$$

In acest caz, transformarea Fourier este o *transformare unitară*, adică lasă invariantă valoarea produsului scalar sau suma pătratelor modulelor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ S_n\ (t)\ |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\ S_n\ (\omega)\ |^2 .$$

Dar, funcțiunile sinusoidale, de durată infinită, și impulsurile elementare, de durată infinit mică, nu sînt mărimi cu pătrate sumabile, deci nu aparțin spațiilor Hilbert.

Problema comprimării benzii de frecvențe a unui semnal, cu conservarea cantității de informație într-un interval dat, apare imposibilă prin această analiză. Spectrul frecvențelor elementare fiind un spectru continuu, este evident incompresibil, căci orice comprimare ar însemna o suprimare a unor frecvențe. De asemenea, șirul nesfîrșit și continuu al impulsurilor elementare este la fel incompresibil, astfel că nici durata semnalului nu poate fi scurtată.

Dar, semnalele reale nu au și nu pot avea decît un spectru de frecvențe limitat, fie de caracteristicile căii (filtre, linie), fie de însăși sensibilitatea limitată a simțurilor noastre. Pentru analiza lor este mai indicat să se folosească semnale elementare finite, adică impulsuri cu durată limitată sau cu bandă de frecvențe limitată.

Astfel este, de exemplu, semnalul elementar, de formă dreptunghiulară în timp, avînd durata $\tau$ și amplitudinea $h$ (fig 1),

$$0 \text{ pentru } t < -\frac{\tau}{2}$$

$$s(t) = h \quad \text{„} \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$$

$$0 \quad \text{„} \quad t > \frac{\tau}{2}$$

Spectrul de frecvență este dat de

$$S(f) = h\,\tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \tag{2}$$

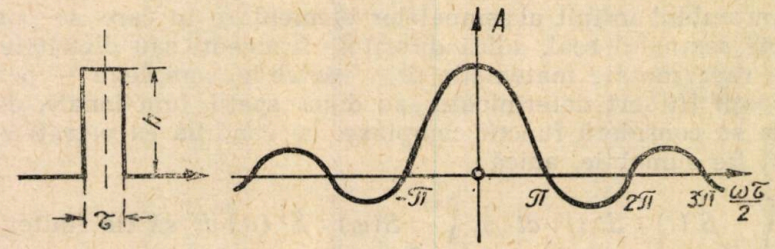



Fig. 1 — Semnal elementar limitat în timp

Invers, un semnal elementar cu spectrul limitat, de lățime $2f_1$ (fig. 2) va avea expresia spectrului de frecvențe

$$S(f) = \frac{1}{2f_1}, \qquad (\text{între } -f_1 \text{ și } +f_1)$$

și a variației în timp

$$s(t) = \frac{\sin 2\pi f_1 t}{2\pi f_1 t} \tag{3}$$

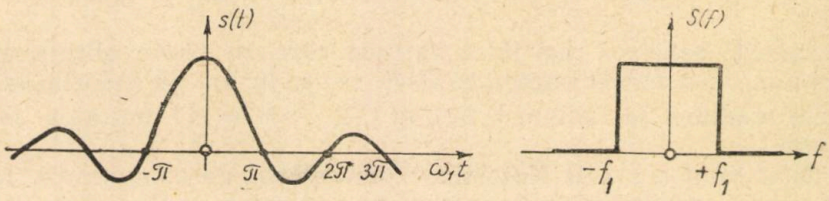



Fig. 2 — Semnal elementar limitat în frecvență.

Printre diferitele forme de impulsuri elementare, există una care are proprietăți interesante: forma în clopot (curba lui Gauss).

Variația acestui impuls în timp se poate scrie:

$$s(t) = e^{-\beta^2 t^2},$$

iar spectrul lui

$$S(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}.$$

Se vede că amîndouă curbele au aceeași formă și sînt deci limitate în timp și în frecvență.

Dacă definim durata efectivă $\Delta t$, ca durata unui impuls echivalent dreptunghiular (avînd aceeași energie și aceeași înălțime maximă), avem (pentru un impuls de tensiune):

$$\Delta t = \frac{1}{U_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dt, \text{ unde } u = e^{-\beta t^2}.$$

Luînd pentru simplificare $U_m = 1$, obținem

$$\Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\beta^2 t^2}\, dt = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{4}$$

Spectrul de frecvențe va fi

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, e^{-\beta^2 t^2}\, dt = U_m\, e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} = e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}.$$

Definind la fel lățimea efectivă $\Delta\omega$ a spectrului, avem:

$$\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2\beta^2}}\, d\omega = \beta\sqrt{2\pi}. \tag{5}$$

Suprafață limitată de aceste două lățimi, în diagrama cu coordonate frecvență-timp ($f$, $t$), este o constantă și reprezintă cantitatea de informație dusă de semnal:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = \pi \text{ sau } \Delta t \cdot \Delta f = 0{,}5 \cdot \tag{6}$$

Aceasta este cea mai mică valoare care se poate obține pentru un impuls de o formă oarecare. Dacă se ia, în loc de valorile eficace, valorile maxime, se obține $\sqrt{2}\,\Delta t \cdot \sqrt{2}\,\Delta f = 1$, unitatea de informație.

După cum a arătat Kotelnicov, un semnal de comunicații, limitat în frecvență, se poate reprezenta print-o succesiune de ordonate echidistante în timp ale curbei oscilografice (forma de undă) sau printr-un spectru discret ori continuu de frecvențe cu bandă limitată.

Notînd frecvența maximă transmisă cu $F$ și timpul cît durează semnalul cu $T$, numărul de componente (impulsuri elementare) care se succed în acest interval va fi $n = 2\,F\,T$, astfel ca pe lungimea de undă cea mai scurtă să încapă cel puțin două ordonate echidistante. Expresia unui semnal periodic în aceste condiții este

$$s\,(t) = \sum_{n=1}^{2FT} s\,(t_n)\,\frac{\sin \pi\,(2\,F\,t - n)}{\pi\,(2\,F\,t - n)}, \tag{7}$$

iar pentru un semnal neperiodic, trecînd la limită ($T$ și $n \to \infty$),

$$s\,(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} s\,(t_n)\,\frac{\sin \pi\,(2\,F\,t - n)}{\pi\,(2\,F\,t - n)}. \tag{8}$$

Această sumă cuprinde un ansamblu de funcțiuni cu pătrat sumabil, deci se poate considera ca un ansamblu de «vectori» într-un spațiu cu $n = F\,T$ dimensiuni (7) sau un spațiu Hilbert (8). Funcțiile respective fiind cu pătrat sumabil și în particular ortogonale se pot *transforma unitar* în alt spațiu.

Intr-adevăr

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi\,(2\,F\,t - m)}{\pi\,(2\,F\,t - m)} \cdot \frac{\sin \pi\,(2\,F\,t - n)}{\pi\,(2\,F\,t - n)}\,.\,dt = \delta_{mn},$$

unde

$$\delta_{mn} = \begin{matrix} 0 \text{ pentru } m \neq n \\ 1 \text{ pentru } m = n. \end{matrix}$$

Transformarea unitară lasă invariantă «distanța» între două semnale elementare, reprezentate prin cîte un «punct» în spațiul original (Hilbert sau cu număr finit de dimensiuni), cînd se trece în alt spațiu, cu un număr mai redus de dimensiuni. Prin urmare, semnalele rămîn distincte și separate și deci cantitatea de informație nu se schimbă, dacă facem o transformare unitară, cu reducerea numărului

de semnale elementare. Aceasta ne dă o indicaţie că, printr-o astfel de interpretare, apare posibilă comprimarea frecvenţelor sau a duratei, cu conservarea conţinutului şi vitezei de informare.

Posibilitatea de comprimare rezultă din însăşi natura semnalului real cu spectru limitat. Acesta fiind echivalent cu o succesiune de impulsuri (amplitudini) echidistante, extrase din forma de undă, este evident că se poate comprima în timp, pînă la limita de coincidenţă, cu condiţia ca la recepţie să fie dilatate la loc.

La fel, dacă spectrul semnalului cu bandă limitată este discret, (ceea ce este totdeauna, cel puţin din cauza imperfecţiunii simţurilor noastre), se poate comprima banda spectrului pînă la limita de coincidenţă a liniilor spectrale cele mai apropiate.

Pentru stabilirea procedeului de comprimare, trebuie alese semnalele elementare cele mai potrivite unui anumit gen de comunicaţii. In cazul telefoniei multiple prin radio-relee, semnalele elementare sînt impulsuri de scurtă durată (o fracţiune de microsecundă), repetate la intervale de 150 $\mu$ *s*. Impulsul elementar trebuie să îndeplinească două condiţii:

*a)* să aibă un interval de repetiţie suficient de scurt, pentru a putea caracteriza cel mai scurt semnal sau perioadă din semnal;

*b)* să fie perfect determinat printr-un minim de caracteristici. In telefonia prin impulsuri, frecvenţa de repetiţie este cel puţin $2F$, iar impulsurile sînt caracterizate prin amplitudinea lor, frecvenţa de repetiţie şi faza lor.

Cele două condiţii ale semnalelor elementare pot fi satisfăcute şi de alte semnale în afară de impulsuri.

### 3 COMPRIMAREA BENZII DE FRECVENŢE A CĂILOR TELEFONICE

Bazat pe imperfecţiunea perceperii auditive, care nu poate distinge toate nuanţele conţinute în sunetele vocale şi pe faptul că parte din componentele vibraţiilor vocale nu sînt esenţiale pentru înţelegerea vorbirii, iar altele se epetă cu oarecare regularitate, am propus în 1928 cîteva procedee de economisirea spectrului de frecvenţe, prin comprimarea lui la emisie şi dilatarea lui la recepţie.

Vom examina aci două din aceste procedee: *a)* înregistrarea şi reproducerea semnalului cu viteze diferite şi *b)* demultiplicarea şi remultiplicarea frecvenţelor.

a. *Procedeul de înregistrare şi reproducere a semnalelor cu viteze diferite* a fost utilizat recent pentru realizarea unui sistem de telefonie multiplă prin radio-relee. Acest sistem, denumit «cu modulaţie de conversiune în timp» (*T C M*), foloseşte însă procedeul în sens invers, adică pentru *mărirea benzii de frecvenţe*, prin comprimarea fragmentelor succesive ale vorbirii, în impulsuri mai scurte. Prin aceasta se creează intervale între fragmentele comprimate în timp şi se pot intercala acolo alte căi de convorbire. La recepţie se procedează la comprimarea benzii de frecvenţe, adică «dilatarea» în timp a impulsurilor pînă la reconstituirea fragmentelor originale. Sistemul acesta ar prezenta serioase avantaje în ceeace priveşte economia de frecvenţe, raportul semnal/perturbaţie şi putere minimă la recepţie *).

*) „Annales de Télécommunications", (Febr. 1950).

Procedeul invers, de *comprimare a benzii de frecvenţe*, este destinat realizării unui cît mai mare număr de căi telefonice, într-un interval dat de frecvenţe, pentru transmisiunile pe fire sau pe unde herţiene.

Pentru obţinerea înregistrării şi reproducerii cu viteze diferite se pot utiliza dispozitive electronice, ca în televiziune, sau dispozitive electromagnetice, ca în tehnica audiofrecvenţei. Vom examina aci în principiu dispozitivul de înregistrare magnetică, din punct de vedere al calităţii transmisiunii.

O bandă de magnetofon circulară se roteşte cu o viteză liniară $V$ n faţa capului electromagnetic înregistrator $C$ (fig. 3). După o rotaţie completă, înregistrarea magnetică este «ştearsă» de electromagnetul $E$ şi banda primeşte în continuare o nouă imprimare. Astfel, convorbirea este imprimată continuu pe banda circulară, în fragmente de durată egală cu parcursul unei circumferinţe.

Această imprimare este culeasă de un cap reproductor (doză electromagnetică), care se roteşte în interiorul cercului, în acelaşi sens cu rotaţia benzii de magnetofon, dar cu o viteză mai mică $v$. Viteza relativă între capul reproductor şi bandă este deci $V - v = u$, astfel că toate frecvenţele culese vor fi reduse în raportul $u/V$. De exemplu dacă $v = 0{,}75\ V$, vom avea $u/V = 1/4$ şi toate frecvenţele culese vor fi reduse la un sfert. Banda de frecvenţe naturale, cuprinsă de pildă între 200 şi 3200 Hz, (lăţime 3000 Hz) se va reduce la 50... 800 Hz (lăţime 750 Hz).

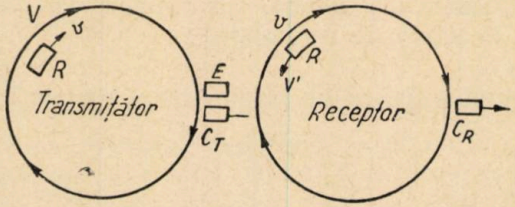



Fig. 3 — Schema convertorului de frecvenţe.

Această bandă îngustată se transmite pe linie, iar la recepţie se operează dilatarea ei printr-un dispozitiv invers. O bandă de magnetofon circulară se roteşte cu viteza $v$ în faţa unui cap înregistrator de recepţie. In interiorul cercului se roteşte, în sens invers cu banda, un cap reproductor de recepţie, cu viteza $V'$ astfel ca

$$\frac{V - v}{V} = \frac{v}{V' + v}.$$

Pentru exemplul precedent, $V'$ trebuie să fie egal cu $3\ v$, adică $V' = 3 \times 0{,}75\ V = 2{,}25\ V$. în acest caz, frecvenţele se vor multiplica cu 4 şi banda se va dilata de la 750 la 3000 Hz.

Să analizăm acest dublu proces de transformare. Notăm cu $x$ deplasarea benzii de magnetofon, la emisie, adică drumul parcurs de fiecare semnal înregistrat. Aceasta defineşte totodată şi cantitatea de

informaţie $H = x$ care se înregistrează în continuu pe bandă, cu viteza de înregistrare $V$, care reprezintă cantitatea de informaţie debitată pe secundă. Parcursul unei circunferinţe durează $\tau$, cît se imprimă un fragment corespunzător de semnal.

Acest fragment este explorat cu o viteză relativă $u < V$, de exemplu $u = V/2$. Această explorare, este reprezentată în graficul din fig. 4.

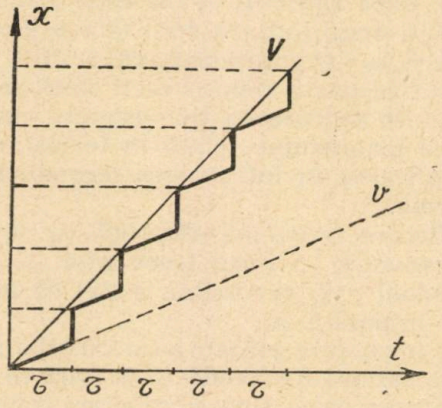



Fig. 4 — Graficul explorării semnalului la emisie.

Fiecare fragment explorat reprezintă un impuls de durată $\tau$ şi formă $f(t)$. Aceste impulsuri se repetă periodic cu perioada $\tau$, astfel că avem $f(t + n\tau)$. Dezvoltarea Fourier ne va da un spectru discret conform seriei

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{j 2\pi n \frac{t}{\tau}}$$

Amplitudinea armonicei $n$ va fi

$$C_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s(t) e^{-j 2\pi n \frac{t}{\tau}} dt .$$

In intervalul $\tau$ semnalul explorat cu viteza relativă $u < V$ suferă o comprimare a frecvenţelor în raportul $u/V = k$. Presupunînd că avem un semnal sinusoidal, de frecvenţa unghiulară $\omega_1$, rezultatul vă fi — în intervalul $\tau$ — tot un semnal sinusoidal, de frecvenţă redusă $\omega_r = k\omega_1$. Putem scrie deci, pentru amplitudinea armonicei $n$,

$$C_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \sin \omega_r t \cdot e^{-j 2\pi n \frac{t}{\tau}} \cdot dt = j(-1)^{n+1} \frac{4\pi \frac{n}{\tau^2}}{\omega_r^2 - \left(2\pi \frac{n}{\tau}\right)^2} \sin \omega_r \frac{\tau}{2}$$

Modulul acestei mărimi va fi, dacă notăm $\Omega = 2\pi/\tau$,

$$\left| C_n \right| = \frac{1}{n\pi} \left| \frac{n^2 \Omega^2}{\omega_1^2 - n^2 \Omega^2} \sin \omega_r \frac{\tau}{2} \right| = \frac{1}{n\pi} \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_r}{n\Omega}\right)^2} \sin \pi \frac{\omega_r}{\Omega} \right| . \quad (9)$$

Se vede din această expresie că spectrul va conține numai o singură frecvență ($\omega_r$), dacă raportul $\omega_r / \Omega$ este număr întreg, toate celelalte armonice avînd amplitudinea zero ($\sin n\pi = 0$).

Pentru un raport $\omega_r / \Omega$ fracționar, va rezulta un spectru întins de frecvențe. Aceasta se poate reduce mult dacă se transformă explorarea tip «ferăstrău», în explorarea tip «clopot», de exemplu prin utilizarea unei benzi de magnetofon tăiată în forma unei curbe de clopot alungită sau prin aplicarea în înfășurarea reproductorului, a unei tensiuni de aceeași formă.

Prin aceasta, fiecare frecvență discretă $\omega_1$ se transformă într-o bandă îngustă de frecvențe în jurul frecvenței $\omega_r$, care este redusă în raportul $k$. Procedeul este reversibil, astfel că la recepție se obține banda de frecvențe inițială $\Sigma\, \omega_1$.

Din relatația de incompresibilitate a informației pure ($\Delta f . \Delta t = \text{const.}$), rezultă că reducerea lățimii de bandă $\Delta f$, fără o sporire proporțională a duratei $\Delta t$, atrage după sine o reducere corespunzătoare a unui fragment din informație.

Dar, omiterea unei porțiuni din informația conținută în mesajul original, poate fi *neesențială pentru inteligibilitate*. După cum se știe, limba vorbită are o anumită «redondanță», adică o proporție însemnată de sunete repetate, care nu adaugă nimic la înțelesul frazelor.

Dacă reducerea benzii de frecvențe se face pe seama acestei redondanțe, teoretic nu se pierde nimic din conținutul de informație.

Dar, semnalul vocal mai are și o redondanță internă, de natură fizică, datorită caracterului întreținut al oscilațiilor componente. Cele mai scurte sunete semnificative din vorbire (consoanele explozive) durează circa 10 ms. Circuitele electronice utilizate în telecomunicații pot detecta și identifica semnale mult mai scurte. De aceea, semnalul poate fi comprimat în timp sau în frecvență, pe seama acestei redondanțe fizice.

In procedeul de comprimare descris, semnalele elementare, în loc de impulsuri echidistante, sînt fragmente scurte, extrase ca «mostre» din sunetul complex. Este un fel de «cuantificare» a semnalului, prin care se iau, în loc de trepte din amplitudine, trepte din sunete, fiecare treaptă avînd o anumită putere medie $P_0$ și un anumit spectru $\delta_0$, constant în intervalul $\Delta t_0$. Cele două condiții ale semnalului elementar sînt îndeplinite: *a)* intervalul de repetiție este $\Delta t_0 / r$, unde $\Delta t_0 \approx 10$ ms. pentru telefonie, iar $r$ este raportul de comprimare, număr întreg mai mare sau egal cu 2; *b)* fragmentele sînt caracterizate prin puterea medie și prin spectrul de frecvențe.

Culegerea fragmentelor și explorarea lor cu viteze diferite, introduc frecvențe străine în semnal, care produc distorsiuni grave. Evitarea acestor distorsiuni și eliminarea frecvențelor străine se poate obține prin translația benzii de frecvențe a semnalului și alegerea unei anu-

mite frecvenţe de explorare. Banda iniţială a semnalului, cuprinsă între $\omega_1$ şi $\omega_2$, se transpune, cu ajutorul frecvenţei purtătoare $\omega_p$, în intervalul $(\omega_p + \omega_1) \ldots (\omega_p + \omega_2)$. In această formă semnalul se înregistrează, de exemplu prin dispozitivele utilizate în televiziune, şi se explorează cu o frecvenţă unghiulară $\Omega = 2\,\pi/\tau$.

Semnalul astfel convertit reprezintă o serie de fragmente de durată $\tau$, cu frecvenţele reduse $\omega_r$, formînd un ansamblu de oscilaţii modulate în fază, cu o undă rectangulară. Expresia lui se poate scrie

$$s_c(t) = \sum A_n\,[\omega_{rn}\,t + \pi\,(t)], \qquad (10)$$

unde $A_n$ şi $\omega_{rn}$ sînt amplitudinile şi frecvenţele diferitelor componente $(n)$ ale semnalului convertit $(r)$, iar $\pi\,(t)$ este unda rectangulară care modulează faza fiecărei componente, avînd expresia cunoscută

$$\pi\,(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin \Omega\,t + \frac{1}{3}\sin 3\,\Omega\,t + \frac{1}{5}\sin 5\,\Omega\,t + \cdots\right).$$

Dacă se alege $\Omega$ astfel ca

$$\Omega > \omega_2 - \omega_1 \text{ şi } \Omega \ll \omega_p + \omega_1,$$

ωe poate obţine o convertire fără distorsiuni şi omisiuni. Semnalul consertit va conţine, pe lîngă frecvenţele reduse $\omega_r$ (cuprinse între $(\omega_p + v_1)\,k$ şi $(\omega_p + \omega_2)\,k$), şi frecvenţele de explorare $\omega_r \pm (2\,n + 1)\,\Omega$. Acestea pot fi însă eliminate printr-un filtru de bandă, deoarece sînt în afara spectrului util.

La recepţie, explorarea realizează o dilatare a spectrului de frecvenţe primit şi totodată o modulaţie de fază rectangulară. Procedînd ca la emisie, se pot suprima şi aci, prin filtrare, frecvenţele parazite de explorare, rămînînd numai banda utilă, care se demodulează şi ne dă semnalul $\omega_1 .., \omega_2$.

*b. Comprimarea benzii prin demultiplicare.* Banda de frecvenţe efectiv transmisă se poate reduce în raportul $1/n$, printr-un procedeu de demultiplicare a frecvenţelor. La recepţie, semnalul original este reconstituit prin multiplicarea frecvenţelor primite.

Un procedeu simplu pentru obţinerea demultiplicării frecvenţelor, în raportul 1/2, este arătat în schema din fig. 5.

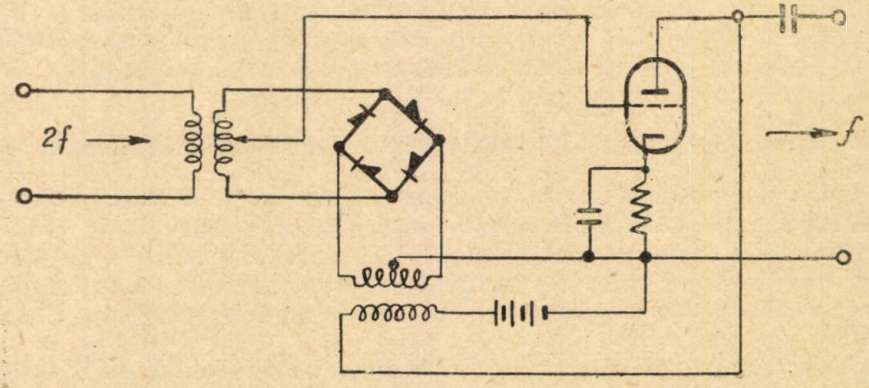



Fig. 5 — Schema modulatorului cu reacţie.

O bandă de frecvențe laterale, obținută prin modulație într-un sistem cu curenți purtători, are o lățime relativă $\Delta f/f_m$, mai mică decît banda relativă vocală. Una dintre frecvențele cuprinse în banda laterală, de exemplu $2f$, intră în modulatorul cu reacție, unde se combină cu o frecvență redusă $f$ și dă naștere, între alte produse de modulație, și la frecvența diferență, $2f - f = f$, care se întreține prin reacție.

Celelalte frecvențe $2f_n$, din banda $2f_1 \ldots 2f_2$, se demultiplică la fel și se obține la ieșire banda redusă la jumătate, care se extrage cu ajutorul unui filtru. Frecvențele reduse $f_n$ apar inițial prin șocul electric al semnalului.

La recepție, un montaj analog ne dă banda de frecvențe dublată, care se separă print-un filtru și reproduce astfel semnalul original, cu condiția ca $f_1 > 2\,(f_2 - f_1)$.

Prin utilizarea în calea reacției a unui generator de armonice, se obține între altele și frecvența $(n - 1)\,f/n$, care se combină în modulator cu frecvența $f$ a semnalului,, obținîndu-se astfel diferența $f/n$, adică banda redusă în raportul $n$.

Demultiplicarea sau multiplicarea frecvențelor semnalului se poate exprima matematic printr-un operator de forma $e^{jk\omega t}$. Intr-adevăr, fie $f(t)$ un semnal oarecare. Semnalul convertit va fi

$$f_k(t) = e^{-jk\omega t} \cdot f(t) .$$

Spectrul de frecvențe al semnalului original este

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt ,$$

iar al semnalului convertit cu operatorul $e^{-jk\omega t}$ va fi

$$S_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j(k+1)\omega t}\, dt = S\,[(k+1)\,\omega]. \qquad (11)$$

Pentru $k > 0$, avem multiplicare de frecvențe în raportul $(k+1)$, iar pentru $k < 0$, demultiplicare de frecvențe în raportul $(1 - k)$.

Procedeul produce distorsiuni, deoarece $k$ nu este determinat, astfel că poate da naștere la frecvențe nedorite în banda utilă.

## 4. COMPRIMAREA BENZII DE FRECVENȚE IN PREZENȚA PERTURBAȚIILOR

Pînă aici s-a considerat că transmisiunea se face fără perturbații exterioare, iar distorsiunile provin numai din mecanismul de reducere a frecvențelor. Dar, în transmisiunile reale nu se poate neglija prezența unui anumit nivel de perturbație, oricît de scăzut s-ar considera. In acest caz, problema cantității de informație transmisă capătă un alt aspect.

Descompunerea semnalului în fragmente, cu banda de frecvențe limitată, reprezintă o cuantificare, în limitele de sensibilitate ale re-

ceptorului şi urechii. După cum s'a arătat, este suficient un număr limitat **s** de "mostre" diferite pentru determinarea formei semnalului.

Dacă însemnăm cu **n** numărul de semnale elementare pe secundă, cantitatea de informaţie debitată în timpul $t$ va fi

$$H = \log_2 s^{nt} = nt \log_2 s, \text{ în unităţi binare.}$$

Pentru a avea o transmisiune nedistorsionată, numărul de elemente pe secundă **n** trebuie să fie egal cu cel puţin de două ori inversul duratei celui mai scurt semnal semnificativ, $\triangle t_0$. Dacă se consideră drept cel mai scurt semnal semnificativ fragmentul minim omogen (de oscilaţie periodică) care se întîlneşte în semnal, **n** va fi egal cu $2/\triangle t_0$. Se poate scrie $n_0 = 2 f_0$, notînd prin $f_0$ frecvenţa de repetiţie a duratei $\triangle t_0$. (In cazul telefoniei $\triangle t_0 \approx 10$ ms).

Expresia cantităţii de informaţie devine

$$H = 2 f_0 t \log s \ .$$

O transmisiune reală cuprinde însă, pe lîngă amplitudinile variabile ale semnalului, şi amplitudinele variabile ale perturbaţiilor (zgomote parazite sau diafonii, în cazul telefoniei).

Pentru ca semnalul să fie mascat de perturbaţie, trebuie ca diferenţa minimă între două niveluri succesive de semnal, adică între amplitudinile de tensiune sau curent a două semnale elementare, să fie cel puţin $\sqrt{P}$, $P$ fiind puterea maximă probabilă a perturbaţiei produsă de "zgomotul alb". In acest caz, numărul total de gradaţii diferite care se pot distinge va fi $s = \sqrt{(S + P)/P} = \sqrt{1 + S/P}$, unde $S$ este puterea medie a semnalului.

Cantitatea de informaţie care se poate recepţiona va fi

$$H = 2 f_0 t. \log_2 \sqrt{(1 + \frac{S}{P})} . = f_0 t \log (1 + \frac{S}{P}). \qquad (12)$$

Dacă s-ar reduce în raportul $r$ frecvenţa de repetiţie $f_0$, s-ar obţine o cantitate de informaţie redusă în acelaşi raport:

$$H' = \frac{f_0}{r} t \log \left(1 + \frac{S}{P}\right)$$

In cazul descris însă, numărul de diviziuni pe secundă (fragmente omogene) rămîne acelaşi, $n_0 = 2 f_0 = \text{const.}$, astfel încît cantitatea de informaţie se conservă. Rămîne bineînţeles distorsiunea datorită cuantificării, prin care se poate reduce numărul de valori distincte. Valoarea maximă a acestei reduceri este $r$, astfel că numărul de gradaţii devine

$$\frac{s}{r} = \frac{1}{r} + \frac{S}{rP}.$$

Cantitatea de informaţie s-ar reduce deci cu $\log r$ Este evident că putem obţine $(1 + S/P)^{1/r} \ll (1 + S/P)/r$, adică o pierdere de

informaţie mult mai redusă prin procedeul de conversiune a frecvenţelor, decît prin îngustarea benzii de frecvenţe cu ajutorul filtrelor.

Procedeele descrise de compresiune a frecvenţelor, cum şi altele de acest gen (4), (5), (6), propuse ulterior, comportă însă numeroase probleme de realizare, care necesită încă o vastă muncă de laborator, care nu poate fi lipsită de surprize.

*Catedra de telefonie şi telegrafie*

Primit la redacţie la 20 IV 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *Harkevici, A. A.* — Spectri i analiz, GITTL, Moscova, 1952.
2. *Gabor, D.,* — Theory of Communications, JIEE, Part. III. 1946.
3. *Condrea, S.,* — Perfectionnements aux systèmes de télécommunications, Brevet R. F. Paris. nr. 651, 684—1928.
4. *Sandemann, R. O. Carter* — Electric Signalling System. Brit. Pat. No. 327.709—1930.
5. *Marcou P.,* — Compresion de fréquences — La Cybernétique Paris—1951.
6. *Fischer F. A.* — Verfahren zur Nachrichtenübertragung unter Anwendung einer Frequenzbandverengung. Patent RFG Nr. 872544, 1951.
7. *Miller, R. L.,* — Fractional frequency generators utilizing regenerative modulation. Proc. I. R. E. nr. 7, 1939.

## ОГРАНИЧЕНИЕ ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА СИГНАЛОВ СООБЩЕНИЯ

(Краткое содержание)

Уменьшение частотного диапазона можно достигнуть двумя путями: сокращением краевых частей или сжатием частотного диапазона сигнала.

Рассматриваются сигналы с ограниченным спектром и их преобразование.

Описываются два способа сокращения диапазона в телефонных линиях: регистровкой и воспроизведением с различными скоростями и демультипликации частот.

Определяется наконец эффект помех на эти сокращения и приводится вывод, что сокращением возможно достигнуть лучшей передачи речи, чем сокращением фракции диапазона.

## LIMITATION DU SPECTRE DE FRÉQUENCES DES SIGNAUX DE COMMUNICATION

(Résumé)

La réduction de la bande des fréquences transmises peut être obtenue par deux méthodes : suppression des parties marginales, ou compression de la bande des fréquences du signal.

On étudie les signaux à spectre limité et leur transformation.

On examine deux procédés de compression de la bande dans les voies téléphoniques : par enregistrement et reproduction à vitesses différentes et par démultiplication des fréquences.

On détermine ensuite l'effet des perturbations sur ces compressions, en concluant qu'on peut obtenir une meilleure transmission de la parole par compression, que par suppression d'une fraction de la bande.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.392.5

# SINTEZA FUNCŢIILOR DE TRANSFER R. C.

de CR. VASILIU

Prin extinderea domeniului de utilizare a reţelelor electrice la frecvenţe foarte joase ca, spre exemplu, la servomecanisme, unde inductanţele necesare ar căpăta dimensiuni inadmisibile sau acolo unde, din diferite motive, se caută evitarea acestor inductanţe, proiectarea de reţele *R. C.* cu caracteristici de transfer prescrise a devenit, în ultimii cîţiva ani, de o deosebită importanţă.

Datorită restricţiilor suplimentare impuse funcţiilor de transfer ca acestea să poată fi sintetizate sub forma de reţele care să cuprindă numai rezistenţe şi capacităţi, proiectarea acestui gen de reţele nu a căpătat încă o conturare definitivă. Se fac eforturi în scopul micşorării numărului de elemente necesare pentru sintetizarea unei funcţiuni de grad dat al măririi constantei de multiplicare (micşorarea atenuării constante) şi al găsirii structurii celei mai potrivite etc.

In proiectarea unei reţele *R. C.* care să aibă o caracteristică de transfer prescrisă apar trei etape:

*a.* Cunoaşterea condiţiilor pe care trebuie să le îndeplinească funcţia $F(\lambda)$ pentru a putea fi realizată sub forma unei reţele *R. C.* pasive.

*b.* Modalitatea de a găsi o funcţie care, îndeplinind aceste condiţii, să aproximeze arbitar de bine caracteristica dorită.

*c.* Realizarea funcţiei de transfer astfel găsită sub forma unei reţele *R. C.* (sinteza).

## 1. PROPRIETĂŢILE REŢELELOR R. C.

Toate mărimile (parametrii primari) care definesc proprietăţile unei reţele cu constante concentrate sînt funcţii raţionale, cu coeficienţi reali, de variabila complexă $\lambda = \sigma + j\omega$, adică apar ca raportul a două polinoane. Dacă se pun în evidenţă rădăcinile acestor polinoame, expresia generală a acestor mărimi este dată de funcţia:

$$F(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = k\,\frac{(\lambda-\varrho_1)(\lambda-\varrho_2)\cdots(\lambda-\varrho_m)}{(\lambda-\eta_1)(\lambda-\eta_2)\cdots(\lambda-\eta_n)} \quad \ldots \quad (1)$$

Cu alte cuvinte, cu excepţia unei constante de multiplicare, aceste mărimi sînt univoc determinate de polii şi zerourile funcţiei $F(\lambda)$.

Pentru impedanţa unui dipol *R. C.*, zerourile şi polii sînt reali, negativi, simpli şi alternaţi (un pol urmează un zero şi invers), iar

gradul numitorului este fie egal. fie cu o unitate mai mare decît cel al numărătorului, adică vom avea:

$$Z(\lambda)=k\,\frac{(\lambda+\varrho_1)\,(\lambda+\varrho_2)\cdots(\lambda+\varrho_m)}{(\lambda+\eta_1)\,(\lambda+\eta_2)\cdots(\lambda+\eta_n)} \quad \ldots \quad (2)$$

cu

$$O \leq \eta_1 < \varrho_1 < \eta_2 < \varrho_2 \cdots < \varrho_m < \eta_n \quad \ldots \quad (3)$$

şi $n = m$ sau $n = m + 1$, $k$ fiind o constantă arbitrară, reală şi pozitivă. Distribuţia zerourilor ($o$) şi a polilor ($x$) în planul variabilei de frecvenţă complexă va avea aspectul din f g. 1.

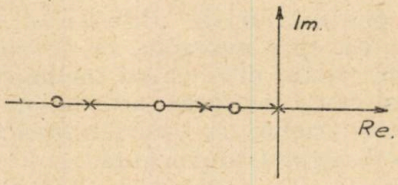



Fig. 1

De reţinut că cea mai mică frecvenţă critică este totdeauna un pol (nu neapărat în origine).

Pentru a găsi reţeaua cu impedanţa de intrare Z ($\lambda$), se dezvoltă funcţia dată în fracţii parţiale, punîndu-se în evidenţă reziduurile funcţiei relative la fiecare pol:

$$Z(\lambda)=\frac{h^{(o)}}{\lambda}+\sum_{S=1}^{n}\frac{h^{(S)}}{\lambda+\eta^{(S)}}+h(\infty) \quad \ldots \quad (4)$$

sau, în cazul admitanţei,

$$Y(\lambda)=1/Z(\lambda)=g^{(o)}+\lambda\sum_{S=1}^{m}\frac{g^{(S)}}{\lambda+\varrho^{(S)}}+g^{(\infty)}\lambda \quad \ldots \quad (5)$$

unde toţi $g$ şi $h$, dacă există, sînt pozitivi. Formarea dipoliloı corespunzători (fig. 2 şi 3) este atunci evidentă.

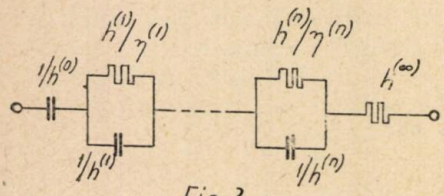


Fig. 2

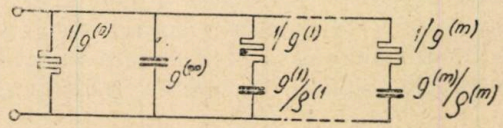


Fig. 3

O altă structură des utilizată la sinteza funcţiilor de transfer este aceea în scară. Scriind pe Z ($\lambda$) sub forma:

$$Z(\lambda)=\frac{a_p\lambda^p+a_{p-1}\lambda^{p-1}+\cdots+a_0}{b_p\lambda^p+b_{p-1}\lambda^{p-1}+\cdots+b_0} \quad \ldots \quad (6)$$

și dezvoltînd-o în fracție continuă, se obține:

$$Z(\lambda) = R_1 + \cfrac{1}{C_1\lambda + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{C_2\lambda + \cdots + \cfrac{1}{C_p\lambda + \cfrac{1}{R_{p+1}}}}}} \quad \ldots \quad (7)$$

unde $R_1 = \frac{a_p}{b_p}$. Dipolul corespunzător este cel din fig. 4.

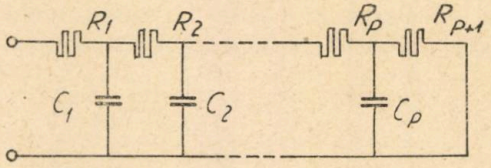



*Fig. 4*

Dar funcția Z (λ) se poate dezvolta și de la stînga la dreapta Punînd:

$$\frac{1}{Z(\lambda)} = \frac{b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_p\lambda^p}{a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_p\lambda^p} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

se obține

$$\frac{1}{Z(\lambda)} = g_1 + \cfrac{1}{s_1\lambda^{-1} + \cfrac{1}{g_2 + \cfrac{1}{s_2\lambda^{-1} + \cdots + \cfrac{1}{s_p\lambda^{-1} + \cfrac{1}{g_{p+1}}}}}} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

cu $g_1 = \frac{a_0}{b_0}$. Acestei desvoltări îi corespunde rețeaua în scară din fig. 5

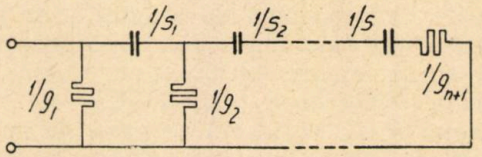



*Fig. 5*

In ceeace privește funcțiile de transfer, acestea se realizează sub torma de cuadripoli, la care raportul între tensiunea la ieșire $E_2$ către fensiunea la intrare $E_1$ dă tocmai funcția dorită.

Pentru ca o funcție rațională de variabila de frecvență complexă $\lambda$:

$$F(\lambda) = \frac{E_2}{E_1} = k\,\frac{a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda^m}{b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n} \quad \ldots \quad (10)$$

să fie funcția de transfer a unui cuadripol *R. C.* pasiv, este necesar. și suficient să aibă polii reali, negativi și simpli, iar gradul numitorului să fie sau egal, sau mai mare decît cel al numărătorului ($n \geq m$), $K$ fiind o constantă reală a cărei valoare nu întrece o anumită limită. Asupra zerourilor nu există nicio restricție, afară de aceia, specifică oricărei funcții raționale cu coeficienți reali, ca zerourile complexe, atunci cînd există, să apară în valori complex conjugate. Pozițiile tipice posibile ale zerourilor și polilor unei funcții de transfer sînt arătate în fig. 6,

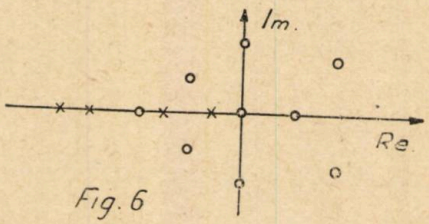


Fig. 6

## 2. POSIBILITĂȚILE DE REALIZARE A UNOR CARACTERISTICI DATE

Abstracție făcînd de un factor de multiplicare constant (o atenuare constantă la toate frecvențele), modulul unei caracteristici de transfer dorite care poate apare în legătură cu problemele practice, poate fi aproximată în mod arbitrar de bine cu ajutorul unei rețele liniare *R. C.* pasive, adică se poate găsi totdeauna o funcție de transfer *R. C.*, care îndeplinește condițiile de realizabilitate fizică de mai sus și care, sintetizată sub forma unui cuadripol *R. C.* pasiv, să ne dea o caracteristică de atenuare care să se apropie cît de mult dorim de modulul caracteristicii dorite.

In ceeace privește caracteristica de fază, problema nu mai este atît de bine precizată. Se poate, bine înțeles, totdeauna obține faza minimă asociată unei caracteristici de atenuare, se pot obține și cuadripoli *R. C.* corectori de fază (cu o atenuare constantă la toate frecvențele), dar încă nu se cunosc limitările. dacă sînt, în obținerea unei caracteristici de fază dorite cu o rețea *R. C.*

Structura rețelei *R. C.* rezultată depinde de specificul funcției de transfer considerate (subclasa căreia aparține) și de metoda de sintetizare utilizată. Ea poate fi echilibrată sau nu, simetrică sau nesimetrică, în scară etc. Funcția de transfer, pe de altă parte, poate fi definită să reprezinte raportul mărimilor electrice pentru cazul cuadripolului lucrînd în gol, terminat pe rezistențe, pe sarcină *R. C.* etc.

### 3. SINTEZA FUNCȚIILOR DE TRANSFER R. C. CU ZEROURI NUMAI PE SEMIAXA REALĂ NEGATIVĂ

Dacă funcția de transfer care trebuie sintetizată are zerouri numai pe semiaxa reală negativă (inclusiv originea și infinitul) atunci ea se poate totdeauna sintetiza sub forma unui singur cuadripol *R. C.* în scară. Fie ecuațiile cuadripolului în funcție de admitanțe:

$$I_1 = Y_{11} E_1 + Y_{12} E_2 \; ; \quad I_2 = Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2 \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Dacă terminăm cuadripolul pe o sarcină de un ohm, atunci $I_2 = -E_2$ și deci

$$F(\gamma) = \frac{I_2}{E_1} = -\frac{E_2}{E_1} = \frac{Y_{12}}{1 + Y_{22}} \quad . \; . \; . \quad (12)$$

$Y_{22}$ este un dipol R. C. pe care-l putem realiza. Dacă în același timp realizăm și admitanța de transfer de scurtcircuit $Y_{12}$, sinteza funcției de transfer este îndeplinită. Pentru aceasta facem ca polii lui $Y_{12}$ să fie identici cu polii lui $Y_{22}$, adică odată cu realizarea lui $Y_{22}$ să fie realizați și polii lui $Y_{12}$. In sinteza lui $Y_{22}$ trebuie să mai ținem seamă de formarea zerourilor lui $Y_{12}$.

Fie funcția de transfer

$$F(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda) + Q_2(\lambda)} = \frac{P(\lambda) / Q_1(\lambda)}{1 + Q_2(\lambda) / Q_1(\lambda)} \cdots \quad (13)$$

și să identificăm $P(\lambda)/Q, (\lambda)$ cu $Y_{12}$ iar $Q_2 \lambda)/Q_1(\lambda)$ cu $Y_{22}$. Separarea lui $Q$ în suma $Q_1 + Q_2$ trebuie astfel făcută, încît $Q_1/Q_1$ să îndeplinească condițiile cerute pentru o admitanță *R. C.* Dacă

$$Q(\lambda) = b_p (\lambda + \varrho_1) (\lambda + \varrho_3) (\lambda + \varrho_5) \cdots (\lambda + \varrho_{2p-1}) \cdots \quad (14)$$

cu

$$0 < \varrho_1 < \varrho_3 < \cdots < \varrho_{2p-1} < \infty$$

vom lua

$$Q_1(\lambda) = A (\lambda + \varrho_2) (\lambda + \varrho_4) \cdots (\lambda + \varrho_{2p}) \cdots \quad (15)$$

astfel ca

$$0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_4 < \cdots < \varrho_{2p-1} < \varrho_{2p} < \infty$$

iar pe $A$ avînd o valoare astfel ca $Q_1(0) < Q(0)$. Polinomul $Q_2(\omega)$ va fi dat atunci de relația $Q_2 = Q - Q_1$. O dată această separare făcută, se trece la sinteza lui $Y_{22}$, căutînd a se forma în același timp și zerourile lui $Y_{12}$. Admitanța $Y_{12}$ va avea un zero la o frecvență dată atunci cînd, fie admitanța unei ramuri serie, fie impedanța unei ramuri derivație, în cuadripolul în scară, devine egală cu zero la acea frecvență, afară de cazul cînd funcția de transfer a părții din cuadripol care se află la stînga ramurii considerate are un pol pentru aceeași frecvență. Acest caz are loc atunci cînd admitanța văzută la stînga ramurii considerate are un pol pentru acestă frecvență.

Procedeul are loc atunci după cum urmează. Se face să coincidă un zero al admitanței $Y_{22}$ cu un zero al admitanței $Y_{12}$. Fie acest zero dat de $\lambda = -\mu_2$, iar valoarea lui $Y_{22}$ după această schimbare $Y'$. Se separă partea principală a funcției $^1/Y' = Z'$ relativă la polul $\lambda = -\eta_2$, determinîndu-se rezidul corespunzător $k_2$. Vom avea atunci :

$$Z' = {}^1/Y' = Z'' + Z_2 = Z'' + \frac{k_2}{\lambda + \eta_3} \quad \ldots \qquad (16)$$

Se sintetizează $Z_2$ sub forma unei ramuri serie, formată dintr'un condensator și o rezistență în paralel. S-a format astfel un zero al admitanței $Y_{12}$, deoarece ramura $Z_2$ devine infinită pentru $\lambda = -\eta_2$. Se consideră admitanța rămasă de sintetizat $Z'' = {}^1/Y''$ și se repetă operația de mai sus, pînă ce toate zerourile lui $Y_{12}$ au fost formate. In acest mod am realizat pe $Y_{22}$ și totodată am format zerourile lui $Y_{12}$. Deoarece polii lui $Y_{22}$ și $Y_{12}$ sînt identici. funcția de transfer $F(\lambda)$ a fost sintetizată.

In ceea ce privește modul de deplasare a zerourilor lui $Y_{22}$ pentru a face să coincidă cu cei ai lui $Y_{12}$, se consideră graficul funcției $Y_{22}$ (presupunînd că are două zerouri) din fig. 7, pentru valorile reale și negative ale lui $\lambda$. Fie $-\eta_2$ zeroul funcției $Y_{12}$ și $-\eta'_2$ cel al funcției $Y_{22}$ pe care vrem să-l deplasăm în $-\eta_2$. Dacă valoarea $Y_{22}$ $(-\eta_2)$ satisface relația

$$0 < Y_{22}(-\eta_2) \leq Y_{22}(0)$$

unde $Y_{22}(0)$ reprezintă minimul părții reale a lui $Y_{22}$ pentru frecven-

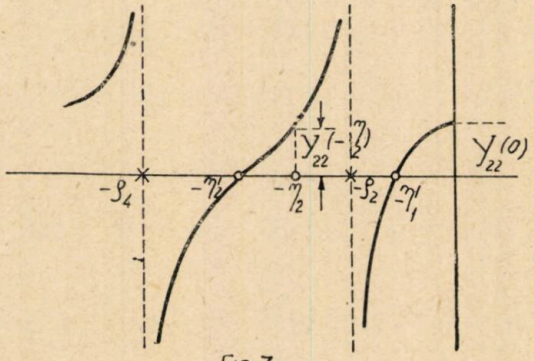



Fig. 7.

țele reale ($\lambda = j\omega$) atunci deplasarea dorită se poate obține prin simpla scădere a constantei $Y_{22}(-\eta_2)$, adică $Y'$ din (16) va avea valoarea $Y' = Y_{22} - Y_{22}(-\eta_2)$, $Y_{22}(-\eta_2)$ reprezentînd ramura derivație premergătoare ramurei serie dată de $Z_2$ în (16) și fiind formată dintr-o rezistență. Dacă condiția (17) nu este satisfăcută, atunci vom separa o *porțiune* din partea principală a funcției $Y_{22}$ relativă la polul $-\varrho_2$, în cazul cînd $Y_{22}(-\eta_2) < 0$ (adică $\eta_2 < \eta'_2$) sau relativă la po-

lul — $\varrho_4$ în cazul cînd $Y_{22}$ (— $\eta_2$) e negativ ($\eta_2 < \eta_2'$). Această porțiune poate fi exprimată, în cazul $\eta_2 < \eta_2'$, prin $Y_1 - \frac{k_1 \lambda}{\lambda + \varrho_2}$, iar $k_1$ se determină din condiția

$$Y_{22}(-\eta_2) - \left(\frac{R_1 \lambda}{\lambda + \varrho_2}\right)_{\lambda = -\eta_2} = 0 \ldots \quad (18)$$

In acest caz, $Y'$ din (16) devine $Y' = Y_{22} - Y_1$, iar $Y_1$ se sintetizează sub forma unei ramuri derivație, formată dintr-un condensator în serie su o rezistență, premergătoare ramurii serie dată de $Z_2$ în (16). Este de reținut că prin separarea lui $Y_1$, $Y_{12}$ nu conține un zero pentru $\lambda = -\varrho_2$ (cînd $Y_1 = \infty$), deoarece numai o porțiune a polului $\lambda = -\varrho_2$ a fost format sub forma lui $Y_1$ și prin urmare admitanța $Y'$ conține încă acest pol.

## 4. SINTEZA FUNCȚIILOR DE TRANSFER R. C. DE DEFAZAJ MINIM

Dacă funcția de transfer $F(\lambda)$ este de defasaj minim. atunci zerourile ei nu pot apărea decît în semiplanul stîng al planului variabilei, inclusiv axa imaginară (axa frecvențelor reale). Aceste funcțiuni nu mai pot fi sintetizate sub forma unui singur cuadripol în scară, deoarece pentru anularea lor la o frecvență complexă, curentul trebuie să poată ajunge de la intrare la ieșire pe două căi diferite. Această clasă de funcții este mai generală decît cea precedentă, pe care o conține ca un caz particular.

Sinteza începe prin a face indentificările corespunzătoare între (12) și (13). Fie atunci $Y_{22} - Q_2 Q_1$ și

$$Y_{12} = \frac{P}{Q_1} = \frac{A_0 + A_1 \lambda + \cdots + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \lambda^m}{Q_1} = \frac{A_0}{A_1} + \frac{A_1 \lambda}{Q_1} + \cdots +$$

$$+ \frac{A_{m-1} \lambda^{m-1}}{Q_1} + \frac{A_M \lambda^M}{Q_1} = Y_{12}^{(0)} + Y_{12}^{(1)} + \cdots + Y_{12}^{(m-1)} + Y_{12}^{(m)} \cdots \quad (19)$$

In acest caz, funcția de transfer dată de (12) devine :

$$F_{(\lambda)} = F_{(\lambda)}^{(0)} + F_{(\lambda)}^{(1)} + \cdots + F_{(\lambda)}^{(m-1)} + F_{(\lambda)}^{(m)} =$$

$$= \frac{Y_{12}^{(0)}}{1 + Y_{22}} + \frac{Y_{12}^{(1)}}{1 + Y_{22}} + \cdots + \frac{Y_{12}^{(m-1)}}{1 + Y_{22}} + \frac{Y_{12}^{(M)}}{1 + Y_{22}} \cdots \quad (20)$$

Funcțiile de transfer parțiale din (20) au toate aceeași admitanță de scur circuit $Y_{22}$, astfel încît, sintetizate separat și conectate în paralel, vor da rețeaua avînd funcția de transfer totală $F(\lambda)$. Aceste funcții parțiale au zerouri numai in origine și la infinit, zerouri care pot fi formate cu ajutorul unui condensator plasat într-o ramură serie (zero în origine) sau într-o ramură derivație (zero la infinit) a unei rețele în scară.

Intr-adevăr, să scriem pe $Y_{22}$ sub forma :

$$\frac{1}{Y_{22}} = \frac{Q_1}{Q_2} = Z(\lambda) = \frac{A'_m \lambda^m + A'_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + A'_0}{b'_m \lambda^m + b'_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + b'_0} \cdots \qquad (21)$$

Comparînd pe (21) cu (6) vedem că putem dezvolta pe $^1/Y_{22}$ într-o fracție continuă la fel cu cea din (7) care ne duce la rețeaua din fig. 8. Capacitățile sunt toate în paralel, deci admitanța de transfer de

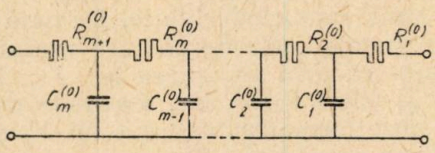



*Fig. 8*

scurtcircuit a acestui cuadripol va corespunde termenului $Y^{(0)}_{12}$ în (19), adică toate zerourile vor fi la infinit.

Scriind acum pe $Y_{22}$ ca în (8) și dezvoltînd admitanța în fracție continuă ca în (9), vom obține cuadripolul din fig. 9, cu toate capacitățile în serie, daci cu admitanța de transfer corespunzînd termenului $Y^{(m)}_{12}$ în (19) (toate zerourile în origine).

Pentru a obține un termen intermediar, de ex. $Y^{(2)}_{12}$, vom face dezvoltarea ca în (9) pînă ce vom plasa doi condensatori în două ramuri serie (două zerouri în origine), iar restul funcției o vom dezvolta ca în (7), obținînd astfel rețeaua din fig. 10.

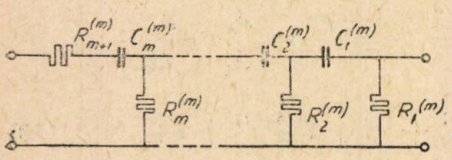



*Fig. 9*

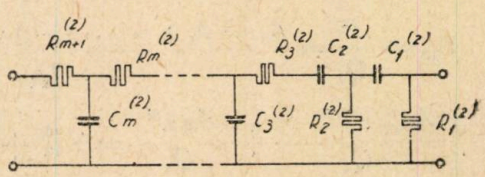



*Fig. 10*

Inainte de conectarea tuturor rețelelor în paralel, trebuie să ținem seamă de faptul că fiecare admitanță în (19), calculată din rețeaua corespunzătoare după efectuarea sintezei, a fost obținută înmulțită cu alt factor de proporționalitate : $A_0$ în loc de $a_0$ ; $A_1$ în loc de $a_1$ etc. Pentru a le aduce la valorile corespunzătoare, ar trebui multiplicate cu factorii $a_0/A_0$ , $a_1/A_1$ etc., în mod corespunzător (adică se împart valorile rezistențelor și se multiplică valorile capacităților cu acest factor). Insă în acest caz, admitanța $Y_{22}$ ar rezulta multiplicată cu constanta

$$G = \frac{a_0}{A_0} + \frac{a_1}{A_1} + \cdots + \frac{a_m}{A_M}$$

Pentru a evita acest lucru, se multiplică fiecare admitanță $Y_{12}$ componentă, rezultată din sinteză, cu factorul $\frac{a_0}{A_0 G}$, $\frac{a_1}{A_1 G} \cdots \frac{a_m}{A_m G}$, în mod corespunzător. Conectarea în paralel a rețelelor astfel obținute va da funcția totală de transfer $\frac{F(\lambda)}{G}$ care, exceptînd constanta de multiplicare $1/G$, este funcția dorită.

Remarcăm că sinteza s-a făcut pentru cazul cînd rețeaua rezultată este terminată pe sarcina nominală de 1 ohm. Dacă dorim să obținem funcția de transfer $F(\lambda)$ de la o rețea lucrînd cu secundarul în gol, vom modifica procedeul de mai sus în mod adecuat.

Astfel, dacă în relația (11) punem $E_2 = -R_3 I_3$, (12) devine

$$F(\lambda) = \frac{Y_{12}}{1/R_2 + Y_{22}} = -\frac{U_2}{U_1} \cdots \tag{22}$$

Făcînd pe $R_2$ să tindă către infinit, obținem

$$-\frac{u_2}{u_1} = F(\lambda) = \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \tag{23}$$

In acest caz, în loc de (13) vom avea

$$F(\lambda) = P(\lambda)/Q(\lambda) = \frac{P(\lambda)/R\lambda)}{Q(\lambda)/R(\lambda)} \cdots \tag{24}$$

iar identificarea corespunzătoare va fi

$$Y_{12} = \frac{P(\lambda)}{R(\lambda)} \text{ și } Y_{23} = \frac{Q(\lambda)}{R(\lambda)}$$

Polinomul $R(\lambda)$ va fi luat de același grad cu $Q(\lambda)$ (în modul acesta zerourile lui $F(\lambda)$ vor fi aceleași cu cele ale lui $Y_{12}$) iar rădăcina lui astfel alese încît $\frac{Q(\lambda)}{R(\lambda)}$ să satisfacă condițiile impuse funcțiilor de admitanță *R. C.*, specificate la început. Restul sintezei se continuă ca în cazul anterior,

Menționăm că o singură rețea în scară poate fi făcută să reprezinte doi termeni în (20) prin adăugarea unui singur element si printr-o modificare potrivită a acestei rețele.

## 5. FUNCȚII DE TRANSFER CU ZEROURI ORIUNDE, AFARĂ DE SEMIAXA REALĂ POZITIVA

Grupul acesta de funcții este și mai cuprinzător decît cel precedent, fără să cuprindă însă cazul general.

In procedeul de sinteză anterior. presupunerea că funcția este de defazaj minim a fost necesară, deoarece în această ipoteză coeficienții

$a_0$, $a_1$ ... $a_m$ în relația (19) sînt totdeauna pozitivi, (polinom Hurwitz). Acest lucru este necesar deoarece în caz contrar admitanțele $Y_{12}^{(0)}$, $Y_{12}^{(1)}$, ,., $Y_{12}^{(m)}$ ar putea să aibă și valori negative și deci n-ar putea fi realizate cu elemente pasive. In cazul cînd rădăcinile polinomului $P(\lambda)$ pot apărea și în semiplanul drept al variabilei, această condiție necesară sintezei nu mai este asigurată. Dacă unii din acești coeficienți sînt negativi. atunci se poate multiplica, atît numărătorul cît și numitorul funcției $F(\lambda)$ cu același polinom $S(\lambda)$, astfel încît produsul $P(\lambda)$, $S(\lambda)$ să aibă toți coeficienții pozitivi. $F(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = \frac{P(\lambda)\ S(\lambda)}{Q(\lambda)\ S(\lambda)}$. $S(\lambda)$ trebuie astfel luat, încît să nu încalce restricțiile impuse asupra pozițiilor polilor lui $F(\lambda)$. Acest lucru este totdeauna posibil, dacă funcția de transfer nu are zerouri pe semiaxa reală pozitivă, dar gradul lui $S(\lambda)$ va trebui să fie cu atît mai mare, cu cît zerourile complexe ale lui $F(\lambda)$ sunt mai aproape de această semiaxă. Prin urmare, procedeul de sinteză precedent se poate aplica și în acest caz, dar numărul elementelor $R$ și $S$ suplimentare necesare va fi cu atît mai mare, cu cît gradul lui $S(\lambda)$ va fi mai mare.

## 6. FUNCȚII DE TRANSFER CU ZEROURI O RIUNDE IN PLANUL VARIABILEI COMPLEXE

Acesta este cazul general. In cazul cînd funcția de transfer are zerouri pe semiaxa reală pozltivă, sinteza nu mai poate fi obținută sub forma unui cuadripol dezechilibrat. Singurele sinteze elaborate pînă acum pentru acest caz general sînt cele care dau un cuadripol în punte, simetric. Spre exemplu, se caută întîi a se realiza un cuadripol $R.\ C.$ care să ne dea funcția de transfer cerută, avînd terminațiile scurtcircuitate, apoi se separă din rețeaua astfel obținută două rezistențe egale care vor constitui rezistența internă a sursei și sarcina.

Să facem în relația (11) $E_2 = O$. Rezultă;

$$F(\lambda) = \frac{I_{2sc}}{E_1} = Y_{12} \tag{25}$$

Cuadripolul căutat fiind presupus simetric,

$$Y_{11} = Y_{22}$$

Rămîne să se precizeze admitanța de scurtcircuit $Y_{11}$. Pentru aceasta să dezvoltăm în fracții parțiale, analoge cu cele date în (5), funcțiile $Y_{12}$, $Y_{11}$ și $Y_{23}$. Intre reziduurile diferiților termeni ai acestor funcții există relațiile:

$$g_{11}^{(s)} \geq 0\ ;\quad g_{22}^{(s)} \geq 0\ ;\quad g_{11}^{(s)} \cdot g_{22}^{(s)} - (g_{12}^{(s)})^2 \geq 0 \cdots \tag{26}$$

pentru toate valorile lui $S$. Să punem condiția ca în ultima din relațiile (26) semnul egalității să aibă loc totdeauna. De aici și din condiția de simetrie, se obține:

$$g_{11}^{(s)} = g_{22}^{(s)} = / g_{12}^{(s)} / \cdots \tag{27}$$

Cu alte cuvinte, putem determina admitanța de scurtcircuit $Y_{11}$ (și deci și pe $Y_{22}$), făcînd în admitanța de transfer de scurt circuit toate reziduurile pozitive. Matricea $// Y //$ a cuadripolului simetric în punte fiind astfel cunoscută, determinarea celor două impedanțe $Z'_A$ și $Z'_B$ ale brațelor punții rezultă imediat:

$$Z'_A = \frac{1}{Y_{11} + Y_{12}} \; ; \qquad Z'_B = \frac{1}{Y_{11} - Y_{12}}$$

Pentru extragerea rezistențelor necesare generatorului și sarcinii, vom alege cea mai mică rezistență serie constantă a impedanțelor $Z'_A$ și $Z'_B$ (condiția de egalitate în ultima din relațiile (26) garantează că totdeauna acest lucru este posibil). Impedanțele brațelor punții după această extragere vor fi

$$Z_A = Z'_A - R_{min} \; ; \; Z_B = Z'_B - R_{min}$$

unde $R_{min}$ este rezistența extrasă pentru a forma terminațiile cuadripolului. Dacă este necesar ca acesta din urmă să lucreze pe rezistențe terminale egale cu $R$, se multiplică $Z_A$ și $Z_B$ cu constanta $R/R_{min}$. Vom avea, în acest caz:

$$\frac{I_{2sc}}{E_1} = \frac{F(\lambda)}{R/R_{min}} \text{ sau } \frac{E_2}{E_1} F(\lambda) R_{min}$$

Prin urmare, abstracție făcînd de constanta de multiplicare $R_{min}$, am obținut funcția de transfer dorită

Fie, ca exemplu, funcția de transfer $R.\,C.$ cu zerouri numai pe semiaxa reală pozitivă:

$$F(\lambda) = \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)}{(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)} \ldots \qquad (28)$$

Se vede că $|F(\lambda)| = 1$, adică este vorba de un cuadripol corector de fază. Sinteza, pentru rezistențe terminale de 600 Ω ne duce la rețeaua din fig. 11. Valorile mari ale capacității rezultă din faptul că funcția (28) este normată în raport cu frecvența.

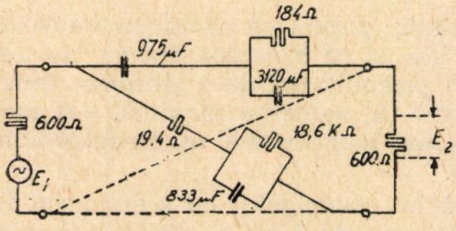



*Fig. 11*

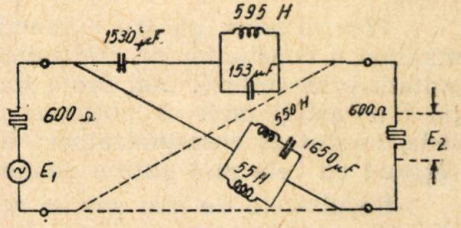



*Fig. 12*

Pentru comparație, am sintetizat aceeași funcție pentru cazul cînd am utiliza și inductanțe (fig. 12). Valorile capacităților în cele două rețele sunt de același ordin. Chiar o schimbare de frecvență care ar

reduce valorile inductanţelor şi capacităţilor în raportul $1/10^3$ arată avantajul reţelei *R. C.* In schimb, raportul $E_2/E_1$ în fig. 12 este $^1/_2F(\lambda)$ pe cînd în fig. 11 este pe $\frac{1}{64}F(\lambda)$.

Metoda de sinteză în punte simetrică se poate aplica pentru orice funcţie de transfer *R. C.*, dar nu duce, în general, la rezultatul cel mai convenabil din punct de vedere al numărului de elemente necesare sau al atenuării constante. Pe deasupra, puntea este şi echilibrată.

## 7. CUADRIPOLI RIDICĂTORI DE TENSIUNE

Pînă acum nu am făcut nici o precizare cu privire la constanta de proporţionalitate $K$, în relaţia (10). Funcţia de transfer se sintetizează după o metodă oarecare convenabilă cazului particular dat şi constanta $K$ se calculează ulterior, din reţeaua obţinută.

Să scrim din nou expresia funcţiei pe transfer $F(\lambda)$

$$F(\lambda) = \frac{E_2}{E_1} = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = K\,\frac{a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda^m}{b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n} \qquad (29)$$

Dacă $F(\lambda)$ reprezintă funcţia de transfer a unei reţele desechilibrate (3 borne). adică nu are zerouri pe semiaxa reală pozitivă, atunci constanta de proporţionalitate $K$ satisface inegalitatea $0 < K < K_0$, unde $K_0$ este cea mai mică din cantităţile $K_d$, $\frac{b_0}{a_0}$ şi $l$ dacă $m = n$, sau cea mai mică din cantităţile $K_d$ şi $\frac{b_0}{a_0}$, dacă $n = m$. $K_d$ este cea mai mică valoare pozitivă a lui $a\,K$ (dacă există) pentru care ecuaţia $Q(\lambda) - K\,P(\lambda) = 0$ are o rădăcină multiplă pozitivă.

In cazul cînd $F(\lambda)$ reprezintă funcţia de transfer a unei reţele echilibrate (4 borne distincte), adică are zerouri şi pe semiaxa reală pozitivă, atunci $K$ satisface inegalitatea $-K_0 < K < K_0$, $K_0$ avînd aceeaşi semnificaţie, dar pentru valoarea absolută a cantităţilor $K_d$ şi $\frac{b_0}{a_0}$.

Prin urmare, pentru o funcţie dată, putem să calculăm valoarea maximă a constantei de multiplicare $K_0$ şi să o comparăm cu cea rezultată prin sinteză. Mai mult, există posibilitatea de a sintetiza funcţia $F(\lambda)$ astfel încît să obţinem pentru $K$ valoarea maximă, dar metoda de sinteză corespunzătoare este mai laborioasă şi nu dă totdeauna reţeaua cu cele mai puţine elemente.

Rezultatele de mai sus se referă la cuadripolul cu secundarul în gol. Ele ridică, în mod natural, problema dacă nu se poate întîmpla, în anumite cazuri, ca tensiunea $E_2$ să fie mai mare decît $E_1$, la anumite frecvenţe, cu alte cuvinte cuadripolul *R. C.* să fie ridicător de tensiune. Că acest lucru este posibil, se poate vedea direct în felul

următor. Să considerăm rețeaua tripolară *R. C.* din fig. 13 și să aplicăm între bornele 1 și 2 o tensiune $E_1$. Rezultă imediat $E_3 = E_1 - E_2$.

Dacă pentru o anumită frecvență reală există un defazaj de 180° între $E_1$ și $E_2$, atunci $E_3 < E_1$, adică tensiunea rezultată între bornele 1 și 3 este mai mare decît tensiunea aplicată $E_1$.

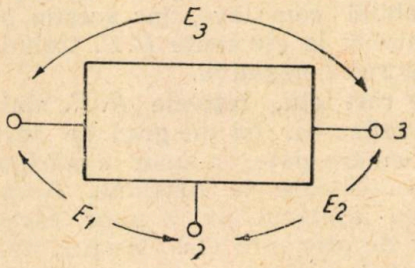



*Fig. 13*

Căutînd să facem maximă valoarea în lui $|F(\lambda)|$ în (29), alegînd în mod convenabil valorile coeficienților $a_0$, $a_1$ etc. și $b_0$, $b_1$ etc.. dar fără să ieșim din limitele impuse funcțiilor de transfer *R. C.*, se ajunge la următorul rezultat :

Cîștigul maxim de tensiune care se poate obține de la o rețea *R. C.* dezechilibrată (3 borne), a cărei funcție de transfer are gradul $n$, este de $2^{\frac{n-3}{2}} + \frac{1}{2}$ pentru $n$ impar și tinde asimtotic către $2^{\frac{n-3}{2}}$ pentru $n$ par. In cazul unei rețele echilibrate, cîștigul maxim realizabil este de $2^{\frac{n-1}{2}}$. Aceste rezultate sunt independente de frecvența la care dorim să obținem cîștigul maxim.

Ca exemplu, funcția de transfer

$$F(\lambda) = \frac{3\lambda^2 + \frac{47}{16}\lambda}{\lambda^3 + 3\lambda^2 + \frac{47}{16}\lambda + \frac{15}{16}}$$

are un cîștig de tensiune de 1,484 la frecvența unghiulară $\omega = 1$, iar cîștigul maxim de la o funcție de gradul 3 ar fi de 1,5. Corespunzînd la o rețea cu patru borne, funcția

$$F(\lambda) = \frac{\lambda^4 + 3{,}5\lambda^3 - 4{,}4\lambda^2 - 2{,}33\lambda + 0{,}445}{\lambda^4 + 3{,}5\lambda^3 + 4{,}4\lambda^2 + 2{,}33\lambda + 0{,}445}$$

dă un cîștig la $\omega = 1$ de 2,6 față de cîștigul maxim de $2^{\frac{4-1}{2}} = 2{,}83$.

## CONCLUZII

Restricţiile impuse funcţiilor de transfer pentru a putea fi realizate sub forma de reţele pasive conţinînd numai rezistenţe şi capacităţi sînt destul de severe. Intr-adevăr, o funcţie de transfer realizabilă fizic cu elemente *R.L.C.* pasive poate avea polii oriunde în semiplanul stîng al variabilei complexe, iar aceştia pot fi şi multipli, pe cînd una restrînsă numai la elemente *R. C.* trebuie să aibă polii simpli şi numai pe semiaxa reală negativă.

Cu toate aceste restricţii, reţelele *R. C.* sînt încă destul de flexibile. Ele permit realizarea, cu un grad de aproximare voit, a unei caracteristici de atenuare date, a unor cuadripoli corectori de fază, cum şi a reţelelor ridicătoare de tensiune. Aceasta implică posibilitatea de realizare, cu ajutorul lor, a unor caracteristici ca cele ale filtrelor, corectorilor de atenuare etc. Desigur, atenuarea constanta relativ mare de care sînt însoţite asemenea reţele face să nu fie totdeauna preferate.

Deoarece o rezistenţă poate fi considerată ca forma limită la care se reduce o inductanţă atunci cînd factorul de calitate devine egal cu zero, cele expuse mai sus permit a trage concluzia generală că cerinţe deosebit de ridicate în proiectarea unor reţele, cum ar fi cele de filtrare, spre exemplu, nu necesită inductanţe cu factori de calitate speciali de mari, cu condiţia să prevedem amplificatori de cîştig constant în banda de frecvenţe care ne interesează, pentru a compensa pierderile parazite excesive.

*Catedra de telefonie şi telegrafie*

Primit la redacţie la 10 VI 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. * * * Корректирующе цепи в автоматике—Москва, 1954.
2. *В. А. Тафт* — Основы методики расчета линейных электрических цепей по заданый их частотным характеристикам—Москва, 1954,
3. *A. D. Fialkow and Irving Gerst* — The transfer function of general two terminal-pair R. C. Networks—Quart. Appl. Math., vol. 10, iulie 1952.
4. *Ordung şi Hopkins* — Synthesis of cascaded three terminal R. C. Networks with minimum phase transfers functions.
5. *Ch. Belove*—Tolerance coefficients for R. C. Networks—Journal of the Applied Physics, iunie, 1953.
6. *L. Weinberg* — Synthesis of Transfer Functions with Poles restricted to the negative real axis—Journal of the Applied Physics—febr. 1953.
7. *L. Cowles* — The Parallel—T. R.C. Networks—Proceding of. I.R.E., dec. 1952.

## СИНТЕЗ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ *R.C.*

(Краткое содержание)

Приводится классификация методов синтеза *R.C.* четырёхполюсников, известных до сих пор и обобщаются некоторые из этих методов. Определяются цепи соответствующие каждой группе функций и рассматривается задача максимального усиления, получаемого цепью с передаточной функцией данной степени.

## LA SINTHÈSE DES FONCTIONS DE TRANSFER R. C.

(Résumé)

On présente une classification des méthodes de synthèse des quadripole R. C. connues jusqu'à present, en généralisant quelques-unes de ces méthodes. On détermine les réseaux correspondant à chaque groupe de fonctions et on discute le problème du gain maximum qu'on peut obtenir d'un réseau R. C. ayant une fonction de transfert d'un degré donné.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

# CALCULUL DISTORSIUNILOR LA DISCRIMINATORUL DE FAZĂ

de GH. CARTIANU şi MUGUR SĂVESCU

Aflarea răspunsului circuitelor la oscilaţii modulate şi determinarea distorsiunilor de neliniaritate introduse de aceste circuite este o problemă de o deosebită importanţă în radiocomunicaţii.

La recepţia oscilaţiilor modulate în frecvenţă, distorsiunile de neliniaritate se produc în etajele amplificatoare de radiofrecvenţă, de frecvenţă intermediară şi în demodulator.

Demodularea semnalelor modulate în frecvenţă constă, în mod obişnuit, în transformarea modulaţiei de frecvenţă în modulaţie de amplitudine şi apoi detectarea oscilaţiilor, astfel obţinute, într-un detector pentru modulaţia de amplitudine, cu diodă.

Funcţiile de transformare a modulaţiei de frecvenţă în modulaţie de amplitudine şi de detectare a modulaţiei de amplitudine obţinute sînt îndeplinite de etajul discriminator.

In lucrarea de faţă se va studia discriminatorul de fază.

Înainte de a trece la analiza distorsiunilor introduse de către discriminatorul de fază se va arăta pe scurt modul lui de lucru.

In fig. 1, este dată schema discriminatorului.

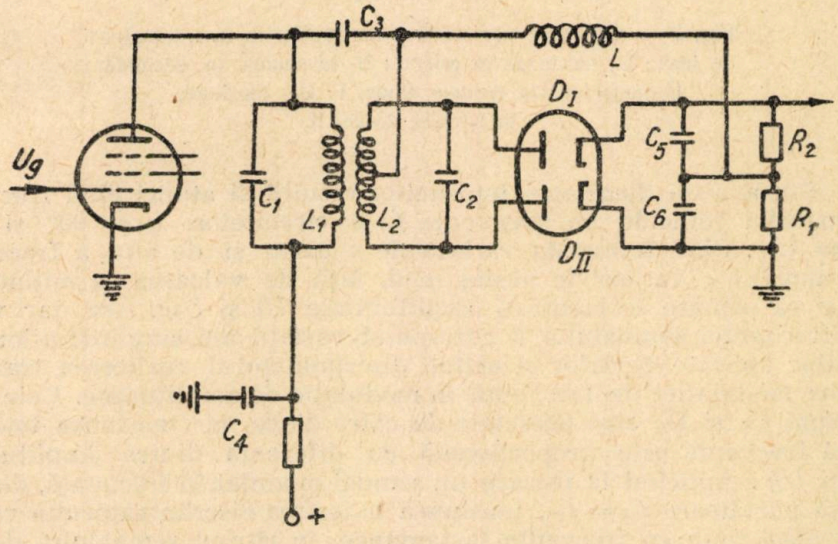



Fig. 1 — Schema electrică a discriminatorului de fază.

Cele două circuite oscilante $L_1$, $C_1$ şi $L_2$, $C_2$ sînt acordate pe aceeaşi frecvenţă. Ele sînt cuplate prin inducţie mutuală, iar borna de sus a circuitului primar se leagă la punctul mijlociu al bobinei secun-

dare $L_2$, prin condensatorul $C_3$. Condensatorii $C_3$, $C_4$ și $C_6$ constitue practic scurtcircuite pentru oscilațiile de înaltă frecvență, iar bobina $L$ închide circuitele celor două diode.

Tensiunile aplicate diodelor, între anodele și catodele respective sînt:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_I &= \mathbf{U}_1 + \frac{\mathbf{U}_2}{2} \\ \mathbf{U}_{II} &= \mathbf{U}_1 - \frac{\mathbf{U}_2}{2} \end{aligned} \qquad (1)$$

unde $\mathbf{U}_1$ și $\mathbf{U}_2$ sînt amplitudinile complexe ale tensiunilor din primar și secundar.

In fig. 2 este reprezentată diagrama vectorială a tensiunilor, unde $\varphi$ este defazajul între $\mathbf{U}_1$ și $\mathbf{U}_2$.

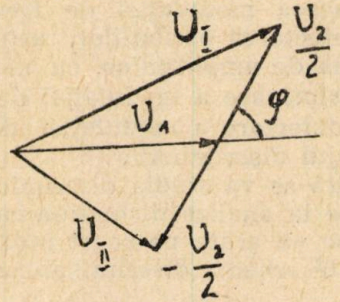



Fig. 2 — Diagrama vectorială a tensiunilor la discriminatorul de fază: $\mathbf{U}_1$ tensiunea în primar; $\mathbf{U}_2$ tensiunea în secundar; $\mathbf{U}_I$ tensiunea la bornele diodei I; $\mathbf{U}_{II}$ tensiunea la bornele diodei II.

Din analiza diagramei tensiunilor rezultă că atunci cînd frecvența semnalului coincide cu frecvența $f_r$ a circuitelor, $\varphi = 90^\circ$ și deci $U_I = U_{II}$. Cînd frecvența variază de o parte și de alta a frecvenței $f_r$, unghiul $\varphi$ variază în același mod, față de valoarea sa mijlocie de $90^\circ$ și ca urmare se modifică amplitudinile $U_I$ și $U_{II}$. Așa dar variației frecvenței semnalului îi corespund variații ale amplitudinilor tensiunilor aplicate diodelor și astfel discriminatorul realizează transformarea modulației de frecvență în modulație de amplitudine. Cele două tensiuni $\mathbf{U}_I$ și $\mathbf{U}_{II}$ sînt detectate de către diode, iar tensiunea totală de joasă frecvență este proporțională cu diferența dintre amplitudinile $U_I$ și $U_{II}$. Aplicînd la intrare un semnal modulat în frecvență, de frecvență purtătoare $f_o = f_r$, tensiunea la ieșirea discriminatorului variază în același timp cu frecvența instantanee, în ritmul semnalului de modulație.

Tensiunea la ieșire nu reproduce exact variația frecvenței instantanee în jurul frecvenței de centru. Distorsiunile introduse de discriminator depind de parametrii discriminatorului și de mărimea deviației de frecvență.

In numeroase lucrări s-a studiat funcționarea discriminatorului, răspunsul la oscilațiile modulate în frecvență, distorsiunile și s-au dat metode de calcul.

Un studiu analitic dezvoltat al distorsiunilor în sistemele pentru *M. F.* a fost dat de Vellat [1].

Descrierea modului de funcționare și caracteristicile discriminatorului sînt studiate în diferite lucrări [2], [3], [4].

O metodă de calcul grafico-analitică a fost dată de Sturley [5]. In lucrarea de față se calculează distorsiunile de ordinul 3 și 5 într-un caz general și se dă o metodă analitică de calcul al discriminatorului de fază.

Expresia generală a răspunsului unui circuit la o oscilație modulată în frecvență este [6].

$$\mathbf{U} = \mathbf{I}\, e^{j(\omega_0 t + \int \omega_v\, dt)} \left[ \mathbf{Z}(j\omega_0) + \sum_1^n \frac{1}{n!}\, C_n\, \frac{d^n \mathbf{Z}(j\omega_0)}{d\omega^n} \right] \qquad (2)$$

în care s-a notat:

$\mathbf{U}$, tensiunea la ieșire.

$\mathbf{I} = S\mathbf{U}_g$, curentul la intrare, $S$ fiind panta tubului premergător, iar $\mathbf{U}_g$ tensiunea aplicată la grilă.

$\omega_0 = 2\,\pi\, f_0$, frecvența unghiulară a purtătoarei.

$\omega_v = 2\,\pi\, f_v = \omega - \omega_0$, variația frecvenței unghiulare instantanee

$\mathbf{Z}(j\omega_0)$, impedanța de transfer între intrare și ieșire, la frecvența $\omega_0$.

$\frac{d^n \mathbf{Z}(j\omega_0)}{d\omega^n}$, derivatele impedanței de transfer la frecvența $\omega_0$

$C_n$, coeficienți care în cazul unui semnal de modulație sinusoidal ($\omega_v = \Delta\,\omega \cos \omega_m t$), pentru $n = 1, 2, 3$, sînt dați de expresiile:

$$C_1 = \Delta\omega \cos \omega_m t$$

$$C_2 = \Delta\omega^2 \cos^2 \omega_m t + j\omega_m \Delta\omega \sin \omega_m t$$

$$C_3 = \Delta\omega^3 \cos^3 \omega_m t + j3\omega_m\, \Delta\omega^2 \cos \omega_m t \sin \omega_m t + \omega_m{}^2 \Delta\omega \cos \omega_m t$$

Tensiunile de joasă frecvență de la ieșirile diodelor sînt proporționale cu amplitudinile tensiunilor $\mathbf{U}_I$, $\mathbf{U}_{II}$. Vom scrie deci:

$$U = |\mathbf{U}| = I \left| \mathbf{Z}(j\omega_0) + \sum_1^n \frac{1}{n!}\, C_n\, \frac{d^n \mathbf{Z}(j\omega_0)}{d\omega^n} \right| \qquad (3)$$

Se notează:

$Q_1$, $Q_2$, factorii de calitate ai celor două circuite;

$Q = \sqrt{Q_1\, Q_2}$ :

$R_{dI}$ rezistența paralel a primarului;

$R_{d2}$, rezistența paralel a secundarului;

$f_r$, frecvența de acord a celor două circuite care se ia egală cu frecvența purtătoare $f_0$

$$F = \frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \simeq \frac{2(f-f_0)}{f_0} = \frac{2f\nu}{f_0}$$

$$x = F\,Q \simeq \frac{2\,(f-f_r)}{f_r}\,Q = \frac{2\,(f-f_0)}{B} = \frac{2f\nu}{B}$$

$\Delta f$, deviația de frecvență.

$$\delta = \frac{2\Delta f}{f_0}\,Q = \frac{2\Delta f}{B}$$

$B = \frac{f_0}{Q}$, lărgimea benzii circuitului oscilant avînd un factor de calitate $Q = \sqrt{Q_1\,Q_2}$;

$k$, coeficientul de cuplaj;

$g = k\,Q$, indicele de cuplaj;

$$h = g\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\;;$$

$$b = \frac{Q_1}{Q_2} + \frac{Q_2}{Q_1}\;.$$

Tensiunile $U_1$ și $U_2$ la bornele primarului și secundarului în regim staționar sau cvazistaționar (cînd frecvența este constantă sau variază lent) au expresiunile [7].

$$U_1 = \frac{I R_{d1}(1+jQ_2F)}{(1+jQ_1F)(1+jQ_2F)+g^2}$$

și

$$U_2 = \pm\frac{jIg\sqrt{R_{d_1}R_{d_2}}}{(1+jQ_1F)(1+jQ_2F)+g^2}$$

sau

$$U_1 = \frac{I R_{d_1}\left(1+j\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\,x\right)}{1+g^2-x^2+jx\sqrt{b+2}}$$

$$U_2 = \pm\frac{jI R_{d_1} Q_2 k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1+g^2-x^2+jx\sqrt{b+2}}$$

Luînd $Q_1 = Q_2 = Q$ rezultă $b = 2$ și

$$U_I = U_1 + \frac{U_2}{2} = I R_{d_1}\,\frac{1+j\left(x+\frac{h}{2}\right)}{1+g^2-x^2+j\,2x}$$

$$U_{II} = U_1 - \frac{U_2}{2} = I R_{d_1}\,\frac{1+j\left(x-\frac{h}{2}\right)}{1+g^2-x^2+j\,2x} \qquad (4)$$

Impedanţele de transfer corespunzătoare celor două diode au expresiile

$$\mathbf{Z}_I = \frac{\mathbf{U}_I}{\mathbf{I}} = R_{d_1} \frac{1 + j\left(x + \frac{h}{2}\right)}{1 + g^2 - x^2 + j2x}$$
$$\mathbf{Z}_{II} = \frac{\mathbf{U}_{II}}{\mathbf{I}} = R_{d_1} \frac{1 + j\left(x - \frac{h}{2}\right)}{1 + g^2 - x^2 + j2x} \tag{5}$$

Tensiunile redresate, la ieşirile celor două diode sînt egale respectiv cu $\eta_d \mid \mathbf{U}_I \mid$ şi $\eta_d \mid \mathbf{U}_{II} \mid$, în care $\eta_d$ este randamentul detecţiei. Deoarece diodele sînt montate în contratimp, tensiunea rezultantă la ieşirea din discriminator este dată de:

$$u_m = \eta_d \left( \mid \mathbf{U}_I \mid - \mid \mathbf{U}_{II} \mid \right) . \tag{6}$$

$U_I$ (sau $U_{II}$) se calculează cu formula (3) în care se introduce impedanţa de transfer $\mathbf{Z}_I$ (sau $\mathbf{Z}_{II}$) şi derivatele ei.

Se găseşte:

$$\left.\frac{d\mathbf{Z}_I}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = R_{d_1}\delta \frac{h + j(g^2 - 1)}{(1+g^2)^2}$$
$$\left.\frac{d^2\mathbf{Z}_I}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{R_{d_1}\delta^2}{(1+g^2)^3} \left[-2 + 6g^2 + jh(g^2 - 3)\right]$$
$$\left.\frac{d^3\mathbf{Z}_I}{d\omega^3}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{R_{d_1}\delta^3}{(1+g^2)^4} \left[12h(g^2 - 1) + j6(1 - 6g^2 + g^4)\right] \tag{7}$$
$$\left.\frac{d^4\mathbf{Z}_I}{d\omega^4}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{R_{d_1}\delta^4}{(1+g^2)^5} \left[72 - 384g^2 + 120g^4 + jh(132 - 144g^2 + 12g^4)\right]$$
$$\left.\frac{d^5\mathbf{Z}_I}{d\omega^5}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{R_{d_1}\delta^5}{(1+g^2)^6} \left[h(936 - 1584g^2 + 360g^4) + \right.$$
$$\left. + j(-456 + 3240g^2 - 1944g^4 + 120g^6)\right]$$

Dacă:
$$\delta = \frac{2\Delta f}{f_0} \quad Q < 1 \tag{8}$$

termenii de ordin superior din desvoltarea (3) se pot neglija.

Luînd primii şase termeni din dezvoltare se pot deduce armonicele, pînă la ordinul 5, introduse de discriminator.

Dacă afară de aceasta, se presupune că se pot neglija termenii care conţin pe $\omega_m$, faţă de ceilalţi termeni, se obţine soluţia de regim cvazistaţionar. In general, circuitele sînt puse să lucreze în aceste condiţii. Expresiunea tensiunii $U_I$ devine în acest caz

$$U_I = I \mid \mathbf{Z}_I \left[ j(\omega_0 + \omega_v) \right] \mid = I \left| \mathbf{Z}_I (j\omega_0) + \right.$$
$$\left. + \sum_1^n \frac{1}{n!} \frac{d^n \mathbf{Z}_I (j\omega_0)}{d\omega^n} \cos^n \omega_m t \right| \tag{9}$$

Ținînd seama de relațiile (7) se găsește

$$\frac{U_I}{IR_{d_1}} = \frac{M}{1+g^2} = \left| \frac{1+j\frac{h}{2}}{1+g^2} + \delta \frac{h+j(g^2-1)}{(1+g^2)^2} \cos \omega_m t + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\delta^2 \frac{2(3g^2-1)+jh(g^2-3)}{(1+g^2)^3} \cos^2 \omega_m t +$$

$$+ \frac{1}{6}\delta^3 \frac{12h(g^2-1)+j6(1-6g^2+g^4)}{(1+g^2)^4} \cos^3 \omega_m t +$$

$$+ \frac{1}{24}\delta^4 \frac{72-384g^2+120g^4+jh(132-144g^2+12g^4)}{(1+g^2)^5} \cos^4 \omega_m t +$$

$$\left. + \frac{1}{120}\delta^5 \frac{h(936-1584g^2+360g^4)+j(-456+3240g^2-1944g^4+120g^6)}{(1+g^2)^6} \cos^5 \omega_m t \right|$$

de unde se deduce :

$$M^2 \simeq \left[ 1 + \frac{\delta h}{1+g^2} \cos \omega_m t + \frac{\delta^2(3g^2-1)}{(1+g^2)^2} \cos^2 \omega_m t + \right.$$

$$+ \frac{2\delta^3 h(g^2-1)}{(1+g^2)^3} \cos^3 \omega_m t + \delta^4 \cdot \frac{3-16g^2+5g^4}{(1+g^2)^4} \cos^4 \omega_m t +$$

$$\left. + \delta^5 \frac{h(7{,}8-13{,}2g^2+3g^4)}{(1+g^2)^5} \cos^5 \omega_m t \right]^2 + \left[ \frac{h}{2} + \delta \frac{g^2-1}{g^2+1} \cos \omega_m t + \right.$$

$$+ \delta^2 \frac{h(g^2-3)}{2(1+g^2)^2} \cos^2 \omega_m t + \delta^3 \frac{1-6g^2+g^4}{(1+g^2)^3} \cos^3 \omega_m t +$$

$$+ \delta^4 \frac{h(5{,}5-6g^2+0{,}5g^4)}{(1+g^2)^4} \cos^4 \omega_m t +$$

$$\left. + \delta^5 \frac{-3{,}8+27g^2-16{,}2g^4+g^6}{(1+g^2)^5} \cos^5 \omega_m t \right]^2$$

$U_I$ se poate scrie sub forma:

$$U_1 \simeq \frac{IR_{d1}}{1+g^2} \sqrt{1+\frac{h^2}{4}} \cdot \sqrt{1+\beta_1 \delta \cos \omega_m t + \ldots + \beta_5 \delta^5 \cos^5 \omega_m t} \qquad (10)$$

unde:

$$\beta_1 = \frac{4h}{4+h^2}$$

$$\beta_2 = 2\,\frac{(g^2-1)h^2+2g^4+8g^2-2}{(1+g^2)^2(4+h^2)} \tag{11}$$

$$\beta_3 = \frac{8h(g^2-1)}{(1+g^2)^2(4+h^2)}$$

$$\beta_4 = \frac{4}{(4+h^2)(1+g^2)^4}\left[(3g^4-14g^2+15)\frac{h^2}{4}+5g^4-24g^2+5\right]$$

$$\beta_5 = \frac{4h}{(4+h^2)(1+g^2)^5}(3g^6-10{,}2g^4-5{,}4g^2+7{,}8)$$

Notînd:

$$y = \beta_1\delta\cos\omega_m t+\beta_2\delta^2\cos^2\omega_m t+\cdots+\beta_5\delta^5\cos^5\omega_m t,$$

și dezvoltînd în serie expresia (10) se găsește:

$$U_l = \frac{I R_{d1}}{1+g^2}\sqrt{1+\frac{h^2}{4}}\left(1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{16}y^3-\frac{5}{128}y^4+\frac{7}{256}y^5+\cdots\right) \tag{12}$$

de unde:

$$U_l = I R_{d1}(a_0+a_1\delta\cos\omega_m t+a_2\delta^2\cos^2\omega_m t+\cdots + a_5\delta^5\cos^5\omega_m t+\cdots) \tag{13}$$

în care:

$$a_1 = \frac{\sqrt{4+h^2}}{4(1+g^2)}\beta_1$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{4+h^2}}{32(1+g^2)}(8\beta_3-4\beta_1\beta_2+\beta_1^3)$$

$$a_5 = \frac{\sqrt{4+h^2}}{2(1+g^2)}\left[\frac{\beta_5}{2}-\frac{1}{4}(\beta_1\beta_4+\beta_2\beta_3)+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{16}(\beta_1\beta_2^2+\beta_1^2\beta_3)-\frac{5}{32}\beta_1^3\beta_2+\frac{7}{256}\beta_1^5\right] \tag{14}$$

Coeficienții de ordin par nu interesează deoarece montajul discriminatorului fiind în contratimp, armonicele de ordin par, se anulează cînd se ține seamă de ambele diode. iar amplitudinile armonicelor impare se dublează.

Ţinînd seamă de cele de mai sus, tensiunea la ieşirea discriminatorului se scrie:

$$u_m = \eta_d (U_I - U_{II}) = 2\,\eta_d\, I\, R_{d1} (a_1\,\delta \cos \omega_m t + \\ + a_3\,\delta^3 \cos^3 \omega_m t + a_5\,\delta^5 \cos^5 \omega_m t + \cdots) \tag{15}$$

Coeficienţii $a_n$ scad repede odată cu ordinul $n$; neglijînd termenii de ordin superior se găsesc amplitudinile fundamentalei şi ale armonicelor a 3-a şi a 5-a:

$$U_{m1} = 2\,\eta_d\, I\, R_{d1}\ (a_1\,\delta + \frac{3}{4} a_3\,\delta^3 + \frac{10}{16} a_5\,\delta^5) \tag{16}$$

$$U_{m3} = 2\,\eta_d\, I\, R_{d1} \left(\frac{1}{4} a_3\,\delta^3 + \frac{5}{16} a_5\,\delta^5)\right) \tag{17}$$

$$U_{m5} = \frac{1}{8}\,\eta_d\, I\, R_{d1}\ a_5\,\delta^5 \tag{18}$$

Ţinînd seamă că $a_1\,\delta \gg a_3\,\delta^3 \gg a_5\,\delta^5$ se poate scrie:

$$U_{m1} = 2\,\eta_d\, S\, U_g\, R_{d1}\,\delta\, a_1 = \frac{\eta_d\, S\, U_g\, R_{d1}\, h\,\delta}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{4}(1 + g^2)}} \tag{19}$$

şi folosind formulele (16), (17), (14), (11) se calculează factorul de distorsiune $d_3$ corespunzător armonicei a 3-a şi factorul de distorsiune $d_5$ corespunzător armonicei a 5-a:

$$d_3 = \frac{(g^2 - 1)\,h^4 + 8\,(g^2 - 1)\,h^2 - 8\,(g^4 + 3)}{4\,(4 + h^2)^2\,(1 + g^2)^2}\,\delta^2 + 5\,b\,\delta^4 \tag{20}$$

$$d_5 = b\,\delta^4 \tag{21}$$

în care $b = \frac{a_5}{16\,a_1}$, iar $a_1$ şi $a_5$ se găsesc din relaţiile (14) şi (11).

Cu ajutorul formulelor de mai sus, se pot calcula distorsiunile $d_3$ şi $d_5$, introduse de discriminatorul de fază, atunci cînd se cunosc $g$, $h$ şi $\delta$.

Pentru ca distorsiunile să fie minime, se caută să fie satisfăcută condiţia de anulare a armonicei a 3-a; neglijînd termenul $5\,b\,\delta^4$, din expresia (20) această condiţie este exprimată prin ecuaţia:

$$(g^2 - 1)\,h^4 + 8\,(g^2 - 1)\,h^2 - 8(g^4 + 3) = 0 \tag{22}$$

Ecuaţia (22) rezolvată dă ca singură soluţie convenabilă:

$$h = \sqrt{-4 + 2\sqrt{2}\,\frac{g^2 + 1}{\sqrt{g^2 - 1}}} \tag{23}$$

Relația între $h$ și $g$ dată de (23) este reprezentată prin curba din fig. 3.

Se vede că pentru anularea armonicei a 3-a este necesar să se ia $h \geq 2$ și $g \geq 1$. Pentru $g$ variind între 1 și 1,1, $h$ are o variație foarte mare (de la $\infty$ pînă la 3,7); în consecință, este necesar să se ia $g \geq 1{,}1$ la proiectarea discriminatorului în condițiile de anulare a armonicei a 3-a.

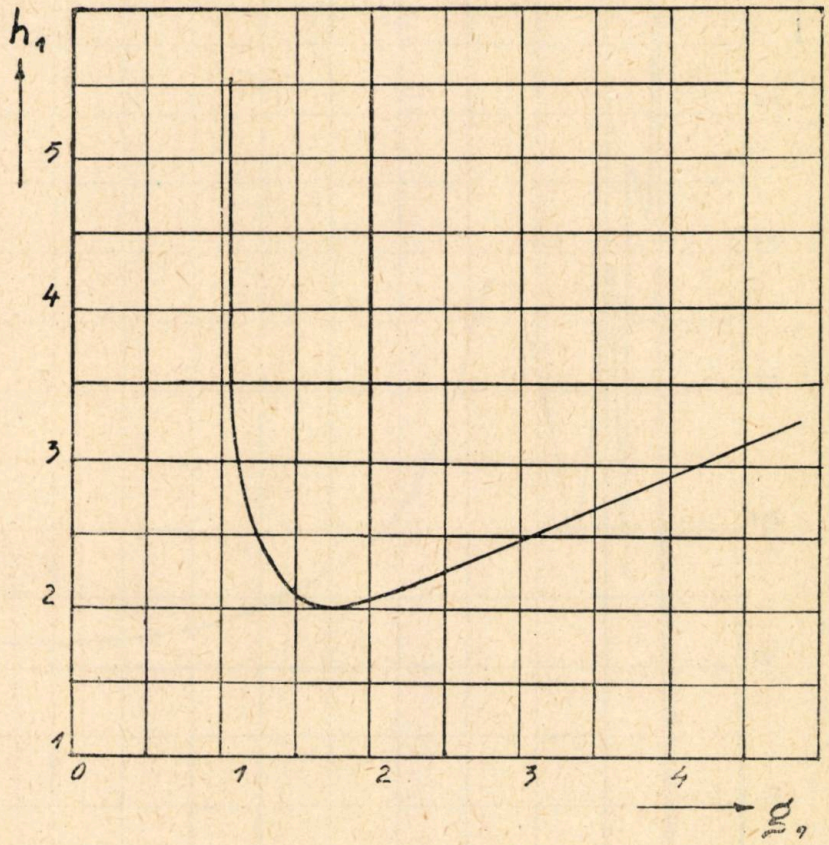



Fig. 3 — Curba care reprezintă relația dintre $h$ și $g$ pentru care se anulează armonica a 3-a.

Valoarea lui $b$ corespunzătoare valorilor $g$ și $h$, care satisfac ecuația (22) se calculează cu formulele (14) și (11).

In fig. 4 este reprezentată curba mărimii $b$ în funcție de $g$. care va fi folosită la proiectarea discriminatorului de fază.

Practic, nu este posibil ca relația (22) sa fie satisfăcută exact, din cauza impreciziunii cu care se realizează în realitate valorile calculate ale parametrilor $g$ și $h$, datorită erorilor de măsură și instabilității elementelor care condiționează pe $h$ și $g$.

Admiţînd că fluctuaţiile relative ale parametrilor $g$ şi $h$, faţă de valorile calculate, nu întrec anumite cifre (de ex. 10%), se poate cal-

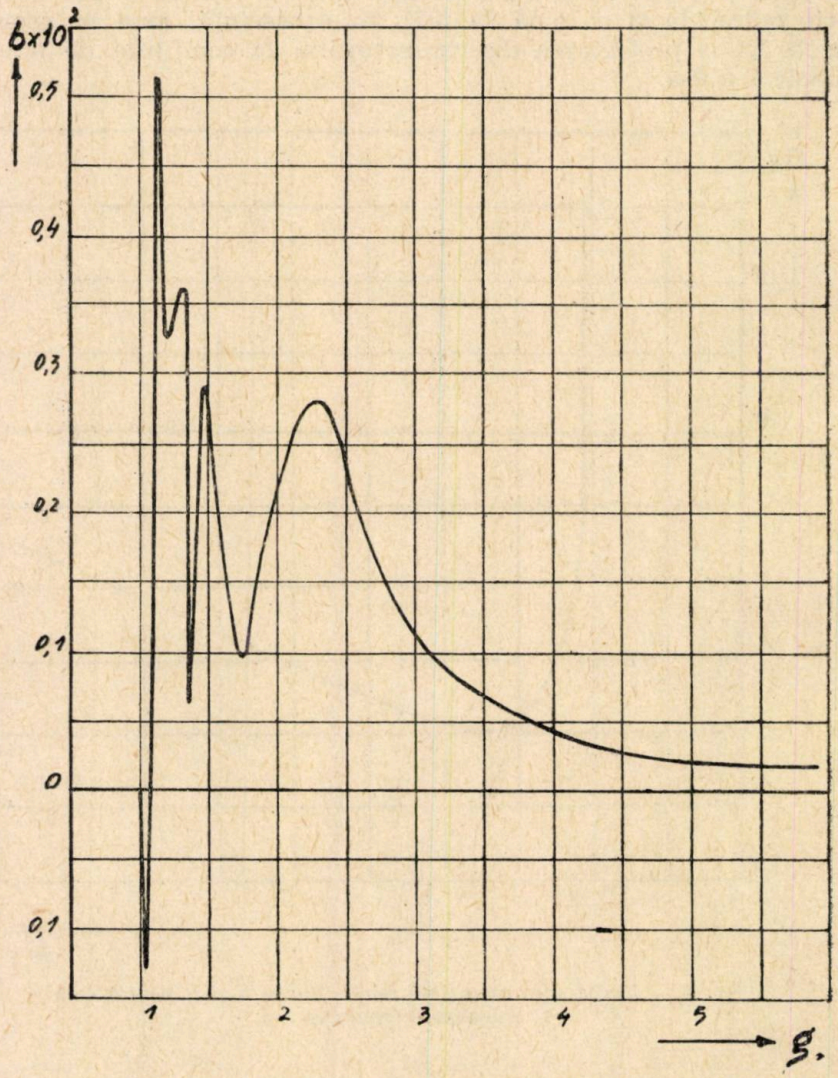



Fig. 4 — Curba de variaţie a parametrului $b$ în funcţie de $g$ în condiţiile de anulare a armonicei a 3-a.

cula $B = \frac{f_0}{Q}$. punînd condiţia ca $d_3$ şi $d_5$ să nu întreacă anumite valori impuse la o deviaţie de frecvenţă $\Delta f$ dată.

Presupunînd că $h$ și $g$ pot avea variații $\Delta h$ și $\Delta g$ față de valorile care satisfac ecuația (22), factorul de distorsiune $d_3$ corespunzător se deduce din dezvoltarea în serie a expresiei (20).

$$d_3 = \frac{\partial d_3}{\partial g}\Delta g + \frac{\partial d_3}{\partial h}\Delta h + 5b\delta^4 = \left(H\frac{\Delta h}{h} + G\frac{\Delta g}{g}\right)\delta^2 + 5\,b\,\delta^4 \qquad (25)$$

unde:

$$H = \frac{(g_1^2 - 1)\,h_1^2}{(4 + h_1^2)(1 + g_1^2)^2} \qquad (26\,a)$$

$$G = \frac{g_1^2\,(h_1^4 + 8\,h_1^2 - 16\,g_1^2)}{2(4 + h_1^2)^2\,(1 + g_1^2)^2} \qquad (26\,b)$$

In expresiile de mai sus, intră valorile parametrilor $h_1$ și $g_1$ care satisfac ecuația (22).

In efectuarea dezvoltării de mai sus, s-a considerat că parametrul $b$ variază puțin în raport cu $\Delta h$ și $\Delta g$, așa că $b$ poate fi citit direct din curba din fig. 4 pentru valoarea respectivă $g_1$.

In fig 5 este reprezentată variația coeficienților $H$ și $G$ în funcție de $g_1$.

Din aceste curbe rezultă că este recomandabil să se aleagă $g_1$ între 1,5 și 2, deoarece în aceste condiții influența variațiilor $\Delta h$ și $\Delta g$ este minimă ($G$ trece prin zero, iar $H$ are o valoare aproximativ constantă.

Cu ajutorul formulelor (25) și (26) se poate calcula $B = -\frac{f_0}{Q}$ atunci cînd se dă $d_3$ maximum admis și $\Delta f$, luînd pentru $H$ și $G$ valorile absolute ale acestor mărimi.

Se observă că în general făcînd calculul pe baza factorului de distorsiune datorit armonicei a 3-a, factorul de distorsiune datorit armonicei a 5-a este neglijabil.

In urma celor arătate, rezultă metoda de proiectare a discriminatorului de fază.

Se alege $g_1$ între 1,5 și 2 și se determină $h_1$ din relația (23).

Se fixează toleranțele maxime $\frac{\Delta h}{h}$ și $\frac{\Delta g}{g}$.

Se determină parametrul $b$ din curba din fig. 4.

Se calculează $H$ și $G$ cu formulele (26).

Cunoscînd valoarea maximă $d_{3max}$ admisă pentru $d_3$, se pune condiția :

$$d_3 \leq d_{3\ max}$$

și se deduce $\delta = \frac{2\Delta f}{B}$ din relația (25).

In orice caz,, se ia $\delta < 1$, pentru a rămîne în regimul de lucru cvazistaționar.

Se deduc factorii de calitate ai circuitelor $Q_1 = Q_2 = \frac{\delta f_0}{2\Delta f}$, în care $\Delta f$ este deviaţia maximă de frecvenţă, şi coeficientul de cuplaj $k = \frac{g_1}{Q_1}$.

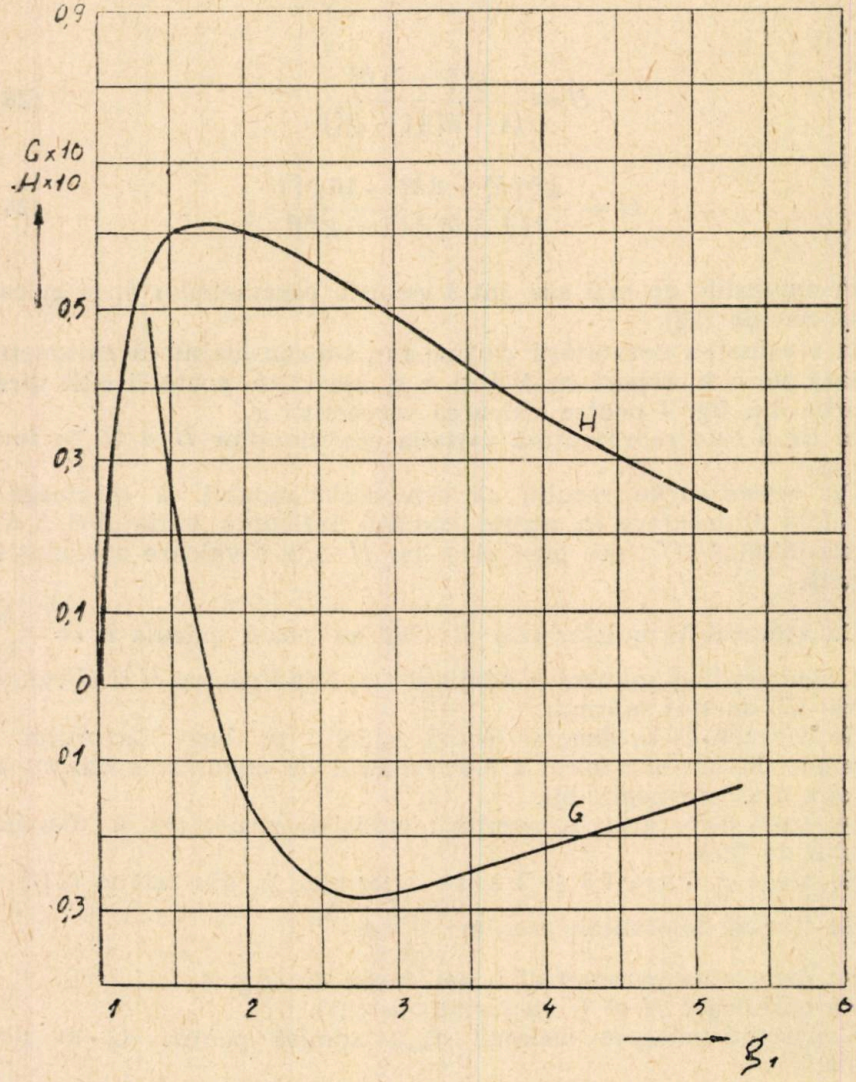



Fig. 5 — Curbele de variaţie ale factorilor $G$ şi $H$ în funcţie de $g$, în condiţiile de anulare a armonicei a 3-a.

Capacitatea totală din secundar $C_2'$ este formată din capacitatea de acord $C_2$ plus capacitatea $C_{aa}$ introdusă de diode

$$C_2' = C_2 + C_{aa} \quad .$$

Capacitatea totală $C_1'$ din primar este formată din capacitatea de acord $C_1$ plus capacitatea de ieșire a tubului.

Pentru $C_1'$ și $C_2'$ există relația :

$$\frac{C_1'}{C_2'} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{h^2}{g^2} = \frac{h_1^2}{g_1^2} \tag{27}$$

Tensiunea $U_{m1}$, la ieșirea din demodulator se calculează cu formula (19) în care

$$R_{d1} = \omega_0 L_1 Q_1 \tag{28}$$

Folosind formulele (5) și (6) se poate deduce expresia tensiunii la ieșirea din demodulator, în funcție de frecvență, în regim staționar sau cvazistaționar. Se obține :

$$u_m = \eta_d S U_g R_{d1} \theta \tag{29}$$

în care $\theta$ este dat de :

$$\theta = \frac{\sqrt{1 + \left(x + \frac{h}{2}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(x - \frac{h}{2}\right)^2}}{\sqrt{(1+g^2)^2 - 2(g^2-1)x^2 + x^4}} \tag{30}$$

și :

$$x = F Q \simeq \frac{2 f_v}{f_0} Q \tag{31}$$

In fig. 6 sînt reprezentate curbele de variație ale factorului $\theta$, în funcție de $x = F Q$, pentru diferite valori ale lui $g$ luat ca parametru, în cazul cînd este satisfăcută condiția de anulare a armonicei a 3-a și $h$ este dat de (23).

Panta curbelor tensiunii la ieșirea din demodulator, în funcție de frecvență, în origine ($f = f_r$) este dată de :

$$S_d = \frac{2 \eta_d S U_g R_{d1} h Q}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{4}(1 + g^2)}} \tag{32}$$

In cazul cînd, din alte considerații, $g$ trebuie luat mai mic decît unu (de ex. la detectorul de raport), ecuația (23) nu poate fi satisfăcută și circuitele se dimensionează pe baza formulelor (20), (21).

*Exemplu de calcul.* Se dă $f_0 = 10{,}7\ MHz$ , $\Delta f = 75\ KHz$ Se admite $\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta g}{g} = 0{,}1$, se cere ca factorul de distorsiune corespunzător armonicei a 3-a să fie mai mic decît 0,5%.

Se alege $g = 1{,}73$ și din curba din fig. 3 rezultă $h = 2$ ; se deduce apoi $H = 0{,}0625$ $G = 0$.

Din curba din fig. 4 se deduce $b < 0{,}25\%$

Se scrie atunci :

$$d_3 = (0{,}0625 \times 0{,}1 + 0 \times 0{,}1)\,\delta^2 + 5 \times 0{,}0025\,\delta^4 = 0{,}005$$

sau

$$0{,}5\delta^2 + \delta^4 = 0{,}4$$

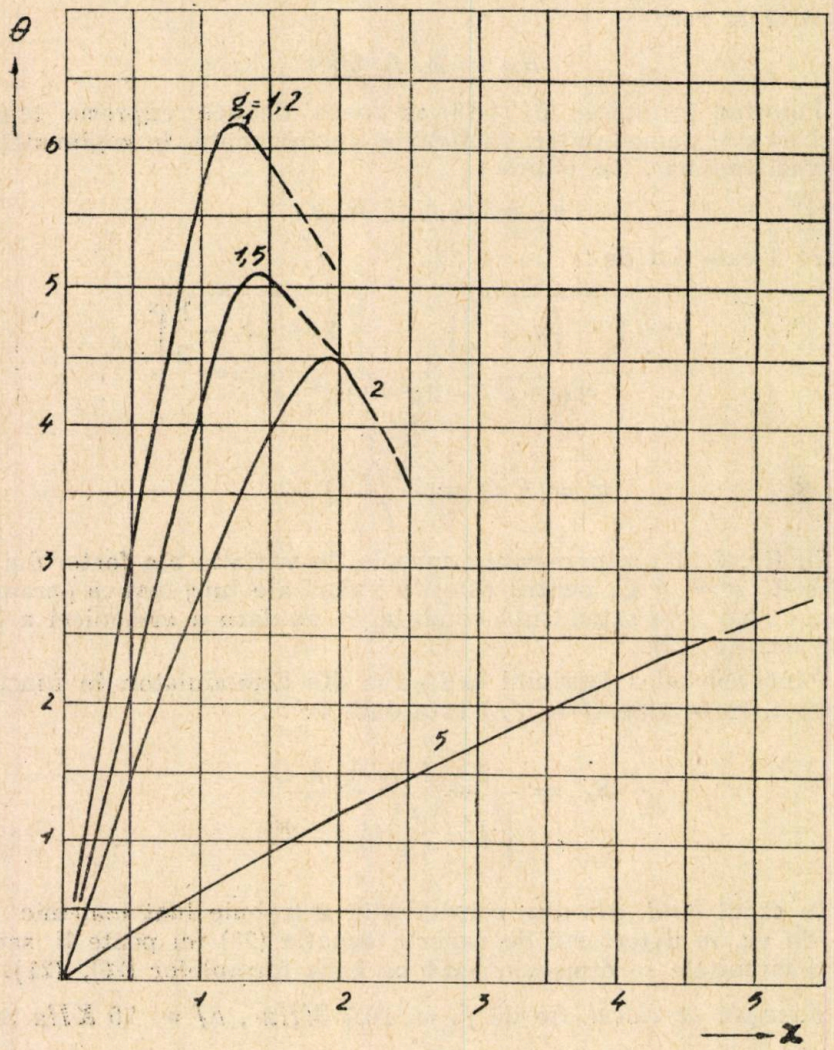



Fig. 6 — Curbele factorului θ în funcţie de parametrul $x = Q\,F$, pentru diferite valori ale lui $g$, în condiţiile de anulare a armonicei a 3-a. Tensiunea la ieşirea din demodulator este dată de relaţia $u_m = \eta_d\, SU_g\, R_{d1}\theta$.

și se găsește :

$$\delta = 0{,}655 \qquad Q = \frac{0{,}655 \times 10.700}{2 \times 75} = 46{,}6$$

$$k = \frac{1{,}73}{46{,}6} = 3{,}72\ \%$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{4}{3} = 1{,}33 \ .$$

Presupunînd $C_2' = 30\ p\ F$ rezultă :

$$L_2 = \frac{1}{\omega_0^2 C_2'} = \frac{10^6}{30 \times 6{,}28^2 \times 10{,}7^2} = 7{,}35\ \mu\ H$$

$$L_1 = \frac{7{,}35}{1{,}33}\ \mu\ H = 5{,}5\ \mu\ H$$

In studiul de față s-au calculat factorii de distorsiune corespunzători armonicelor de ordinul 3 și 5 la discriminatorul de fază și s-a indicat metoda de calcul a discriminatorului pe baza distorsiunilor maxime admise.

Metoda de calcul dată este simplă și mai precisă decît metodele grafice utilizate în general pînă în prezent.

*Catedra de Radiocomunicații*

Primit la redacție la 1 VII 1956.

## BIBLIOGRAFIE

1. *T. Vellat* — Der Empfang frequezmodulierter Wellen. E. N. T.; nr. 18, aprilie 1941 61-96.

2. *S. V. Novakovschi și G. P. Samoilov* — Tehnika ciastotnoi moduliații v radioveșanii. 1952 ; cap. 5.

3. *I. S. Gonorovskii* — Ciastotnaia moduliația i ee primeneniia. 1954 ; cap. 7.

4. *A. A. Kulikovskii* — Ciastotnaia moduliația v radioveșanii radiosviazi. 1947 : cap. 7.

5. *K. R. Sturley* — The Phase Discriminator ; Wireless Engineer ; februarie 1944 ; pag. 72.

6. *J. R. Carson and T. C. Fry* — Variable Electric Circuit Theory with Application to the Theory of Frequency Modulation B. S. T. J. ; nr. 16 ; octombrie 1937 ; 513-540

7. *Gh. Cartianu* — Bazele Radiotehnicei. Editura Ministerului Învățămîntului. vol. I ; 1955 cap. 7 ; paragr. 11 și paragr. 20.

## РАСЧЁТ ИСКАЖЕНИЙ ФАЗОВОГО ДИСКРИМИНАТОРА

(Краткое содержание)

Авторы изучают искажения, которые вносят в цепях фазовый дискриминатор.

Определяются формулы искажений, соответствующие третьей и пятой гармоникам. Из формул видно, что в зможно нулировать третюю гармонику и получить таким образом найлучший режим работы; устанавливается условие так го режима. Вокруг найлучшего режима, авторы изучают величины искажений в зависимости от изменений параметров дискриминатора.

В конце работы указан метод практического проектирования фазового дискриминатора, имея в виду предельные допустимые искажения.

## LE CALCUL DES DISTORSIONS INTRODUITES PAR LE DISCRIMINATEUR DE PHASE

(Résumé)

Les auteurs étudient les distorsions introduites par le discriminateur de phase dans le cas des oscillations modulées en fréquence.

On établit les formules des facteurs des distorsions correspondant aux components harmoniques du 3-émè et du 5-ème ordre.

On déduit qu'il est possible d'obtenir l'annulation de la 3-ème harmonique et de réaliser ainsi les conditions optima de fonctionnement. On analyse après les distorsions par rapport à la variation des paramètres du discriminateur, provoquée par l'instabilité des élèments du discriminateur.

A la fin de l'article on indique la méthode de dimensionner les éléments des discriminateurs de phase en tenant compte des distorsions maxima admissibles.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

621.391.1

# CU PRIVIRE LA PROBLEMA DIAFONIEI IN RADIORELEELE CU DUBLĂ MODULAŢIE: DE IMPULSURI (IN POZIŢIE) ŞI DE FRECVENŢĂ

de ELI KATZ

Sistemul considerat este un sistem cu modulaţie de impulsuri în poziţie cu modularea suplimentară a purtătoarei în frecvenţă. Fiecare impuls radio este "purtătorul" a două semnale : un semnal, care determină poziţia impulsului respectiv (calea cu modulaţie de poziţie) şi al doilea semnal, care determină frecvenţa purtătoarei (calea cu modulaţie de frecvenţă).

In cele ce urmează vom studia diafonia care ia naştere în blocul de radiofrecvenţă al receptorului, între căile cu modulaţie de impulsuri şi cele cu modulaţie de frecvenţă. Pot avea loc două fenomene : trecerea semnalului din calea cu modulaţie de frecvenţă în cea cu modulaţie de impulsuri şi invers trecerea semnalului din calea cu modulaţie de impulsuri în cea cu modulaţie de frecvenţă.

Trecerea semnalului din calea cu modulaţie de impulsuri în cea cu modulaţie de frecvenţă (în blocul de radiofrecvenţă) nu prezintă o problemă Forma corespunzătoare a impulsurilor şi distanţa minimă dintre impulsuri care asigură o cale de pătrundere a semnalului din căile vecine (în timp) asigură implicit şi protecţia căii cu modulaţie de frecvenţă de influenţa semnalului din calea cu modulaţie în poziţie.

Cu totul altfel se prezintă lucrurile din punct de vedere al trecerii semnalului din calea cu modulaţie de frecvenţă în cea cu modulaţie de poziţie.

Intr-adevăr, datorită faptului că banda receptorului este limitată, înfăşurătoarea impulsurilor radio care trec prin blocul de radiofrecvenţă este distorsionată.

In sistemul considerat, purtătoarea este modulată în frecvenţă. Aceasta duce la distorsionarea suplimentară a înfăşurării impulsurilor, adică la deplasări ale frontului impulsului în funcţie de variaţiile frecvenţei purtătoarei. Cu alte cuvinte, ca urmare a limitării benzii de frecvenţă ia naştere diafonia din calea cu modulaţie de frecvenţă în cea cu modulaţie de poziţie, deoarece ca urmare a modulării frecvenţei purtătoarei ia naştere modularea parazită a frontului impulsului.

In literatură nu există date asupra nivelului acestei modulaţii parazite şi a influenţei diferiţilor parametri ; se indică doar, pe baza unor considerente generale, necesitatea lărgirii benzii de trecere a receptorului cu o mărime egală cu dublul deviaţiei maxime de frecvenţă. [1], fără a se putea preciza dacă această măsură, este sau nu suficientă.

In studiul de faţă, se analizează acest proces de modulaţie parazită, se stabileşte influenţa diferiţilor parametri, se arată că măsura mai sus pomenită nu este totdeauna eficace, se recomandă o serie de

măsuri care reduc sensibil nivelul modulației parazite. Formele stabilite, cum și eficacitatea măsurilor propuse au fost confirmate experimental.

* * *

Deși purtătoarea impulsului este modulată în frecvență, noi vom considera frecvența purtătoarei constantă pe toată durata unui impuls, ea modificîndu-se doar de la impuls la impuls, corespunzător cu semnalul modulator din calea cu modulație de frecvență.

Este ușor de arătat că aproximația făcută este justificată. Fie într-adevăr, frecvența instantanee:

$$f = f_0 + \Delta f \sin 2\pi F t \tag{1}$$

unde $f_0$ este frecvența purtătoarei (nemodulate);
$\Delta f$ — deviația maximă de frecvență;
$F$ — frecvența modulatoare.

In timpul emiterii unui impuls de durată $\tau$, frecvența purtătoarei variază cu:

$$\Delta f' = \Delta f \sin 2\pi F \tau$$

Considerînd $F = F_{max} = 3000$ Hz (cale telefonică), $\tau = 1$ $\mu s$, $\Delta f = 1$ *MHz* obținem ($2\pi F \tau \ll 1$):

$$\Delta f'_{max} \cong \Delta f \cdot 2\pi F \tau = 20\ kHz$$

Frecvența intermediară a unui receptor de radioreleu este cuprinsă în general în gama 30 — 60 *MHz*; de aici rezultă că și în cazul cel mai defavorabil variația purtătoarei în timpul $\tau$ nu depășește 0,06 %.

Această aproximare ne permite să studiem diafonia ca rezultat al distorsionării înfășurătorii impulsului, distorsionare izvorîtă din faptul că frecvența purtătoarei nu coincide cu frecvența centrală de acord a receptorului.

Caracteristica de amplitudine a blocului de radiofrecvență, cum și înfășurătoarea impulsului le vom aproxima cu funcția în formă de clopot $[Me^{-n\lambda^2}]$. Această aproximare ne va permite să obținem formule relativ simple care îngăduie nu numai să se tragă concluzii teoretice, ci și efectuarea de calcule numerice. Această aproximare este foarte apropiată de realitate deoarece blocul de radiofrecvență conține cîteva etaje cu circuite rezonante acordate.

Fie, prin urmare, impulsul la intrarea blocului de radiofrecvență:

$$u(\omega) = A e^{-\alpha t^2} \cos \omega_1 t \tag{2}$$

unde:

$A$ — amplitudinea impulsului;
$\alpha$ — parametru care caracterizează înfășurătoarea;

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi (f_0 + \Delta f \sin \Omega t_k) \tag{3}$$

— pulsația purtătoare,

$t_k$ — momentul transmiterii impulsului considerat.

Durata impulsului, considerată la nivelul $1/d$ din cel maxim, este (fig. 1) [2] :

$$\tau_1 = 2\sqrt{\frac{\ln d}{\alpha}}, \tag{4}$$

densitatea spectrală

$$G_{1i}(\omega) = A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{(\omega-\omega_1)^2}{4\alpha}} \tag{5}$$

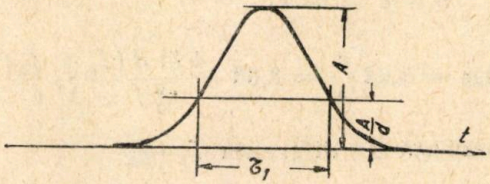



Fig. 1.

Lățimea spectrului semnificativ (la același nivel $1/d$) :

$$\Delta_1 f = \frac{4\ln d}{\pi\tau_1}. \tag{6}$$

Blocul de radiofrecvență are caracteristica de amplitudine :

$$K(\omega) = B\, e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\beta}} \tag{7}$$

unde $B$ — coeficientul de amplificare pe frecvența centrală de acord;
$\omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0$ — frecvența centrală de acord ;
$\beta$ — parametru care caracterizează lățimea benzii de frecvență.

Ținînd seamă că (7) reprezintă densitatea spectrală a impulsului la ieșirea blocului de radiofrecvență cînd la intrare se aplică impulsul unitar al lui Dirac, putem defini lățimea impulsului la ieșire (la același nivel $1/d$) :

$$\tau_0 = 2\sqrt{\frac{\ln d}{\beta}} \tag{8}$$

sau funcție de banda de trecere $\Delta_0 f$,

$$\tau_0 = \frac{4\ln d}{\pi\Delta_0 f} \tag{9}$$

In lucrarea amintită [2] se stabilesc următoarele relații între parametrii impulsului la intrarea și ieșirea din blocul de radiofrecvență și parametrii blocului.

Fie frecvența centrală de acord $f_0$, banda de trecere $\Delta_0 f$, frecvența purtătoarei $f_1$, banda impulsului la intrare $\Delta_1 f$. La ieșire ob-

ținem un impuls, a cărui purtătoare are frecvența determinată de relația (10) :

$$\frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_0} = \frac{\Delta_1^2 f}{\Delta_0^2 f}, \tag{10}$$

amplitudinea de "a" ori mai mică unde $a$ este dat de

$$a = e^{-\frac{c}{4}} = e^{-\frac{4 \ln d (f_1 - f_0)^2}{\Delta_0^2 f + \Delta_1^2 f}} \tag{11}$$

sau

$$a_{dB} = 8{,}68 \frac{c}{4} = 8{,}68 \frac{4 \ln d (f_1 - f_0)^2}{\Delta_0^2 f + \Delta_1^2 f} \tag{11'}$$

iar durata independentă de diferența $f_1 - f_0$

$$\tau_2 = \sqrt{\tau_0^2 + \tau_1^2} = 2 \sqrt{\frac{\ln d}{\gamma}} \tag{12}$$

unde

$$\gamma = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} \tag{13}$$

Benzile $\Delta_0 f$, $\Delta_1 f$, $\Delta_2 f$, cum și duratele $\tau_0$, $\tau_1$, $\tau_2$ sînt peste tot considerate la același nivel $1/d$ din cel maxim. Se vede imediat că modularea frecvenței purtătoarei $f_1$ duce la o modulație parazită de amplitudine (11). Aceasta la rîndul ei duce la o modulare parazită a frontului impulsului, deoarece momentul trecerii pragului de limitare este între altele determinat și de amplitudinea impulsului.

Să determinăm nivelul semnalului parazit și dependența acestuia de diferiții parametri.

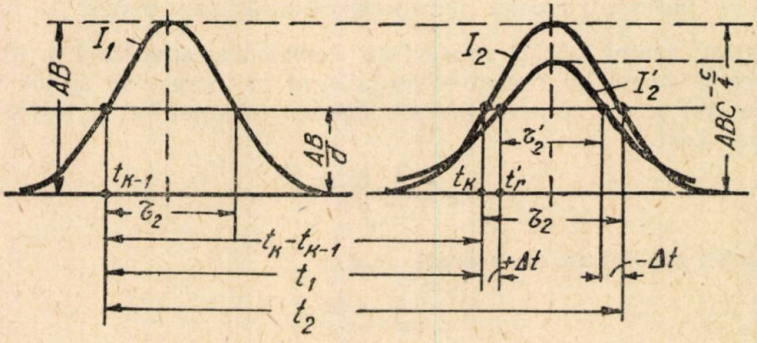



Fig. 2.

Fie un impuls oarecare, care apare la ieșirea blocului de radiofrecvență în momentul $t_{k-1}$ (ambele căi fiind nemodulate) (fig. 2). Momentul $t_{k-1}$ este definit ca momentul în care înfășurătoarea impulsului atinge valoarea $1/d$ din cea maximă. Presupunînd acum că im-

pulsurile sunt modulate în poziție (purtătoarea nefiind modulată), ele vor apărea în momentele $t_k$ definite de relația :

$$t_k + t_m \sin(\Omega_i t_k + \theta) = K T_r + t_0 \qquad (14$$

unde

$T_r$ — perioada de repetiție ;
$t_m$ — deplasarea maximă a impulsului ;
$\Omega_i = 2 \pi F_i$ , $F_i$ — frecvența modulatoare a căii cu modulație de impulsuri.

Mai departe. Dacă purtătoarea este modulată în frecvență, formula (12) arată că și în acest caz frontul atinge nivelul $1/d$ din cel maxim în momentul $t_k$. Cum însă amplitudinea maximă a scăzut cu $a_{dB}$ (11'), înseamnă că și nivelul atins în momentul $t_k$ este corespunzător mai mic. Nivelul $1/d$ din valoarea maximă posibilă, care este nivelul de limitare și care determină în esență poziția impulsului respectiv, este atins însă mai tîrziu și anume în momentul $t'_k$ (fig. 2). Mărimea $\delta t = t'_k - t_k$ (15), care dă diferența dintre momentul depășirii pragului de limitare în cazul purtătoarei modulate și momentul depășirii în cazul în care purtătoarea n-ar fi modulată, reprezintă deplasarea parazită.

Din fig. 2 se vede că :

$$\delta t = t'_k - t_k = \overline{ac} - \overline{bc} = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau') ,$$

unde

$$\tau' = 2\sqrt{\frac{\ln d'}{\gamma}}$$

de unde

$$\delta t = \sqrt{\frac{\ln d}{\gamma}} - \sqrt{\frac{\ln d'}{\gamma}} \qquad (16)$$

$d'$ îl determinăm din condiția egalității nivelelor înfășurătorilor a două impulsuri radio, unul cu purtătoare $\omega_0$, celălalt $\omega_2$ — unul fiind considerat la nivelul $1/d$, celălalt la $1/d'$ din valoarea maximă respectivă.

Considerînd amplitudinea de rezonanță $AB = 1$, avem evident fig. 2 (11)

$$\ln d' = \ln d - \frac{c}{4} \qquad (17)$$

De unde

$$\delta t = \sqrt{\frac{\ln d}{\gamma}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{c}{4 \ln d}}\right] \qquad (18)$$

Ținînd seama de expresia lui $\frac{c}{4}$ și de faptul că

$$f_1 - f_0 = \Delta f \sin \Omega t_k \qquad (19)$$

obținem

$$\delta t = t_k' - t_k = \frac{\tau_2}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\,\Delta f^2 \sin^2 \Omega t_k}{\Delta_0^2 f + \Delta_1^2 f}}\right] \tag{20}$$

Notînd

$$K^2 = \frac{4\,\Delta f^2}{\Delta_0^2 f + \Delta_1^2 f} \tag{21}$$

obținem:

$$\delta t = \frac{\tau_2}{2}\left[1 - \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \Omega t_k}\right] \tag{22}$$

Se vede imediat că semnalul parazit este puternic distorsionat. Dezvoltînd $\delta t$ în serie

$$\delta t = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\, 2\, \pi\, \Omega\, t}{T}$$

și calculînd fundamentala, obținem amplitudinea $a_1$,

$$a_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\tau_2}{2}\left[1 - \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \Omega t}\right] \cos 2\,\Omega t\, d\,(\Omega t) \tag{23}$$

Punînd $\Delta x = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Omega t}$ și ținînd seama că [3].

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\Delta x} = \mathbf{K}\,(K)\,, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{\Delta x}\, dx = \mathbf{K}\,(K) - \mathbf{D}\,(K)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 4x}{\Delta x}\, dx = \left[1 - \frac{1}{3K^2}\right]\mathbf{K}\,(K) + \left[\frac{2}{3K^2} - \frac{4}{3}\right]\mathbf{D}(K)$$

$$\mathbf{D}\,(K) = \frac{1}{K^2}\,[\mathbf{K}\,(K) - \mathbf{E}\,(K)]$$

unde $\mathbf{K}\,(K)$ și $\mathbf{E}\,(K)$ sînt integralele eliptice de prima și a doua speță, obținem:

$$a_1 = \frac{4\,\tau_2}{3\pi}\left\{\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{K^2}\right]\mathbf{E}\,(K) - \left[1 - \frac{1}{K^2}\right]\mathbf{K}\,(K)\right\} \tag{24}$$

Pentru $K < 1$ [$K > 1$ înseamnă că impulsul nici nu atinge, pentru unele valori ale lui $t$, nivelul de limitare] [3] :

$$E(K) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - 2\frac{K^2}{8} - 3\left(\frac{K^2}{8}\right)^2 - 10\left(\frac{K^2}{8}\right)^3 - \frac{175}{4}\left(\frac{K^2}{8}\right)^4 \ldots\ldots\right\}$$

$$K(K) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + 2\frac{K^2}{8} + 9\left(\frac{K^2}{8}\right)^2 + 50\left(\frac{K^2}{8}\right)^3 + \frac{1225}{4}\left(\frac{K^2}{8}\right)^4 + \ldots\ldots\right\} \text{ și}$$

deci (24) se scrie :

$$|a_1| = \frac{\tau_2}{8}\left[K^2 + \frac{1}{4}K^4 + \frac{115}{768}K^6 + \ldots\ldots\right] \tag{25}$$

Pentru a hotărî cîți termeni trebuiesc reținuți în expresia (25) trebuie să apreciem ordinul de mărime a lui $K$, în sistemele cu un nivel al diafoniei suficient de redus.

Fie deviația maximă a impulsului de ordinul $\Delta t_m \simeq 1{,}5\ \tau_2$ și de asemenea, în primă aproximație, $\delta t \simeq |a_1| \simeq \frac{\tau_2}{8} K^2$. Definind atenuarea de trecere $Z$ prin raportul dintre deviația datorită semnalului util și deviația parazită, obținem :

$$Z = \frac{\Delta t_m}{\delta t} \simeq \frac{1{,}5\ \tau_2}{\frac{\tau_2}{8}K^2} = \frac{12}{K^2}$$

sau în decibeli

$$Z \simeq 20 \log 12 - 20 \log K^2$$

Pentru un $Z$ de ordinul a 60 $dB$, rezultă pentru

$$K^2 \simeq 0{,}01 \text{ și pentru } K \simeq 0{,}1$$

Ținînd seamă de ordinul de mărime a lui $K$, din (22) obținem pentru $\delta t$ :

$$\delta t \simeq \tau_2\left\{\frac{1}{8}\left(K^2 + \frac{3}{4}K^4\right) - \frac{1}{8}\left(K^2 + \frac{K^4}{8}\right)\cos 2\Omega t + \frac{K^4}{128}\cos 4\Omega t\right\} \tag{26}$$

(termenii neglijați reprezintă, chiar pentru $K^2 = 0{,}5$ mai puțin de $3\%$). Din această expresie rezultă că semnalul se distorsionează puternic (în cazul unui semnal complex apar nu numai armonicele ci și frecvențele de combinație). Ținînd însă seamă de faptul că nu există un criteriu potrivit căruia să se poată afirma că o anumită distorsiune face semnalul neinteligibil [4], va trebui considerat că avem deaface cu diafonie și nu cu zgomot parazit. Se știe că normele prevăd condiții mai grele pentru diafonie (52 $dB$) decît pentru zgomot (40 $dB$).

Pentru calculele ulterioare, expresia lui $\delta t$ poate fi simplificată și mai mult renunțînd la termenul constant (care n-are nici o semnificație) și la aceia care reprezintă mai puțin de $10^0/_0$ (1 *dB*), pentru $K^2 = 0.3$. Obținem :

$$|\delta t| \simeq \tau_2 \frac{K^2}{8} \cos 2\Omega t \,. \tag{27}$$

Din expresia lui $K^2$ (21) rezultă că deviația parazită crește aproximativ direct proporțional cu pătratul deviației maxime de frecvență; scade cu mărirea benzii de frecvență și scade cu creșterea spectrului impulsului $\Delta_1 f$, adică cu micșorarea duratei impulsului $\tau_1$. Din punct de vedere fizic, ultimul rezultat se explică astfel : cu cît impulsul la intrare va fi mai scurt, cu atît, pentru o bandă de frecvență dată, lățirea lui la ieșire va fi proporțional mai mare și prin urmare distorsiunea suplimentară datorită dezacordului se va resimți mai puțin.

In proiectarea unei căi de telecomunic ție nu interesează însă nivelul absolut al semnalului perturbator, ci raportul dintre semnalul util și cel perturbator, raport pe care în cazul nostru îl vom numi atenuarea de trecere a semnalului din calea cu modulație de frecvență în cea cu modulație de impulsuri, sau pe scurt atenuarea de trecere. El ne va indica gradul de protecție al căii considerate de influența semnalului perturbător.

Exprimînd deviația utilă a frontului în funcție de durata impulsului la intrarea sau la ieșirea blocului de radiofrecvență

$$\Delta t_m = m_1 \tau_1 = m_2 \tau_2 \tag{28}$$

atenuarea de trecere $Z$ se exprimă ca raportul dintre deviația utilă și cea parazită :

$$Z = \frac{\Delta t_m}{\delta t}$$

sau ținînd seamă de (27) și (28)

$$Z = 8\, m_2\, K^{-2} \tag{29}$$

In decibeli, ținînd seamă și de expresia lui $K^2$ (21),

$$Z_{dB} = 20 \left[\log 8 + \log m_2 - 2 \log 2 - 2 \log \Delta f + \log \left(\Delta_0^2 f + \Delta_1^2 f\right)\right] \tag{30}$$

Notînd cu $n$ raportul dintre banda de frecvență și lățimea spectrului impulsului (considerate la același nivel $1/d$)

$$n = \frac{\Delta_0 f}{\Delta_1 f} \tag{31}$$

și ținînd seamă de (28), (12) și (6) obținem :

$$m_2 = \frac{\Delta t_m}{\tau_2} = \frac{n\, \Delta t_m}{\tau_1 \sqrt{1 + n^2}} \tag{32}$$

$$\Delta_0^2 f + \Delta_1^2 f = \frac{4\, ln\, d}{\pi\, \tau_1} (n^2 + 1) \tag{33}$$

Introducînd în (30), obținem în fine pentru $z$:

$$Z_{dB} = 10 + 20 \log \Delta t_m - 40 \log \Delta f + 40 \log ln\, d - 60 \log \tau_1 + \\ + 20 \log n \sqrt{n^2 + 1} \qquad (34)$$

Expresia (34) ne permite să trecem la analiza influenței diferiților parametri asupra mărimii atenuării de trecere și să stabilim criterii raționale de proiectare.

Să începem cu considerarea influenței nivelului de limitare, adică a mărimii «$d$». Considerînd toți ceilalți parametri ai sistemului cunoscuți și ținînd seamă de (4) obținem pentru $z_{dB}$ expresia:

$$Z_{dB} = Z_0 + 10 \log ln\, d \qquad (35$$

unde $Z_0$ este mărime independentă de $d$.

Se știe (2) că raportul maxim semnal la zgomot se obține pentru $d = \sqrt{e}$, valoare pentru care panta frontului este maximă. Vom lua deaceea valoarea $d = \sqrt{e}$ ca origină și vom considera variația lui $z_{dB}$ cînd ridicăm sau coborîm pragul de limitare. Pentru $d = \sqrt{e}$, 10 log $lnd = -3$ și notînd $Z_{\sqrt{e}} = Z_0 - 3$ avem:

$$Z_{dB} = Z_{\sqrt{e}} + 3 + 10 \log ln\, d$$

Dependența lui $z_{dB}$ de «$d$» este dată in fig. 3. Se vede că un oarecare cîștig s-ar putea obține coborînd nivelul de limitare. Această coborîre ar duce însă la o puternică scădere a raportului semnal la zgomot; pentru valorile curente ale lui $d$ ($\sqrt{e} \sim 2$) se poate considera că practic nivelul de limitare nu are nici o influență asupra atenuării de trecere.

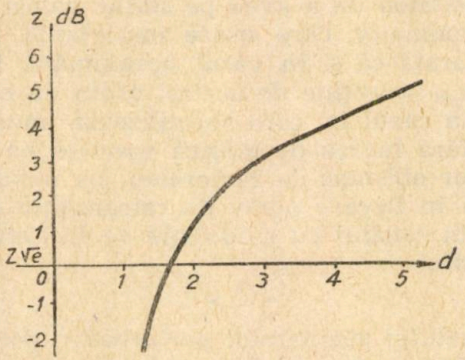



Fig. 3.

Evident, cu cît deviația maximă a impulsului $\Delta t_m$ este mai mare, cu atît și $Z_{dB}$ este mai mare. Introducerea suplimentară a modulației de frecvență, pentru mărirea numărului de căi, are însă sens numai

atunci cînd căile de impulsuri au fost «îndesite» la maximum. In asemenea situaţie, mărimea lui $\Delta t_m$ este cuprinsă între 1,5 şi 7,5 $\mu$ s.

Deviaţia maximă de frecvenţă $\Delta f$ are o influenţă puternică asupra lui $z_{dB}$ Pentru $\Delta f$ trebuie aleasă prin urmare valoarea minimă posibilă. Raţional este ca pe căile cu modulaţie de frecvenţă să obţinem acelaşi raport semnal la zgomot ca şi pe cele cu modulaţie de impulsuri. Datele experimentale publicate în literatură [1] arată că pentru $\Delta f$ trebuie aleasă o valoare în jur de 1 MHz. In calculele noastre ulterioare vom lua $\Delta t_m = 1{,}5\ \mu$ s, $\Delta f = 1$ MHz. Cu ajutorul formulei (34), rezultatele pot fi foarte uşor recalculate pentru alte valori.

Influenţa celorlalţi doi parametri — a lărgimii benzii de frecvenţă $\Delta_0 f$ şi a duratei impulsului $\tau_1$ — o vom studia trasînd graficele $z_{dB} = f(\tau_0)$ cu $\Delta_0 f$ ca parametru. Pentru aceasta scriem în prealabil pe (34) sub forma:

$$Z_{dB} = 2 - 60 \log \tau_1 + 20 \log \frac{\pi}{2} \tau_1 \Delta_0 f \sqrt{\frac{\pi^2}{4} (\tau_1 \Delta_0 f)^2 + 1} \qquad (36)$$

unde $\tau_1$ este în $\mu$ s, $\Delta_0 f$ în MHz, ambele măsurate la nivelul corespunzător lui $d = \sqrt{e}$.

Atragem atenţia că, în general, în literatură durata impulsului se măsoară la nivelul corespunzător lui $d = 10$, iar banda la nivelul lui $d = \sqrt{2}$.

In fig. 4 sînt trasate curbele de variaţie a lui $z_{dB}$ funcţie de $\tau_1$ (în abscisă s-a notat $\tau_1$ la $d = 10$), pentru diferite valori ale lui $\Delta_0 f$ (indicate la $d = \sqrt{e}$ respectiv $\sqrt{2}$).

Considerarea graficelor din fig. 4 ne arată că pentru benzile de frecvenţă curent utilizate $\Delta_0 f = \frac{3 \sim 5}{\tau_1}$ adică 5 ... 8 MHz, $z_{dB}$ este insuficient, de ordinul 55 — 60 $dB$. Intr-adevăr $z_{dB}$ este calculat pe staţie. Intr-un radioreleu $z_{dB}$ minim pe întreg lanţul trebuie să fie cel puţin 52 $dB$. De aci necesitatea de a avea pe staţie valori mult mai mari.

Un calcul aproximativ, care n-are importanţă principială, şi de aceea nu-l redăm, arată că şi în cazul aproximării benzii de trecere cu un dreptunghi $z_{dB}$ se obţine de acelaşi ordin de mărime.

In concluzie, în cazul în care se utilizează modulaţia suplimentară de frecvenţă, fără luarea de măsuri speciale nu este posibilă utilizarea unui receptor obişnuit de radioreleu cu impulsuri. deoarece ca urmare a însumării în fiecare punct de retranslaţie a trecerii semnalului perturbator din canalul cu modulaţie de frecvenţă, aceasta depăşeşte nivelul admisibil.

* * *

Reducerea nivelului semnalului perturbator poate fi obţinută în primul rînd prin lărgirea benzii. Din graficele din fig. 4, rezultă că lărgirea benzii la 10 MHz asigură mai mult de 60 $dB$, ceea ce este suficient în cazul unui număr mic de puncte de retranslaţie, nu însă şi în cazul unui radioreleu de întindere mai mare. Lărgirea benzii la 10 MHz şi mai mult duce însă la scăderea raportului semnal la zgomot şi la mărirea numărului de etaje în amplificatorii de frecvenţă intermediară. Ambele înrăutăţesc calitatea radioreleului.

Un studiu mai amănunțit al distorsiunilor ivite ca urmare a modulării frecvenței arată însă posibilitatea realizării *demodulației* (prin demodulare înțelegem obținerea semnalului util din șirul de impulsuri video modulate în poziție) de asemenea manieră, încît să ducă la o creștere a lui $z_{dB}$.

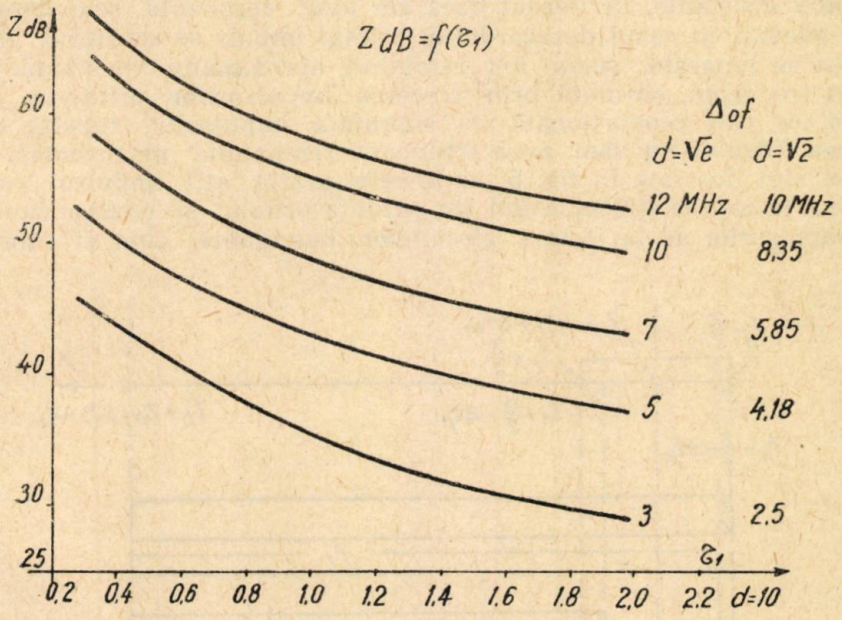



Fig. 4.

Intr-adevăr, în analiza făcută de noi am considerat frontul anterior și deplasarea parazită a acestuia, datorită semnalului perturbator. Se deplasează însă nu numai frontul anterior ci și cel posterior, cu singura deosebire că acesta se deplasează în *direcție contrară*.

Aceasta se vede imediat (fig. 2), $I_1$ — este un impuls oarecare video a cărui purtătoare a fost la rezonanță cu frecvența centrală a receptorului, $I_2$ — impulsul următor, în cazul în care de asemenea a avut loc rezonanța, $I'_2$ — impulsul următor în cazul dezacordului. Dacă luăm drept origine a timpului momentul cînd frontul anterior al lui $I_1$ atinge pragul de limitare, vedem că la rezonanță (impulsul $I_2$) frontul anterior atinge pragul după $t_1$ μs, cel posterior după $t_2$ μs, iar la dezacord (impulsul $I'_2$), frontul anterior atinge pragul *mai tîrziu*, și anume după $t_1 + \Delta t$ iar cel posterior *mai devreme*, după $t_2 - \Delta t'$ (în cazul general, deplasările nu sînt egale).

Modul de demodulație pe care îl propunem transformă modulația de poziție în modulație de durată (sau amplitudine) folosind ambele fronturi de asemenea manieră încît deplasările parazite să se însumeze algebric. Pentru valori just alese ale parametrilor, deplasarea parazită rezultantă va fi micșorată.

Să considerăm, de exemplu, transformarea modulației de poziție în modulație de durată cu ajutorul unui circuit bistabil. Fie în locul unui circuit bistabil, două — primul basculează, fiind comandat de frontul anterior, al doilea de cel posterior. Amîndouă circuitele se întorc în poziția inițială simultan sub acțiunea impulsului de repetiție. Insumînd impulsurile care se obțin la ieșirea acestor două circuite basculante, obținem o formă de undă a cărei suprafață rămîne aproximativ constantă, indiferent dacă am avut rezonanță sau dezacord. Intr-adevăr, în cazul dezacordului, primul impuls se scurtează iar al doilea se lungește, suma lor rămînînd aproximativ constantă. Cum joasa frecvență, obținută prin trecerea impulsurilor printr-un filtru trece jos, este proporțională cu suprafața impulsului, rezultă că la ieșirea filtrului nu vom avea frecvența semnalului perturbator. Cele spuse sînt ilustrate în fig. 5, unde este arătat atît impulsul care se obține la ieșirea limitatorului (în cazul acordului și dezacordului) cît și impulsurile de la ieșirea circuitelor basculante, cum și suma lor.

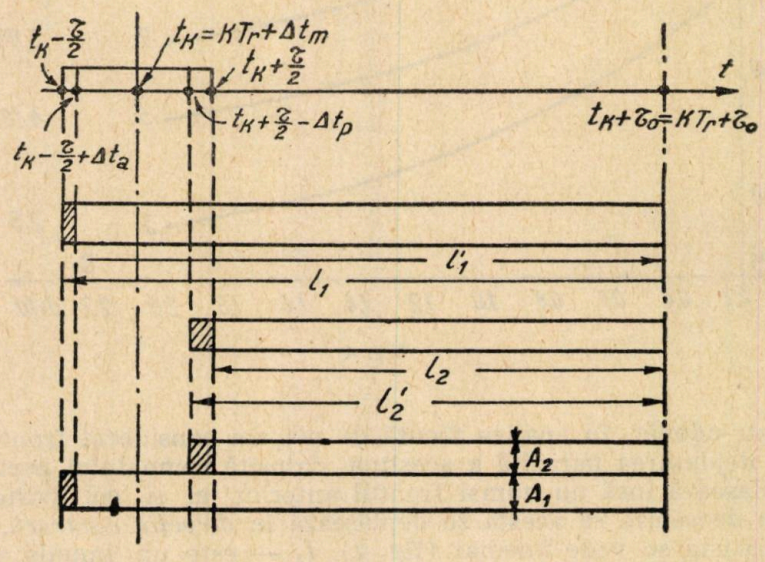



Fig. 5.

Să calculăm în ce măsură putem mări gradul de ferire al căii considerate de pătrunderea semnalului perturbator. Referindu-ne la notațiile din fig. 5, vom considera că impulsul comandat de frontul anterior începe în momentul $t_k - \frac{\tau}{2} + \Delta t_a$ (cu o întîrziere $\Delta t_a$). iar cel comandat de frontul posterior în momentul $t_k + \frac{\tau}{2} - \Delta t_p$ (adică cu $\Delta t_p$ înainte). $\tau$ este durata normală (în cazul acordului) a impulsului. Ambele impulsuri se termină în momentul $t_k + \tau_0$ corespunzător acționării impulsului de repetiție.

Ținînd seamă de faptul că $t_k = KT_r + \Delta t_m$ unde $\Delta t_m$ este deplasarea datorită modulației de poziție, obținem pentru impulsul comandat de frontul anterior o durată.

$$l_1' = K T_r + \tau_0 - K T_r - \Delta t_m + \frac{\tau}{2} - \Delta t_a = \tau_0' - \Delta t_m - \Delta t_a \qquad (37)$$

respectiv o suprafață:

$$S_1 = A_1 l_1' = A_1 (\tau_0' - \Delta t_m - \Delta t_a), \qquad (38)$$

iar pentru impulsul comandat de frontul posterior:

$$l_2' = K T_r + \tau_0 - K T_r - \Delta t_m - \frac{\tau}{2} + \Delta t_p = \tau_0'' - \Delta t_m + \Delta t_p \qquad (39)$$

respectiv

$$S_2 = A_2 \cdot l_2' = A_2 (\tau_0'' - \Delta t_m + \Delta t_p) \qquad (40)$$

Suprafața impulsului rezultat va fi:

$$S = S_1 + S_2 = A_1 \tau_0' + A_2 \tau_0'' - (A_1 + A_2) \Delta t_m - A_1 \Delta t_a + A_2 \Delta t_p \qquad (41)$$

Evident că dacă prin reglarea amplitudinii unuia dintre impulsuri obținem

$$A_1 \Delta t_a = A_2 \Delta t_p,$$

realizăm o compensare completă — semnalul perturbator este în întregime eliminat.

Din punct de vedere practic însă, o compensare completă nu este realizabilă. Să vedem pe ce îmbunătățire putem conta în mod sigur. Fie

$$m = \frac{\Delta t_p}{\Delta t_a} \qquad (42)$$

raportul deplasărilor parazite ale fronturilor posterior și anterior și

$$n = \frac{A_2}{A_1} \qquad (43)$$

raportul amplitudinilor.

Coeficientul care indică gradul de ferire îl putem defini ca raportul dintre deplasarea datorită semnalului util $\Delta t_m$ și cea datorită semnalului perturbator, fie $\Delta t_a$ (presupunem că utilizăm frontul anterior):

$$K_0 = \left| \frac{\Delta t_m}{\Delta t_a} \right| \qquad (44)$$

Din (41) obținem lungimea echivalentă a impulsului sumă la intrarea filtrului:

$$l_e = \frac{S_1 + S_2}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 \tau_0' + A_2 \tau_0''}{A_1 + A_2} - \Delta t_m + \frac{A_2 \Delta t_p - A_1 \Delta t_a}{A_1 + A_2} \qquad (45)$$

Al doilea termen din (45) exprimă influenţa semnalului util, al treilea a celui perturbator. Noul coeficient de ferire va fi:

$$K = \left| \frac{\Delta t_m}{\frac{A_2 \Delta t_p - A_1 \Delta t_a}{A_1 + A_2}} \right| . \tag{46}$$

sau ţinînd seamă de (42), (43) şi (44),

$$K = \left| K_0 \cdot \frac{n+1}{m\,n-1} \right| . \tag{47}$$

Să considerăm variaţia lui $K$, în ipoteza că raportul amplitudinilor este dat, cu modificarea raportului dintre deplasările parazite ale celor două fronturi, adică să reprezentăm $K = f(m)$ pentru «$n$» dat, $K$ fiind exprimat în decibeli. Această situaţie este cea mai apropiată de realitate: pentru un raport oarecare $m$, am reglat sistemul astfel ca să avem $K$ maxim; am stabilit prin urmare un anumit raport al amplitudinilor ($n$). In timpul f ncţionării, diverşii factori vor influenţa mult mai mult raportul $m$ decît $n$.

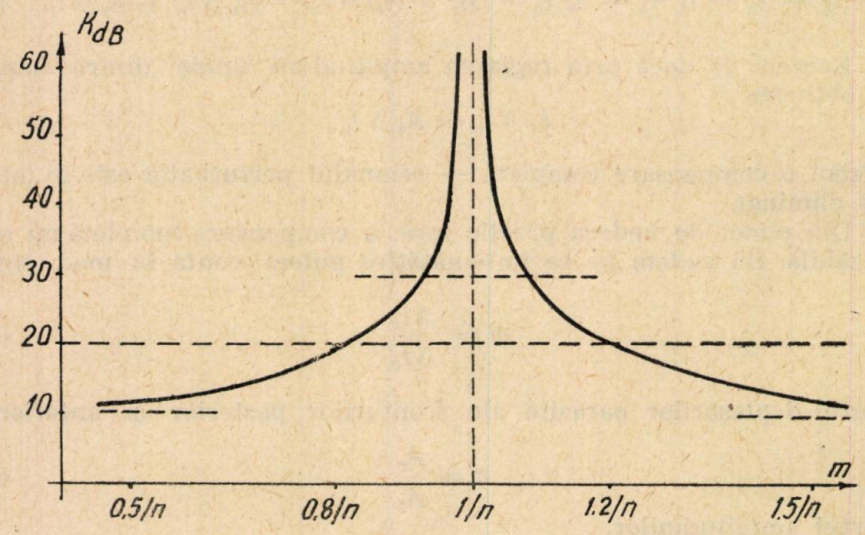



Fig. 6.

Din fig. 6 rezultă că, pentru variaţii ale raportului $m$ mergînd pînă la $\pm$ 20 % faţă de cel optim, se obţine încă un cîştig de 20 $dB$. Relativ uşor poate fi obţinut un cîştig de 30 $dB$ (variaţiile nu trebuie să depăşească $\pm$ 10 %).

Se poate arăta uşor că acelaşi cîştig se obţine şi în cazul transformării modulaţiei de poziţie în modulaţie de amplitudine.

Trebuie subliniat că modul de demodulaţie propus prezintă avantaje serioase, nu numai din punctul de vedere al slăbirii puternice a semnalului perturbător.

Intr-adevăr obținem în plus, pe de o parte, o amplificare suplimentară în joasă frecvență (c rca de două ori) deoarece conținutul impulsului sumă în joasă frecvență este aproximativ dublu față de impulsul obținut dela un singur front $(A_1 + A_2)\,\Delta t_m$, față de $A_1\,\Delta t_m$ sau $A_2\,\Delta t_m$. Pe de altă parte, crește raportul semnal la zgomot al sistemului, apropiindu-se de raportul potențial semnal la zgomot al sist mului. Se știe [5] că utilizarea frontului impulsului pentru obținerea semnalului util, în cazul modulației de poziție, asigură doar jumătate din raportul semnal la zgomot maxim care poate fi obținut cu acest sistem. Raportul maxim se obține cînd se utilizează centrul impulsului.

Sistemul propus nu înseamnă altceva, după cum se poate constata ușor, decît transformarea modulației de poziție în modulație de durată sau amplitudine cu utilizarea centrului impulsului.

Sistemul propus poate fi utilizat prin urmare. independent de prezența modulației suplimentare de frecvență, în toate cazurile în care e necesară obținerea unui raport semnal la zgomot maxim.

Se vede că utilizarea acestei metode duce la obținerea lui $Z_{dB}$ de ordinul a 80 $dB$, fără o lărgire exagerată a benzii de frecvență a receptorului, valoare care este complet satisfăcătoare.

## VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ

Experiențele făcute au urmărit două scopuri: primul, să verifice ordinul de mărime a atenuării $Z_{dB}$ dat de formula (34); al doilea, să verifice eficacitatea modului de demodulație propus.

Schema bloc a instalației este aceea din fig. 7. In modulator se elaborează impulsurile de repetiție, c ım și impulsurile modulate în poziție, respectiv în amplitudine. Acestea din urmă se aplică pe grilele tuburilor de reactanță, modulînd în frecvență emițătorul.

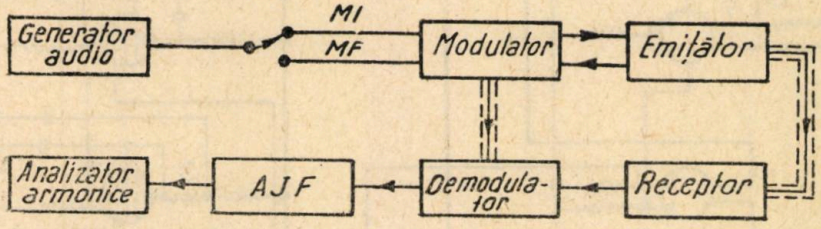



Fig. 7.

Pentru a evita cuplajele parazite (emițătorul și receptorul lucrau în aceeași cameră), atît impulsur le radio cît și cele video, de repetiție, erau transmise de la emițător la receptor, respectiv de la modulator la demodulator, prin cablu coaxial. Semnalul obținut la ieșirea demodulatorului era trecut printr-un amplificator de joasă frecvență și analizat cu ajutorul unui analizator armonic de mare selectivitate și sensibilitate.

Schema principială a părții de emisie (modulator plus emițător) este dată în fig. 8. Frecvența de repetiție este generată de oscilatorul

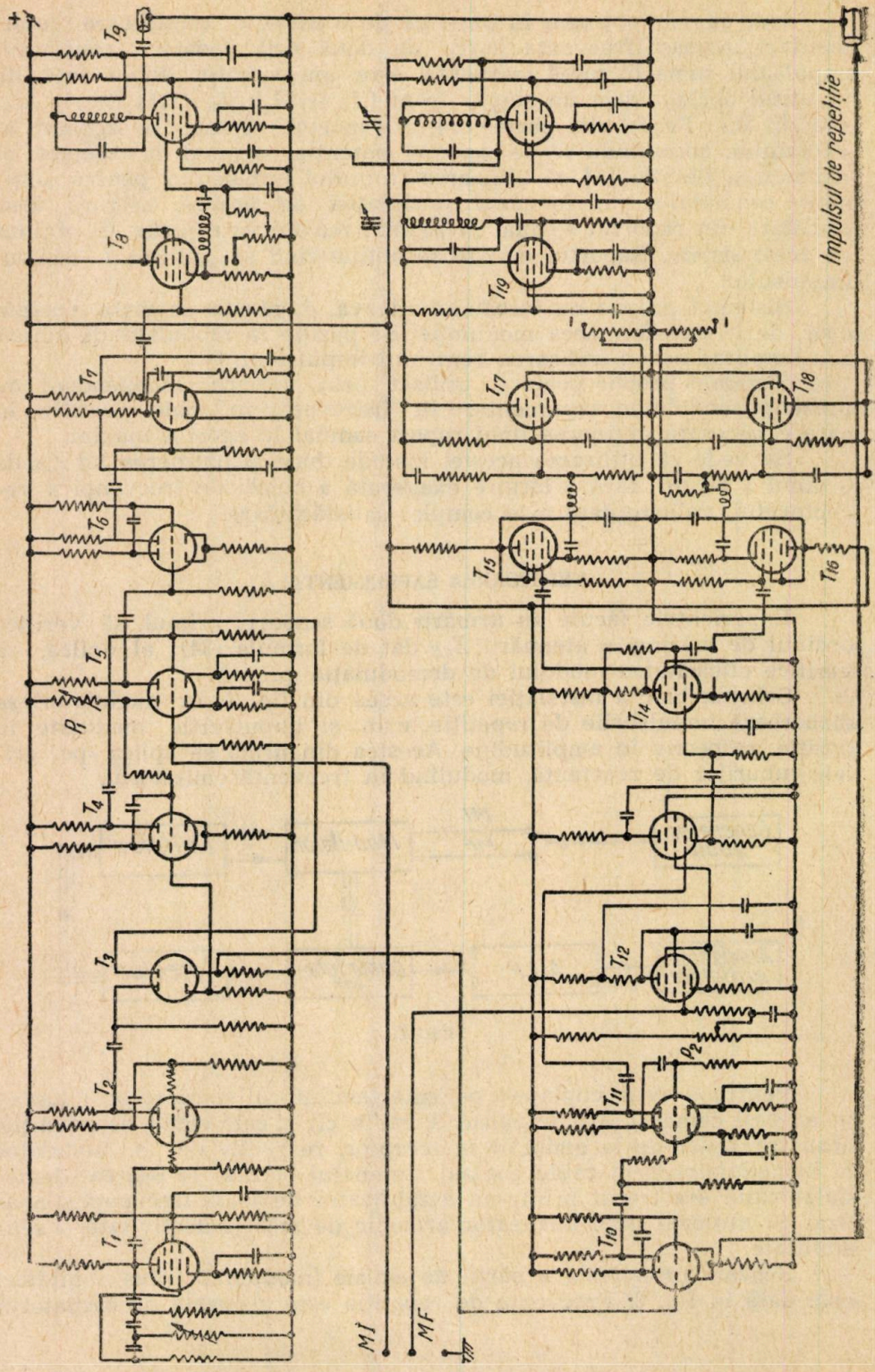

+
T9
T8
T7
T6
T5
T4
T3
T2
T1
R
T11
T19
T17
T18
T15
T16
T14
T12
T10
R2
Impulsul de repetiție
MI
MF

Fig. 8.

$RC$ ($T_1$), $f_r$ = 4100 $Hz$, $T_r$ = 244μs. Tubul $T_2$ limitează tensiunea sinusoidală formînd impulsuri dreptunghiulare care sunt imediat diferențiate. Impulsul diferențiat pozitiv, trecînd prin limitatorul $T_3$ (dioda din stînga), comandă circuitul basculant monostabil $T_4$. Frontul posterior al impulsului care se formează la a doua anodă a multivibratorului este modulat în poziție de semnalul care se aplică la grila primei triode a tubului $T_5$. Prin diferențiere și amplificare se obține un impuls ascuțit modulat în poziție. Acesta deschide al doilea circuit basculant monostabil $T_6$, care formează impulsul de durată dată, modulat în poziție. Acesta este de două ori limitat ($T_7$) și, prin repetorul catodic $T_8$, comandă pe grila supresoare etajul final al emițătorului ($T_9$). Deviația maximă a impulsului este reglată prin varierea amplitudinii semnalului aplicat pe grila primei triode a tubului $T_5$; cu ajutorul potențiometrului $P_1$ se alege poziția mijlocie.

Modulația de frecvență a oscilatorului se realizează astfel: impulsul pozitiv nemodulat în poziție, care se obține prin diferențierea impulsului de la anoda tubului $T_4$, trece prin dioda a doua a tubului $T_3$ și comandă circuitul basculant monostabil $T_{10}$, care formează un impuls de o durată mult mai mare decît impulsul format de circuitul basculant $T_4$.

In felul acesta, impulsul care se elaborează la comanda frontului posterior al circuitului $T_4$ se află amplasat undeva pe la mijlocul impulsului elaborat de circuitul $T_{10}$. In felul acesta, se asigură deschiderea emițătorului în momentul cînd pe grilele tuburilor de reactanță acționează impulsul modulator.

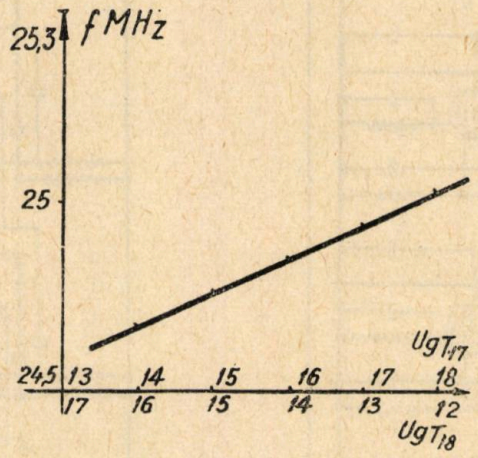



Fig. 9.

Impulsul elaborat de circuitul $T_{10}$ este limitat ($T_{11}$) și se aplică la grila tubului modulator $T_{13}$. La catoda acestui tub se obține un impuls modulat în amplitudine, deoarece tensiunea pe ecranul acestui

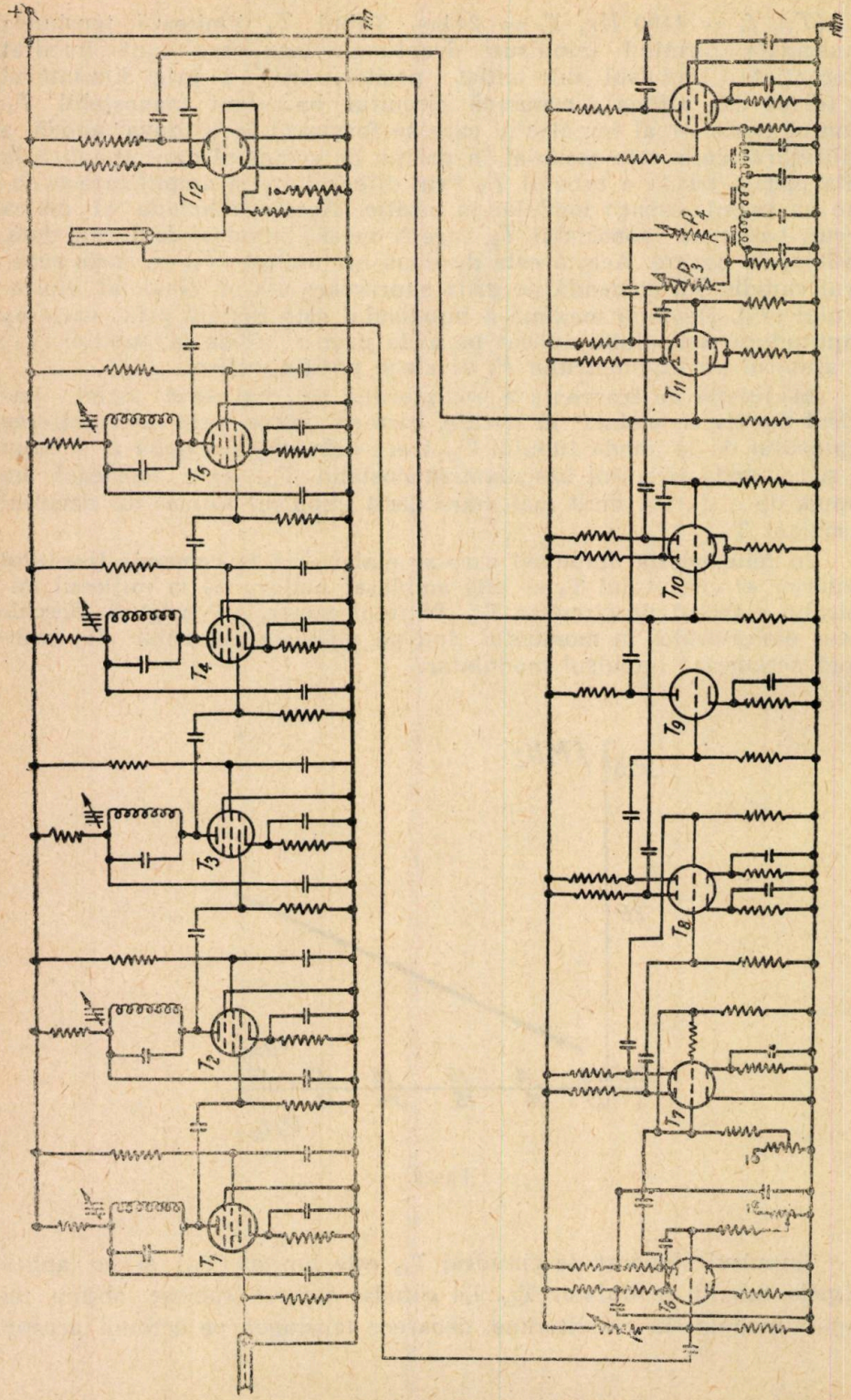



Fig. 10.

tub variază în concordanță cu semnalul care se aplică pe grila tubului $T_{12}$. Amplitudinea medie a impulsului se stabilește cu potențiometrul $P_2$.

Tubul $T_{14}$ lucrează ca inversor de fază. Cele două impulsuri, egale ca amplitudine și opuse ca fază, care se obțin de la anoda și catoda tubului $T_{14}$ se aplică, prin repetorii catodici $T_{15}$ și $T_{16}$, pe grilele tuburilor de reactanță $T_{17}$ și $T_{18}$, care modulează oscilatorul $T_{19}$. Tubul $T_{20}$ funcționează ca multiplicator de frecvență și excită etajul final $T_9$. Caracteristica de modulație, ridicată în regim static, este arătată în fig. 9.

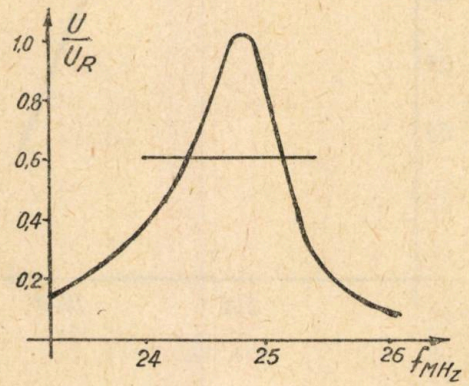



Fig. 11.

Schema principială a receptorului și demodulatorului este arătată în fig. 10. Receptorul are la intrare un amplificator acordat (tuburile $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$), ultimul tub lucrînd ca limitator.

Caracteristica de amplitudine este dată în fig. 11.

Impulsurile sînt detectate de pentoda $T_5$, limitatorul $T_6$ taie o „felie" din acest impuls și o amplifică, formînd impulsul detectat. Acesta este diferențiat. Tuburile $T_7$, $T_8$, $T_9$ elaborează din impulsurile diferențiate, corespunzînd fronturilor anterior și posterior, impulsurile de comandă ale circuitelor basculante $T_{10}$ și $T_{11}$. In felul acesta, circuitul $T_{10}$ este comandat de frontul anterior al impulsului recepționat iar $T_{11}$ de cel posterior.

Ambele circuite sînt readuse în poziția inițială de impulsurile elaborate de tubul $T_{12}$ din impulsul de repetiție. In felul acesta, circuitele $T_{10}$ și $T_{11}$ transformă modulația de poziție în modulație de durată. Cînd se lucrează cu un singur front se scoate din soclu tubul corespunzător comenzii celuilalt front. Potențiometrii $P_3$ și $P_4$ servesc la stabilirea raportului dintre amplitudinile celor două impulsuri.

Impulsurile astfel elaborate sînt trecute prin filtrul trece jos (caracteristica este dată în fig. 12) și apoi la grila amplificatorului de joasă frecvență ($T_{13}$). Frecvența modulatoare a fost aleasă între 300 și 380 Hz, astfel că filtrul să permită trecerea armonicei a doua și a treia.

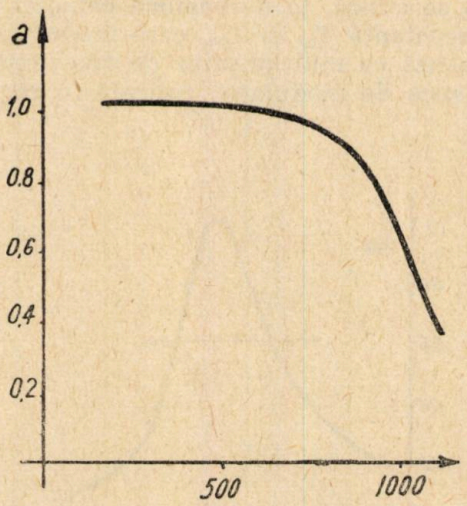



Fig. 12.

Măsurările au fost efectuate, parametrii fiind următorii:

Durata impulsului ($d = \sqrt{e}$) $\tau = 10\ \mu s$;
Deplasarea maximă a impulsului $\Delta t_m = 2\ \mu s$;
Banda de trecere a receptorului ($d = \sqrt{e}$), $\Delta_0 f = 685\ kHz$;
Pragul de limitare $d = 3{,}5$;
Frecvența purtătoarei $f_0 = 24{,}8$ MHz;
Deviația de frecvență în intervalul 15 —130 kHz.

Rezultatele cele mai importante ale experienței sînt date în fig. 13. Curba plină reprezintă curba obținută cu ajutorul formulei (34) calculată cu valorile parametrilor date mai sus. Ea reprezintă de fapt o măsurare indirectă a valorii lui $z_{dB}$ (deoarece valorile parametrilor sînt valori măsurate). Curba însemnată $A$ reprezintă $z_{dB}$ măsurat cu ajutorul analizatorului de armonice, în cazul în care demodularea se făcea folosind frontul anterior. Curba $P$ reprezintă atenuarea de trecere în cazul în care demodularea se făcea folosind frontul posterior. Curba notată $A\ F$ reprezintă atenuarea de trecere măsurată în cazul în care demodularea se făcea folosind ambele fronturi. In cursul măsurărilor au fost măsurate fundamentala, armonica a doua și armonica a treia. Formula (22) arată că trebuie să apară armonicele pare începînd cu a doua, în cazul în care banda de trecere și înfășurătoarea impulsului au o axă de simetrie. Formula (26) arată că armonicele pare mai mari ca a doua apar în cantitate cu totul neglijabilă. In cazul instalației noastre, atît banda de trecere, cît și înfășurătoarea impulsului nu pre-

zentau axe de simetrie. La primele măsurări au apărut atît armonicele pare, cît și cele impare.

Curbele din fig. 13 reprezintă valorile armonicei a doua. Acordarea corespunzătoare a receptorului a făcut ca nivelele fundamentalei și armonicei a treia să fie sub 60 *dB*, dincolo de pragul de sensibilitate a instalației folosite.

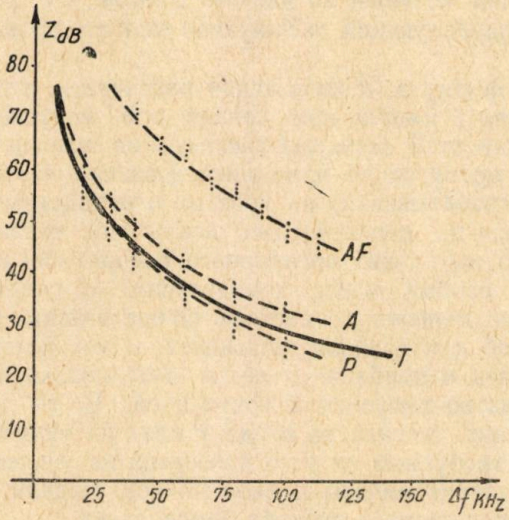



Fig. 13.

Graficele din fig. 13 arată o bună coincidență a curbelor experimentale cu cele teoretice. Curba *A F* este, așa cum rezultă din teorie la circa 20 *dB* deasupra curbelor *A* și *P*.

In încheiere se poate afirma că experiențele au confirmat, atît formula care dă atenuarea de trecere, cît și eficacitatea metodei propuse de reducere a nivelului semnalului perturbator.

## BIBLIOGRAFIE

1. *Goldberg H., Bath C. C.* — Multiplex employing pulse-time and pulsed frequency modulation, Proc. IRE, 1949, 37, 1.
2. *Siforov V. I., Drobov C. A., Șirman I. D., Jeleznov P. A.* — Teoria impulsnoi radiosviazi, Leningrad, 1951.
3. *Rîjic I. M., Gradștein I. S.* — Tabliți integralov, sum, riadov i proizvedenii, Moscova, 1953.
4. *Harchevici A. A.* — Spectrî i analiz., Moscova, 1953.
5. *Katelnicov V. A.* — Problemî pomehoustoicivoi radiosviazi, Moscova, 1947.

## О ПЕРЕКРЕСТНЫХ ИСКАЖЕНИЯХ В РАДИОРЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ДВОЙНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ: ИМПУЛЬСНОЙ И ЧАСТОТНОЙ

(Краткое содержание)

Приём каналов с временной импульсной модуляцией в случае дополнительной модуляции несущей по частоте сопряжён с рядом трудностей, так как сигнал, модулирующий несущую по частоте, проникает в импульсный канал.

Установлена формула, позволяющая рассчитать перекрёстные искажения, возникающие в импульсном канале при модуляции в частотном канале; при помощи этой формулы исследуются влияния различных параметров (полосы пропускания приёмника, девиации частоты, длительности импульса, порога срабатывания) на уровень перекрёстных помех.

Так как уровень перекрёстных искажений оказывается большим допустимого, то во избежание чрезмерного расширения полосы пропускания предлагается особый метод демодуляции, обеспечивающий сильное уменьшение уровня мешающего сигнала (теоретически до нуля). Кроме того, данный способ демодуляции повышает помех устойчивость приёма примерно в два раза и приближает её к потенциальной помехоустойчивости систем с фазово-импульсной модуляцией. В то же время увеличивается напряжение сигнала на входе усилителя низкой частоты и тем самым снижается требуемый от него коэффициент усиления.

Проведенные эксперименты полностью подтвердили формулу (34) и эффективность предлагаемого способа демодуляции.

## SUR LE PROBLÈME DES DIAPHONIES DANS LES RADIORELAIS À DOUBLE MODULATION

(Résumé)

La réception des voies à impulsions modulées en phase (position), lorsqu'il s'agit d'une modulation supplémentaire en fréquence de la porteuse, este rendue difficile par le fait que le signal modulateur de la porteuse pénètre dans la voie à modulation d'impulsion.

On établit une relation qui permet de calculer la diaphonie entre la voie à impulsions modulées en phase et la voie à modulatoin en fréquence; à l'aide de cette formule on étudie l'influence des differents paramètres (la bande du récepteur, la deviation de fréquence, la largeur des impulsions, le seuil de basculage) sur le niveau de la diaphonie.

Puisque le niveau de la diaphonie est plus élevé que le niveau admissible, pour éviter un élargissement exagéré de la bande du récepteur, on propose une méthode spéciale de démodulation qui permet un affaiblissement sensible (théoriquement jusqu'à zéro) du niveau du signal perturbateur.

Au surplus, la méthode proposée rend approximativement deux fois plus grand le rapport signal bruit. En même temps, la tension appliquée à l'entrée de l'amplificateur de basse fréquence s'accroit au double ce qui permet la réduction du facteur d'amplification necessaire.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

# PETROGRAFIA CĂRBUNELUI

6.62.64

## INFLUENŢA METAMORFISMULUI DE CONTACT ASUPRA STRUCTURII CĂRBUNILOR. CAZUL CĂRBUNILOR DE LA BAIA NOUĂ

de B. IONESCU-SISEŞTI

### 1. SCURTĂ PRIVIRE ASUPRA TECTONICII ZĂCĂMÎNTULUI

In masivul Almaşului, format mai ales din zone de roce paleozoice şi arhaice, se găsesc cîteva petece de Carbonifer rezemate direct pe gneis şi pe şisturile cristaline sau conservîndu-se în fundul sinclinalelor cu depozite mezozoice.

Unul dintre aceste petece carbonifere este bazinul de la Baia Nouă, în cursul superior al pîrîului Tişoviţa, care se varsă în Dunăre aproape de Orşova.

In mijlocul formaţiunilor carbonifere se află un sinclinal asimetric, purtător de cărbuni.

Una din aripile sinclinalului are direcţia NE-SV, şi este cunoscută sub numele de aripa Dunărea. Cealaltă are direcţia E-V. frîngîndu-se spre SV şi constituie aripa nordică a sinclinalului.

Aripa Dunărea are înclinare mică (circa 20°) şi este foarte puternic ondulată. Aripa nordică are însă înclinare mare.

Sinclinalul a fost străbătut de un puternic pinten de porfir gros de 30-50 m, care a produs puternice dislocări în formaţiile carbonifere, formînd în general acoperişul stratului.

Stratul de cărbune a fost frămîntat, ondulat şi îngroşat în formă de lentile foarte neregulate.

Stratul conţine două intercalaţii principale: o intercalaţie cărbunoasă cu aspect tăciunos, tare, compactă şi o intercalaţie cu aspect de şist cărbunos.

Aspectul stratului în cele două aripi ale sinclinalului, este foarte diferit. In aripa Dunărea, cărbunele este foarte sfărîmicios. In aripa nordică, cărbunele este mai compact.

Deşi din cauza acestei diferenţe de aspect, cărbunele din aripa Dunărea are valoare economică mult mai mică decît cel din aripa nordică, fiindcă această din urmă aripă este în cea mai mare parte exploatată, cărbunele din aripa Dunărea interesează azi mai mult ca cel din aripa nordică.

### 2. ASPECTUL MACROSCOPIC GENERAL AL CĂRBUNELUI ŞI INTERCALAŢIILOR

Ceea ce izbeşte ochiul la prima privire în examinarea cărbunelui de la Baia Nouă, sînt trei aspecte:

1. friabilitatea şi mineralizarea cărbunelui;
2. structura caracteristică a intercalaţiei cărbunoase-tăciunoase şi
3. existenţa unui cărbune aglomeratic de natură fuzitică.

**Gradul de friabilitate și mineralizarea cărbunelui.** Cărbunele prezintă numeroase fețe de alunecare, cu strieturi fine și cu luciu cu nuanță metalică.

Cărbunele din aripa nordică este, cum am spus, în general mai compact ca cel din aripa sudică.

Microscopic, compactitatea acestui cărbune pare să se datoreze impregnării lui cu substanță minerală uneori cu caracter metalic. Intr-adevăr, în ruptură și în secțiune lustruită se vede adesea cu ochiul liber substanța semisterilă sau impregnații metalice piritoase sau cu culoare albăstruie de burnonită.

Cărbunele din aripa Dunărea este extrem de sfărîmicios, în proporție de peste 80%. In bucată, el este străbătut de numeroase fisuri, care la cea mai mică apăsare se sfarmă în bucățele în general mai mici ca boabele de grîu.

Cum, în cea mai mare parte, cărbunele din aripa nordică a fost exploatat, cărbunele din aripa sudică formează azi peste 80% din extracția zilnică a zăcămîntului.

Cum este și natural, friabilitatea cărbunelui din aripa Dunărea a fost explicată prin presiunea tectonică exercitată asupra lui. O examinare mai atentă a acestei ipoteze arată însă că ea nu poate fi suficientă.

Dupăcum se va vedea, examenul microscopic poate da o explicație mult mai satisfăcătoare a acestui aspect al cărbunelui.

**Structura intercalației cărbunoase-tăciunoase.** Intercalația cărbunoasă-tăciunoasă constă din masă semisterilă încrustată cu cuiburi de cărbune și cu numeroase intercalații de plăci și aglomerații de limonită cărbunoasă.

Cărbunele, atît cel amestecat în limonită, cît și cel care se găsește liber în masa semisterilă, este negru, se ia pe mîinî și are urmă neagră ca fuzitul.

Amestecul dintre cărbune și hidroxidul de fier este, în general, așa de fin încît cei doi componenți nu se pot deosebi cu ochiul liber.

In intercalația tăciunoasă se găsesc uneori goluri în care calcita cristalizează ca în geode.

Un fenomen extrem de interesant: în unul din aceste goluri am găsit o prismă exagonală de cărbune pur, cu formă perfectă și alte cîteva mai mici, din păcate însă, ele s-au sfărîmat la manipulare.

Socotim că aceste aspecte ale intercalației tăciunoase sînt extrem de interesante și legate între ele și că trebuie neapărat interpretate.

**Existența unui cărbune aglomeratic de natură fuzitică,** ca și existența unui cărbune coxificat pe cale naturală — la contactul imediat cu porfirul — este al treilea aspect macroscopic care izbește ochiul la examinarea cărbunelui de la Baia Nouă.

Dintre cele două feluri de cărbune, cel mai interesant este primul. El are aspect de funingine cu granule de mărimi diferite, se prezintă în bulgări sfărîmicioși și apare ca un produs de încărbunare fuzitică sau de carbonizare.

Structura lui se va lămuri prin studiu microscopic.

## 3. STRUCTURA MICROSCOPICĂ

**Introducere.** In cercetările mele precedente,*) am arătat existența unor factori determinați în formarea structurii cărbunilor, nesemnalați sau menționați insuficient în literatură.

Dintre acești factori am accentuat: 1) degradarea mecanică și separarea în faza de turbărie a elementelor detritrice după legi analoge cu legile din Chimia-Fizică; 2) existența unor nuanțe în procesul de încărbunare.

In ce privește primul dintre acești factori, am arătat că cu cît cărbunele se apropie mai mult de huila superioară, cu atît degradarea mecanică și separarea elementelor detritice a fost înaintată. Datorită acestui lucru, în cărbunii superiori s-a putut forma duritul, pe cînd în cărbunii mai inferiori, în locul duritului s-a format un complex structural cu caracter aglomeratic, care nu este durit, dar care formează o categorie întreagă de structuri care la limită superioară se pot apropia de durit.

Astfel, aspectul acestei categorii structurale devine un criteriu de apreciere a superiorității cărbunilor și deci de clasificare a lor.

In ce privește existența unor nuanțe în procesul de încărbunare, am arătat că natura țesutului joacă în acest proces un rol mult mai mare, decît îi atribuie petrografii.

Unele țesuturi se încărbunează repede, luînd formă coloidală, dînd naștere unui constituent vitritic: *colovitritul*; altele se încărbunează încet, dînd naștere unui constituent de încărbunare slabă. Contrastul de strălucire în lumină reflectată al celor doi constituenți formează o categorie de structuri pe care le-am numit *stucturi ornamentale*. Constituentul cu încărbunare slabă al acestor structuri are aspect de masă de bază în care este înglobat constituentul vitritic.

Un cărbune se apropie cu atît mai mult de huila superioară, cu cît proporția de constituent vitritic este mai mare, cu cît nuanța de încărbunare a masei de bază se apropie de aceea a constituentului vitritic și în sfîrșit cu cît constituentul vitritic însuși are caracter coloidal mai accentuat.

Structura ornamentală constituie astfel un al doilea criteriu de apreciere a superiorității cărbunilor și deci de clasificare a lor.

Am mai arătat în studiile precedente că încărbunarea colovitritului poate înainta și că el poate deveni un constituent nou, *vitritul fuzitizat* sau un constituent asemănător, *colofuzitul*, pe care l-am descris în acele studii.

In sfîrșit, am descris și alte nuanțe ale procesului de încărburare care dau aspecte structurale și constituenți noi, dintre care unii formează bancuri importante in zăcămintele noastre de cărbuni.

Menționăm în studiul de față numai nuanța de încărbunare pe care am numit-o sapropelică și constituentul respectiv, vitritul sapropelic.

In legătură cu studiile precedente, mai menționăm în treacăt că constituentul cel mai important care favorizează coxificarea cărbunilor

*) Referate către Inst. de Cercetări Tehnologice și către Inst. de Fizică al Academiei R. P. R., între anii 1947-1953, cum și publicațiile: Structura petrogr. a lignitului romînesc în revista Minelor Nr. 6/1954 și Aspecte noi în problema structurii cărbunilor în Rev. Universității Parhon și Inst. Politehnic Nr. 4-5/1954 și următoarele.

inferiori nu este duritul, cum se crede îndeobște, ci masa de bază a structurii ornamentale, pe care am descris-o în unele studii (fig. 5).

Mai menționăm, tot în treacăt, că luciul mat al cărbunilor nu se datorește cum se crede, exclusiv duritului, ci mult mai des — în cărbunii inferiori, exclusiv — masei de bază și complexităților structurale de care am vorbit.

Așa fiind, clasificările petrografice existente, care toate au luat ca criteriu de bază luciul, nu sunt juste.

**Complexitatea structurală și raritatea duritului.** Huilele carbonifere au în general structură simplă, cu constituenți clari și bine încărbunați. Constituentul lor complex are formă clasică de durit, cum s-a arătat.

Cărbunii de la Baia Nouă însă prezintă în general în locul duritului, un complex aglomeratic extrem de variat: fragmente de țesut cu încărbunare slabă, fragmente de fuzit, lespezi de vitrit, țesut cu corpuri rășinoase în celule, vitrit sapropelic, etc. (fig. 1-3), toate de dimensiuni majore.

Considerăm că acest complex structural se datorește unor împrejurări speciale care au curmat viața turbăriei, înainte ca aceste elemente să se fi sfărîmat și mai ales să se fi separat pe categorii și să se fi încărbunat mai mult. Aceste împrejurări nu pot fi decît cele legate de erupția pintenului de porfir, care a surprins zăcămîntul încă în faza de turbărie și a produs exsondarea ei prematură.

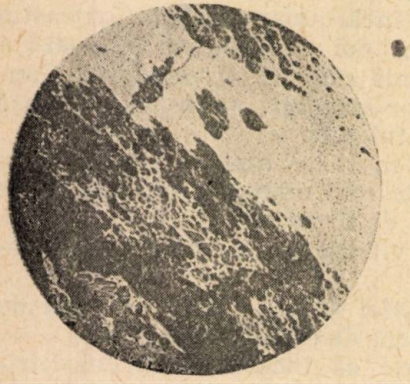


Fig. 1.

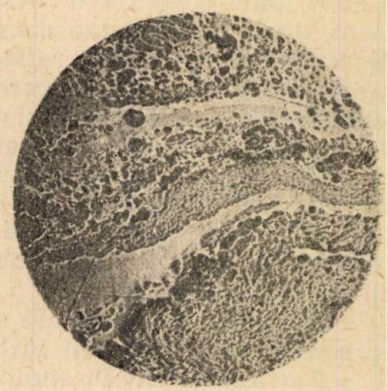


Fig. 2.

Este posibil chiar ca, înainte de dispariția completă a apei de înnecare, erupția însăși sau fenomenele pneumatolitice posteruptive să fi amestecat materialul detritic, care apoi nu a mai avut timp să se separe din nou.

Probabilitatea acestor fenomene va apare și în alte aspecte ale structurii cărbunilor.

**Structura ornamentală.** Este de asemenea de remarcat că, în condiții normale, o huilă carboniferă nu prezintă o structură celulară clară și frecventă și mai ales nu prezintă contrastul caracteristic dintre țesutul acesta și țesutul cu încărbunare coloi ală, cu alte cuvinte nu prezintă o structură ornamentală frecventă. Cărbunele de la Baia Nouă este însă extraordinar de bogat în structură ornamentală (fig. 2).

Nu vedem nicio posibilitate de a explica aceste fenomene decît tot prin exsondarea prematură a turbăriei, datorită erupţiei porfirului.

Nici o mirare că, în cărbunele nostru, structurile ornamentale nu prezintă contraste prea izbitoare ca spre ex., în cărbunii bruni, deoarece după cele ce am arătat în studiile precedente, masa de bază din cărbunii superiori este prin natura ţesutului o masă de bază cu încărbunare mai apropiată de cea vitritică propriu zisă, iar cu vîrsta, diferenţa de încărbunare dintre cei doi constituenţi ai structurii ornamentale se micşorează.

Aşa fiind, este foarte explicabil că în acest caz nu mai poate fi o deosebire absolut clară între o structură aglomeratică şi structura ornamentală.

**Structura microscopică a cărbunelui sfărîmicios.** Am arătat că acest cărbune, care caracterizează în special aripa sudică (aripa Dunărea) a sinclinalului, constituie azi 80% din cărbunele exploatat şi excepţionala lui friabilitate îi micşorează mult valoarea economică.

Am spus, de asemenea, că interpretarea acestei friabilităţi prin presiunea tectonică nu este deloc suficientă.

Era deci de aşteptat ca studiul microscopic să aducă surprize.

Studiul microscopic al unui astfel de cărbune constituie însă o problemă grea. Dar problema a fost pasionantă.

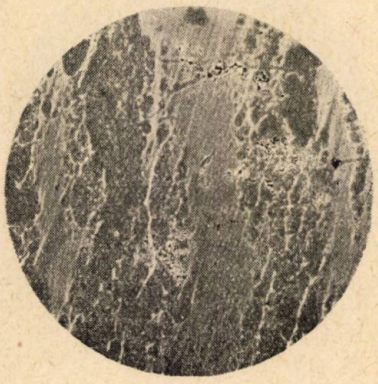


Fig. 3.

Structura pe care o descoperă microscopul este un tip de structură ornamentală, extrem de interesant, care confirmă într-un mod cu totul neaşteptat părerile pe care le-am exprimat în studiile menţionate asupra nuanţelor în procesul de încărbunare şi asupra separării în turbărie.

Intr-adevăr, structura cărbunelui cu totul sfărîmicios este formată din benzi succesive de vitrit coloidal — sapropelic, între benzi fiind un ţesut cu încărbunare slabă, în care s-a putut infiltra o cantitate relativ mică de substanţă minerală. (fig. 3).

Cărbunele se rupe prin urmare pe aceste zone de slabă rezistenţă. Zonele au în general o lăţime mai mică de 0,5 mm.

Explicarea friabilităţii apare deci absolut clară.

Cu cît cărbunele devine mai compact, cu atît caracterul acesta dispare progresiv.

Structura aceasta nu s'ar fi putut naşte în cantitatea enormă de cărbuni în care se găseşte, fără să fi existat în turbărie o separare după legile de echilibru fizico-chimic. Faptul că este singura separare de întinderi apreciabile din tot zăcămîntul, se explică prin caracterul de faze al celor doi constituenţi ai structurii.

Dacă viaţa turbăriei ar fi durat netulburată vreme îndelungată, este de bănuit că cele două faze ale structurii s'ar fi adunat în mase mai compacte şi benzile structurale n-ar mai fi rămas aşa fine, deci cărbunele n-ar mai fi fost aşa de sfărîmicios.

Este însă de presupus deci că dacă acest lucru nu s-a întîmplat, cauza stă în încetarea prematură a fazei de turbărie a zăcămîntului.

**Mineralizarea.** Nu vom studia aici mineralizarea în sensul în care se produce în orice cărbune, ci numai aspectele rare, nedescrise încă în literatură.

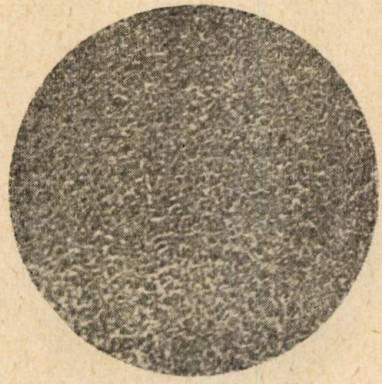


Fig. 4.

In primul rînd este de remarcat că mineralizarea observabilă macroscopic înaintează adesea pînă la dimensiuni microscopice, creînd în masa cărbunilor lame care n-au legătură cu fisurile.

Un alt aspect interesant este amestecarea intimă a substanţei colovitritice-sapropelice cu substanţa minerală pînă la constituentul din fig. 4 şi structura din fig. 5.

De remarcat în fig. 4 că atunci cînd substanţa sterilă are grad de dispersie mai mic, cei doi componenţi nu reuşesc să formeze o fază unică, pe cînd gradul ei de dispersie este mai mare că în fig. 5 *a* şi 5 *b* şansa lor de a forma o singură fază este pe cale să reuşească.

Structurile din fig. 4 și 5 nu pot fi explicate decît printr-o mișcare energică a apei din turbărie, datorită erupției însăși sau fenomenelor pneomatolitice posteruptive (mai puțin probabil precedînd erupția).

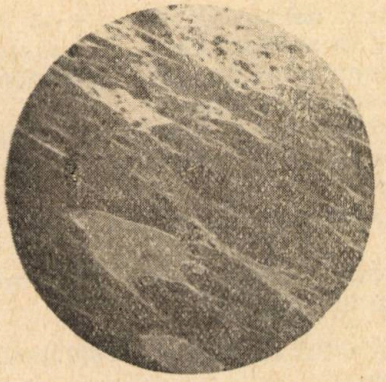


Fig. 5 *a*.

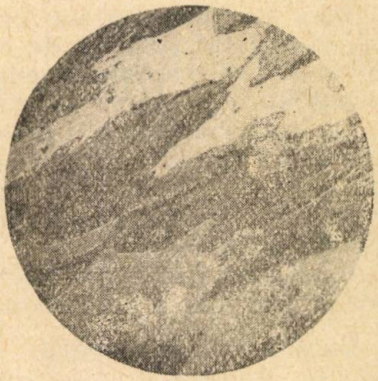


Fig. 5 *b*.

**Formarea vitritului fuzitizat.** Acest constituent, pe care l-am semnalat încă din anul 1947*) se găsește în cantitate apreciabilă în intercalația cărbunoasă-tăciunoasă a cărbunelui studiat.

Uneori el ia formă de colofuzit.

Am arătat în lucrările precedente*) că fuzitizarea colovitritului nu este un proces diferit de cel de gelificare, ci continuare a lui, care constă în principal din transformarea acizilor humici în substanțe din ce în ce mai neutre.

După părerea lui Stadnikov, la temperatura ordinară, transformarea acizilor humici se face în durate de epoci geologice, dar la temperatură de numai 200°, ea este apreciabilă și după numai cîteva ore.

Astfel, metamorfismul a putut produce grăbirea enormă a procesului de încărbunare a unor țesuturi. Forma finală a acestui proces este fuzitizarea substanței vitritice.

Dar este semnificativă și prezența calcitei și adesea a hidroxidului de fier (limonita) alături de vitritul fuzitizat.

Neutralizarea acizilor humici produce degajare de $CO$ și $CO_2$ în contul carboxililor și aceasta poate avea drept urmare îmbogățirea cărbunelui în carbon. Bioxidul de carbon rezultat poate transforma carbonatul de calciu în carbonat solubil (bicarbonat). Aceasta ar explica formarea calcitei.

Prezența calcitei poate fi deci considerată ca un semn al neutralizării acizilor humici și prin urmare un măsurător al gradului de încărbunare, deci al fuzitizării. Și într-adevăr, gradul de fuzitizare a vitritului din această intercalație pare să fie proporțional cu cantitatea de calcetă prezentă.

*) Vezi nota anterioară.

Limonita și oxizii de fier nehidratați care însoțesc vitritul fuzitizat pot avea și ei legătură genetică cu acesta, anume pot lua naștere pe loc, prin descompunerea carbonaților de către acizii humici. Oxidrilii care au luat parte la reacție au putut da naștere unui hidrogel care este limonita.

Dacă s-a găsit sau s-a format și oxid nehidratat, în formă dispersă, el a putut juca rol de catalizator în transformarea substanțelor humice. Celelalte substanțe minerale dispersate fin prin fenomenele pneumatolitice au putut favoriza și ele aceste reacții.

De asemenea, silicații aduși în turbărie prin fenomenele legate de metamorfism au putut fi descompuși de acizii humici cu eliberare de $SiO_2$.

In acest fel, substanțele minerale s-au putut amesteca intim cu substanța cărbunoasă.

Aceste fenomene pot oferi o explicație satisfăcătoare a formării prismelor exagonale de cărbune de care am vorbit.

**Cocsificarea cărbunelui.** — La contactul cu porfirul, cărbunele a suferit un fenomen de cocsificare. Fenomenul este același care se produce totdeauna la contactul cu roca eruptivă și fiind cunoscut, nu-l mai descriem.

Semnalăm numai că acesta este un fenomen de pirogenare, deci de carbonizare care se produce foarte probabil la temperaturi mai înalte decît fuzitizarea.

Socotim deci că procesul de carbonizare este diferit de cel de fuzitizare.

In altă ordine de idei, aceasta înseamnă că teoria incendiilor de pădure în formarea fuzitului nu pare justă.

**Constituenții carbonitici.** — In literatura apuseană se dă numele de carbonit cocsului natural de care s-a vorbit mai sus. Pe de altă parte, se dă numele de vitrinit prafului artificial de vitrit sau constituentului analog.

In lucrarea de față, noi dăm numele de *vitrinit* constituentului format din praf natural de vitrit fuzitizat, apoi numele de *fuzinit* constituentului format din praf natural de fuzit și *carbonit*, constituentului format din praf natural de cărbune fuzitizat, ale cărui particule sînt prea mici ca să se poată recunoaște dacă provin din vitrit fuzitizat sau din fuzit (de exemplu praful fin din fig. 6).

In cărbunii de la Baia Nouă se găsesc toți trei, aspectul din fig. 6 formînd o cantitate apreciabilă de cărbune.

Cum noi avem argumente să considerăm și fuzitul din cărbunii de la Baia Nouă de aceeași origină cu vitritul fuzitizat și colofuzitul și pentru a scurta această expunere, punem cei trei constituenți într-o singură clasă și prezentăm pentru formarea lor aceleași ipoteze.

Socotim că constituenții carbonitei iau în general naștere printr-un proces de fuzitizare ca și vitritul fuzitizat, respectiv colofuzitul și că în formarea lor metamorfismul are același rol ca în formarea vitritului fuzitizat.

In separarea lor, însă, pot interveni ca fenomene legate de erupțiunea magmei, atît fenomene pneumatolitice, cît și fenomene de mișcare a apei.

Pentru că însă socotim că particulele carbonitice se găsesc şi în intercalaţiile cărbunoase *), pentru formarea lor, a celor mai fine cel puţin se pot face, cred, şi alte ipoteze.

Particulele fine de carbonit au putut fi despărţite de ţesut chiar printr-un proces pneumatolitic.

Mai degrabă însă, ele s-au putut forma printr-un proces mecanic şi chimic în acelaşi timp.

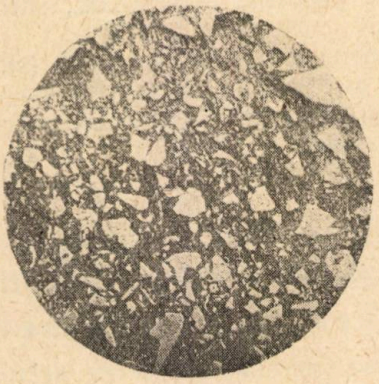


Fig. 6.

Sub presiune, acidul carbonic rezultat din descompunerea carbonaţilor de către acizii humici — cum am arătat, — a putut fi dizolvat uşor de apa coloidală. Cînd coloidul pierde apa, acidul este reţinut prin adsorbţie de particulele minerale de care am vorbit şi este descompus, sub acţiunea catalitică a oxizilor de fier. Carbonul rezultat s-a putut depune sub formă de particule fine în masa relativ compactă dînd carbonitul, sau în complexul mineral din turbărie, dînd împreună masa sapropelică.

Prin aceasta, gradul de aciditate al masei coloidale a scăzut şi astfel capacitatea coloidului de a reţine apa s-a micşorat. Astfel, procesul de încărbunare a putut înainta repede.

## CONCLUZII

1. In urma constatărilor de mai sus, putem afirma că dykul de porfir din bazinul carbonifer de la Baia Nouă n-a erupt în Permian, cum s-a afirmat, ci în timpul cînd zăcămîntul era în faza de turbărie, deci chiar în Carbonifer.

2. Cărbunele de la Baia Nouă a fost oprit în evoluţia lui normală de către erupţia pintenului de porfir, în sensul că structura ornamentală s-a păstrat. Aceasta face ca el să aibă structură asemănătoare cu a cărbunilor inferiori.

*). Pe această cale s-ar putea lămuri, probabil, mult discutata problemă a structurii acestor formaţii.

3. Aspectul acesta structural confirmă teoria pe care am dezvoltat-o în studiile precedente, că în primele lui stadii, procesul de încărbunare se face selectiv, prezentînd nuanțe diferite, după natura țesutului.

Aceste nuanțe există chiar în țesuturile carbonifere, cu toate că aceste țesuturi au încărbunare accentuat coloidală.

4. Cărbunele de la Baia Nouă prezintă un accentuat caracter fuzitic, datorit efectului metamorfismului asupra încărbunării coloidale-limită *).

5. Cărbunele este puternic mineralizat, datorită fenomenelor legate de metamorfism.

6. Friabilitatea mare a unor cărbuni nu trebuie atribuită numai presiunii tectonice, ci și structurii și mai ales acesteia. In cazul cărbunilor de la Baia Nouă, structura care produce friabilitatea se datorește fenomenelor legate de metamorfism.

## ВЛИЯНИЕ КОНТАКТОВОГО МЕТАМОРФИЗМА НА СТРУКТУРУ УГЛЯ УГОЛЬНЫЕ ЗАЛЕЖИ В БАЯ НОУЕ

(Краткое содержание)

Приводится краткое описание тектоники месторождения Описывается макроскопический внешний вид угля и прослоек.

Утверждается, что извержение порфирового скарна данного бассейна произошло не в пермиановом а в камменоугольном периоде.

Процесс убугливания происходил селективно, в зависимости от рода волокна.

Уголь бассейна Бая Ноуа обладает резко выраженным физитным характером вследствие эффекта метаморфизма на предельное коллоидное обугливание.

В рассмотренном случае хрупкость оказывается следствием явлений связаиных с метаморфизмом.

## L'INFLUENCE DU MÉTAMORPHISME DE CONTACT SUR LA STRUCTURE DE CARBONS. LES CAS DES CARBONS DE BAIA NOUĂ

(Résumé)

On fait un bref exposé sur la tectonique du gissement. On decrit l'aspect macroscopique du carbon et des substances intercalées. On afirme que le dyke de porphyre du bassin étudié ne provient pas du Permien mais du Carbonifère. Le processus de carbonification a été sélectif.

Le charbon de Baia Mare présente un caractère fusitique accentué, dû à l'effet du métamorphisme sur la carbonification coloïdale-limite.

Dans le cas étudié la friabilité est due aux phénomènes liés au métamorphisme.

*) Credem că rezultatele analizelor chimice (prof. Blum) se datoresc acestui caracter.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

# METALURGIE

669.4

## STUDIUL INFLUENȚEI DIFERIȚILOR FACTORI ASUPRA PROCESULUI DE AGLOMERARE A CONCENTRATELOR BOGATE IN PLUMB

de AL. LUPU, A. MOSCOVICI, M. DINESCU și S. INGHEL

Pentru tratarea concentratelor plumboase, în vederea extragerii plumbului prin procedeul topirii reducătoare este necesară prăjirea oxidantă și ulterior aglomerarea acestora, în vederea obținerii unui material care să reziste la presiunea coloanei din cuptoarele de topire Totodată, procesul reducerii oxidului de plumb va avea loc în condiții mult mai bune prin suprafața mare pe care materialul o va oferi gazelor cu conținut de oxid de carbon. Procesul aglomerării — sinterizării se produce la suprafața de contact a particulelor de diverse materiale care se află în prezență. Cu cît particulele de materiale vor fi mai diferite, cu atît posibilitatea de formare a compușilor, eutecticelor, soluțiilor solide va fi mai accentuată. In studiul efectuat, s-a urmărit să se determine influența unor factori și condițiile necesare pentru obținerea unui material de bună calitate pentru procesul metalurgic. S-a lucrat în condiții diferite, cu două aparate de aglomerare avînd ca obiectiv determinarea factorilor care independent de aparatură să concureze la obținerea unui material în condiții optime.

Materialul rezultat — aglomeratul — trebuie să posede o structură poroasă și o permeabilitate ridicată pentru gaze, suficient de rezistent pentru a nu fi sfărîmat de coloana de material existentă în cuptor. Pentru obținerea unui aglomerat de bună calitate, trebuie să se țină seamă de o serie întreagă de factori cum sînt: umiditatea, conținutul de sulf, permeabilitatea, vidul realizat prin absorbția aerului, temperatura de aprindere a materialului etc.

Umiditatea cînd este bine dozată produce afînarea materialului mărindu-i porozitatea. Se știe că umiditatea optimă este aceea la care volumul materialului umezit este maxim sau la un conținut de apă cu puțin mai mare decît acel la care volumul este maxim.

Conținutul de sulf optim se determină pe cale experimentală, variind de obicei între 7 și 10%. Atît excesul, cît și lipsa lui sînt dăunătoare prin faptul că se dezvoltă, fie o cantitate prea mare de căldură producînd o aglomerare prematură și micșorînd permeabilitatea șarjei, fie o cantitate de căldură insuficientă pentru continuarea procesului în care condiții aglomerarea nu se mai efectuează decît într'o mică măsură.

Permeabilitatea aglomeratului depinde de dimensiunea și forma grăunților și de volumul golurilor existente, de umiditate și de grosimea stratului supus aglomerării.

Vidul creat prin absorbția aerului sau presiunea produsă prin suflarea aerului depind iarăși de permeabilitatea materialului supus aglomerării, el fiind cu atit mai scăzut, respectiv mai puternic, cu cît per-

meabilitatea materialului pentru gaze este mai mare. Productivitatea instalaţiei de aglomerare este în strînsă legătură cu cantitatea de aer trecută prin materialul de aglomerat.

Temperatura de aglomerare a materialului, respectiv a sulfurilor depinde de conţinutul de sulf, de bioxid de siliciu şi de plumb existent în şarja de aglomerare.

Temperatura de aglomerare a unui material cu conţinut ridicat de plumb 50-60 % nu trebuie să depăşească 900-950° C, deoarece la această temperatură silicaţii de plumb se topesc formînd o crustă la suprafaţa materialului împiedicînd pătrunderea gazelor. Aglomeratul rezultat va fi prăfos şi nedesulfurat. Dacă temperatura de aglomerare este mai mică de 900 °, se poate obţine un material bine desulfurat însă insuficient aglomerat.

## 1. INCERCĂRI PRELIMINARE PENTRU STABILIREA UMIDITĂŢII OPTIME

Lucrările s-au efectuat utilizîndu-se un amestec a cărei compoziţie corespunde şarjei utilizate la uzina Gh. Gheorghiu-Dej — Baia Mare şi cu materiale cum sînt concentratul plumbos crud şi concentratul plumbos prăjit. Amestecul folosit avea următoarea compoziţie:

54,16 % concentrat prăjit.
9,02 % cuarţ,
5,41 % concentrat crud,
7,62 % piatră de var,
22,22 % material retur.

Determinările s-au efectuat măsurîndu-se volumul materialului uscat şi umezit cu ajutorul unui cilindru gradat, lucrîndu-se cu cantităţi de 100 g, (tabelele 1, 2, 3 şi fig. 1, 2 şi 3).

Tabela 1

**Variaţia volumului şarjei în funcţie de umiditate**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Volumul şarjei uscate în $cm^3$ | 32 | 32 | 32 | 42 | 42 | 42 | 42 | 42 | 42 |
| Apă % | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| Volumul şarjei umezite în $cm^3$ | 50 | 50 | 51 | 54 | 51 | 50 | 47 | 44 | 42 |

Tabela 2

**Variaţia volumului concentratului plumbos crud în funcţie de umiditate**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Volumul concentrat. uscat în $cm^3$ | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 |
| Apă % | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| Volumul concentrat. umed în $cm^3$ | 37 | 38 | 39 | 39 | 40 | 36 | 31 | 30 | 25 |

Tabela 3

**Variația volumului concentratului plumbos prăjit funcție de umiditate**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Volumul concentrat, în $cm^3$ | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 |
| Apă, % | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| Volumul concentrat umezit, în $cm^3$ | 42 | 42 | 43 | 45 | 44 | 44 | 42 | 41 | 38 |

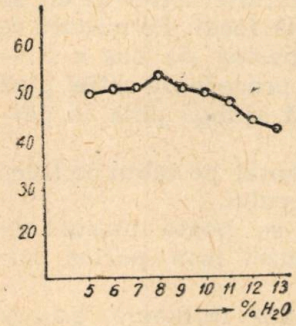



Fig. 1—Variația volumului șarjei funcție de umiditate.

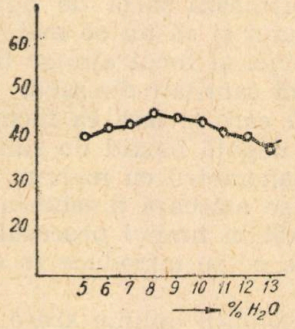



Fig. 2—Variația volumului concentratului prăjit plumbos în funcție de umiditate.

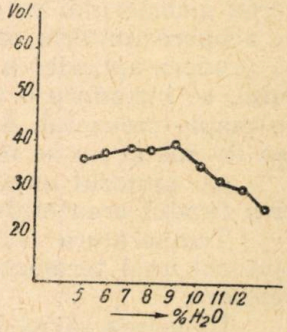



Fig. 3—Variația volumului concentratului prăjit plumbos în funcție de umiditate.

Analizîndu-se diagramele, se observă că umiditatea optimă, la care șarja, concentratul crud, sau concentratul prăjit au volumul maxim este de 8...9 % $H_2O$.

## 2. INFLUENȚA UMIDITĂȚII ASUPRA AGLOMERĂRII ȘI CALITĂȚII AGLOMERATULUI

Incercările de aglomerare s-au făcut prin suflarea aerului prin stratul de material.

Incercările s-au-făcut cu un amestec de compoziția:

*Pentru probele (a)*

54,16 % prăjit
9,02 % cuarț
5,41 % crud
7,63 % piatră var
22,21 % retur

*Pentru probele (b)*

42 % prăjit
8 % cuarț
17 % crud
8 % piatră var
25 % retur

Pentru efectuarea încercărilor de aglomerare s-a folosit un creuzet din şamotă de formă tronconică de 250 mm înălţime, şi cu o capacitate de cca. 1 dm $^3$. Prin fundul creuzetului pătrunde un tub de fier prin care se suflă sau se absoarbe aerul prin stratul de material. La mijlocul creuzetului se află un grătar diu tablă de fier perforată, cu găuri de ∅ 3 — 4 mm.

Pe acest grătar, înainte de a se introduce şarja, se pune un strat de cărbune de lemn, care se aprinde, iar prin suflarea aerului se întreţine arderea. Se adaogă mereu cărbune de lemn pînă se umple creuzetul. şi se continuă această operaţie pînă se înroşesc pereţii creuzetului. După aceasta, se lasă să scadă stratul de cărbune pînă atinge o înălţime de numai 5—10 mm deasupra grătarului. Se fncepe introducerea amestecului care formează şarja de aglomerare, astfel în cît să se acopere uniform cărbunii şi să nu se mai vadă focul. Pe măsură ce se produce aprinderea şarjei şi focul ajunge în partea de sus a stratului, se introduce o nouă cantitate din şarjă; se procedează astfel pînă se umple creuzetul, după care se lasă ca focul să ajungă pînă în partea de sus şi nu se mai degajă bioxid de sulf.

Cu ajutorul unui manometru cu mercur, montat pe tubul ce trece prin fundul creuzetului, se măsoară presiunea aerului.

Temperatura realizată in timpul procesului, se poate măsura cu ajutorul unui termocuplu. ce se introduce în creuzet prin partea superioară.

Umezirea şarjei în condiţii optime are o mare influenţă asupra desfăşurării procesului de aglomerare. S-au făcut încercări de aglomerare cu 6, 7, 8, 9, 10 şi 12% $H_2O$.

Tabela 4

**Caracteristicile aglomeratului în funcţie de umiditate**

| Numărul probei | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | b | a | b | a | b | a | b | a | b |
| Umiditate, % | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 12 | 12 |
| Randament aglomerare, % | 80 | 82 | 81,5 | 88 | 83,5 | 90 | 85 | 87 | 79 | 74 | 68 | 68 |
| Conţinut de *S* în şarjă, % | 7,4 | 6,7 | 7,4 | 6,7 | 7,4 | 6.7 | 7,4 | 6,7 | 7,4 | 6,7 | 7,4 | 6,7 |
| Conţinut de *S* în aglomerat, % | — | 3,8 | — | 3,55 | — | 3,13 | — | 3,1 | — | 3,65 | — | 3,8 |
| Grad de sulfurare % | — | 44 | — | 47 | — | 53 | — | 53,2 | — | 46 | — | 43,5 |
| Porozitate, % | 51 | 53,5 | 55 | 56 | 60 | 59 | 56 | 54 | 53 | 53 | 53 | 52,5 |
| Rezistenţă% | 87 | 66 | 87,1 | 80 | 93,3 | 85,5 | 84,5 | 75,5 | 81,2 | 68 | 76 | 61 |
| Presiunea aerului, mm col. Hg. | 30 | 25 | 30 | 25 | 30 | 25 | 30 | 25 | 30 | 25 | 30 | 25 |
| Granulaţia fondanţilor, în mm | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

*Observaţie.* Pentru fiecare procent de umiditate s-au făcut cîte două încercări de aglomerare în condiţii aproximativ aceleaşi.

Pe baza datelor obţinute s-au trasat diagramele din fig. 4, 5 6 şi 7,

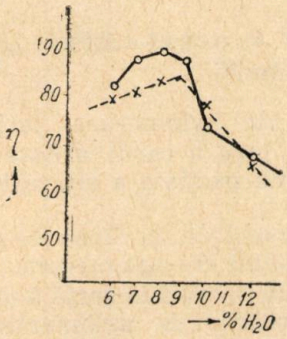



Fig. 4 — Variaţia randamentului de aglomerare în funcţie de umiditate.

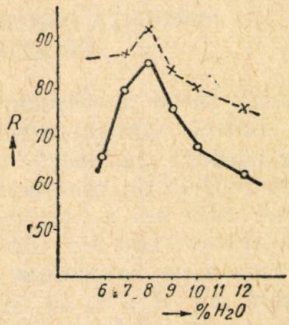



Fig. 5 — Variaţia rezistenţii aglomeratului în funcţie de umiditate.

Analizînd tabela 4 şi fig. 4, 5. 6 şi 7 rezultă:

*Randamentul de aglomerare* are un maxim pentru 8 ... 9 % $H_2O$, apoi scade deoarece, cu creşterea conţinutului de apă, materialul devine noroios, aglomerarea făcîndu-se insuficient. La umidităţi scăzute, de exemplu 5 ... 6 %, randamentul scade deoarece materialul este prăfos şi este antrenat de aerul suflat.

*Rezistenţa* are o valoare maximă pentru 8 % $H_2O$. apoi scade deoarece materialul cu un procent mai mare de apă arde greu nedezvoltîndu-se căldura necesară pentru sinterizarea particulelor.

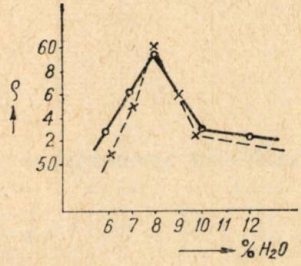



Fig. 6—Variaţia porozităţii aglomeratului în funcţie de umiditate.

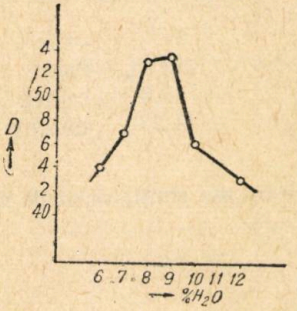



Fig. 7—Variaţia gradului de desulfurare în funcţie de umiditate.

*Porozitatea* are valoare maximă pentru 8 % $H_2O$. la acest conţinut volumul materialului, respectiv volumul golurilor din material este maxim ; la un conţinut mai mare de apă volumul materialului scade şi implicit porozitatea.

*Gradul de desulfurare* prezintă un maxim la 8% $H_2O$. Cu creşterea umidităţii desulfurarea scade, deoarece căldura necesară aglomerării este folosită în mare parte la eliminarea apei.

Valorile optime pentru un aglomerat se obţin la un conţinut de 8 ... 9% $H_2O$.

### 3. INFLUENŢA CONŢINUTULUI DE SULF AL ŞARJEI ASUPRA PROCESULUI DE AGLOMORARE

Pentru buna desfăşurare a procesului de aglomerare, şarja trebuie să conţină cantitatea necesară de sulf prin a cărui ardere să se dezvolte căldura necesară formării şi topirii parţiale a silicaţilor care leagă particulele de material.

După cum s-a arătat mai sus, atît excesul cît şi lipsa de sulf în şarja de aglomerare sînt dăunătoare procesului de aglomerare.

Pentru a se determina conţinutul optim de sulf în şarjă s-au făcut aglomerări cu 5 .. 9, 10 şi 12% *S*, Incercările de aglomerare s-au făcut cu amestecurile de următoarele compoziţii:

*Pentru amestecul cu 6% S*

73 % prăjit
8 % crud
9,5 % cuarţ
9,5 % calcar

*Pentru amestecul cu 7% S*

65 % prăjit
16 % crud
9,5 % cuarţ
9,5 % calcar

*Pentru amestecul cu 8% S*

49 % prăjit
32 % crud
9,5 % cuarţ
9,5 % calcar

Tabela 5

**Influenţa conţinutului de sulf asupra caracteristicilor aglomeratului**

| Nr. probei | 1 (a) | 2 (b) | 3 (a) | 3 (b) | 4 (b) | 5 (a) | 6 (a) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Umiditate, % | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| Randament de aglomerare % | 63 | 75 | 80 | 76 | 82 | 89 | 89 |
| Conţinu ul de S în şarjă, % | 5 | 6 | 7 | 7 | 9 | 10 | 12 |
| Conţinutul de S în aglomerat, % | — | 3,2 | — | 3,5 | 4 8 | — | — |
| Grad de desulfurare, % | — | 48 | — | 51 | 44 | — | — |
| Porozitate, % | 56,3 | 51 | 57,5 | 58 | 54,5 | 58 | 52 |
| Rezistenţă, % | 81,7 | 73,2 | 83.1 | 80 | 82 | 85,8 | 87,1 |
| Presiunea aerului, mm Hg. | 32 | 25 | 32 | 25 | 25 | 32 | 32 |
| Mărimea fondanţilor, mm | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Pe baza datelor obținute s-au trasat diagramele din fig. 8, 9, 10, 11, I2,

Din tabela 5 și din fig. 9, 10, 11 și 12 rezultă:

*Randamentul de aglomerare* crește cu mărirea conținutului de *S* din șarjă, deoarece se produce o cantitate mai mare de căldură ceea ce determina o sinterizare mai bună a materialului.

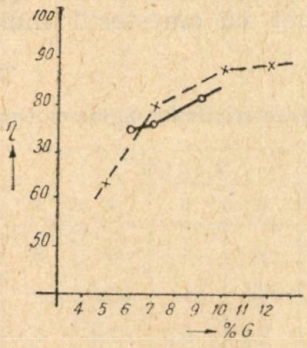



Fig. 8 — Variația randamentului de aglomerare în funcție de conținutul de sulf.

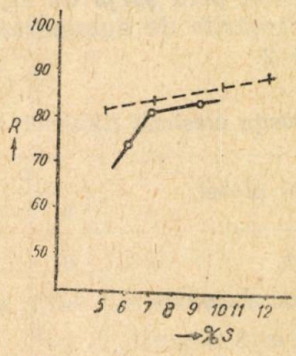



Fig. 9 — Variația rezistenței aglomeratului în funcție de conținutul de sulf.

*Rezistența aglomeratului* crește odată cu mărirea conținutului de sulf în șarjă, deoarace se dezvoltă o cantitate mai mare de căldură, care ușurează apariția fazei lichide și legarea particulelor între ele,

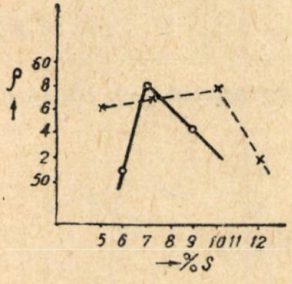



Fig. 10 — Variația porozității aglomeratului în funcție de conținutul de sulf

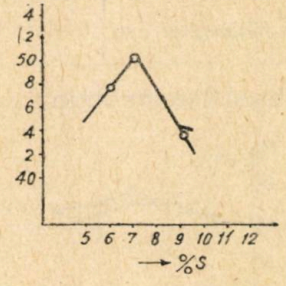



Fig. 11—Variația gradului de desulfurare în luncție de conținutul de sulf.

*Porozitatea* are un maxim, la 7% și apoi scade deoarece cu creșterea conținutului de sulf în amestec se produce o topire parțială; materialul devine compact cu porozitatea redusă.

*Gradul de desulfurare* crește pînă la 7... 8%, și scade apoi cu ridicarea conținutului de sulf în șarjă. La un conținut mare de sulf flamabil temperatura se ridică repede, se produce o aglomerare prematură micșorînd permeabilitatea încărcăturii îngreunînd astfel procesul de eliminare a sulfului din aglomerat.

## 4. INFLUENŢA PRESIUNII (TIRAJULUI) AERULUI ASUPRA PROCESULUI DE AGLOMERARE

Pentru a se asigura o aglomerare uniformă trebuie asigurată o distribuţie uniformă a aerului şi o cantitate necesară de aer pentru desfăşurarea procesului de ardere.

S-au făcut incercări de aglomerare lucrîndu-se cu presiunea aerului suflat prin şarja de aglomerare la 10, 20, 30, 40 şi 50 mm col. Hg. Incercările de aglomerare s-au efectuat cu amestecul indicat la punctul 2.

Tabela 6

**Influenţa presiunii (tirajului) aerului asupra caracteristicilor aglomeratului**

| Nr probei | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | b | a | b | a | b | a |
| Umiditate, % | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| Randament aglomerare, % | 81,7 | 82 | 84 | 85 | 89,5 | 85 | 86,5 | 83 | 85 |
| Conţinut de S în şarjă, % | 7,4 | 6,7 | 7,4 | 6,7 | 7,4 | 6.7 | 7,4 | 6,7 | 7,4 |
| Conţinut de S în aglomerate, % | — | 3,44 | — | 3.82 | — | 3,93 | — | 4 | = |
| Grad de desulfurare, % | — | 49 | — | 47,5 | — | 42,5 | — | 40,5 | — |
| Porozitate, % | 54 | 52 | 57 | 54,5 | 63 | 56.5 | 60 | 55 | 45 |
| Rezistenţă, % | 82,7 | 75,6 | 85,5 | 79 | 89 | 79 | 87,5 | 84,4 | 81,5 |
| Presiunea aerului, mm col Hg | 10 | 10 | 20 | 20 | 30 | 30 | 40 | 40 | 50 |
| Granulaţia fondanţilor, mm | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Pe baza datelor obţinute s-au trasat diagramele (fig. 13. 14 15 şi 16).

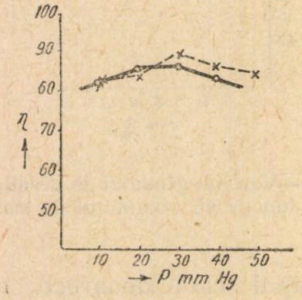



Fig. 12—Variaţia randamentului de aglomerare în funcţie de presiunea aerului.

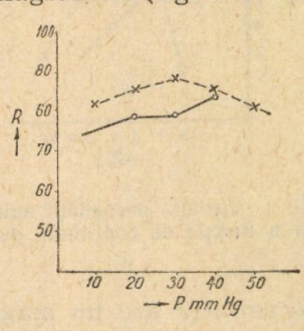



Fig. 13.—Variaţia rezistenţii aglomeratului în funcţie de presiunea aerului.

Analiza rezultatelor din tabela 5 şi a fig. 12, 13, 14 şi 15 arată că:

*Randamentul de aglomerare* prezintă un maxim la presiunea de 25 — 32 mm col. Hg, apoi scade deoarece la creşterea presiunii aerului aprinderea se face rapid, focul ajunge repede la suprafată şi

tot atit de repede se produce prin cantitatea mare de aer suflat răcirea astfel încît o parte din material nu are timp să se aglomereze.

*Rezistența* crește cu mărirea presiunii aerului pînă la 32 mm col. Hg., deoarece se produc și topiri parțiale datorită încălzirii puternice. La o creștere mai mare a presiunii, la 50 mm col. Hg, rezistența materialului scade.

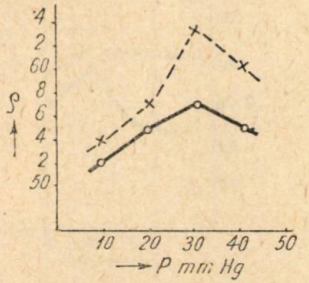



Fig. 14—Variația porozității aglomeratului în funcție de presiunea aerului.

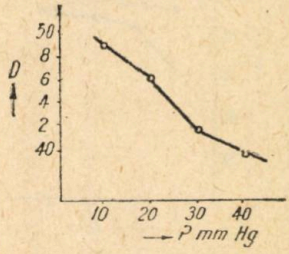



Fig. 15—Variația gradului de desulfurare în funcție de presiunea aerului.

*Porozitatea* crește repede odată cu creșterea presiunii aerului pînă la 30 mm col. Hg., la presiuni mai mari însă ea începe să scadă.

*Gradul de desulfurare* scade cu creșterea presiunii, datorită topirii parțiale premature a materialului ceeace împiedică eliminarea sulfului.

## 5. INFLUENȚA GRANULAȚIEI AGLOMERATULUI ȘI FONDANȚILOR ASUPRA PROCESULUI DE AGLOMERARE

Viteza de aglomerare și calitatea aglomeratului depinde de gradul de fărămițare a șarjei. Dimensiunea optimă a bucăților de minereu din șarjă variază între 1 și 3 mm, iar pentru fondanți între 5 și 6 mm.

S-au făcut încercări de aglomerare lucrîndu-se cu granulația fondanților si a aglomeratului retur de 1, 3, 5 și 6 mm. Incercările de aglomerare s-au făcut cu amestecul indicat la punctul 2.

Tabela 7

**Influența granulației fondanților asupra caracteristicilor aglomeratului**

| Numărul probei % | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | b | a | b | a | b |
| Umiditate, % | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 |
| Randament, % | 87 | 72 | 88 | 83 | 90 | 85 | 89,5 | 87 |
| Conținut de S în șarjă, % | 7,4 | 6,7 | 7,4 | 6,7 | 7,4 | 6,7 | 7,4 | 6,7 |
| Conținut de S în aglomerat, % | — | 3,4 | — | 3,67 | — | 3,69 | — | 3,94 |
| Gradul de sulfurare, % | — | 50 | — | 46 | — | 45 | — | 41,5 |
| Porozitate, % | 52,5 | 54 | 54 | 56 | 56 | 57 | 51 | 49 |
| Rezistența, % | 83 | 64,6 | 84 | 67 | 85,5 | 80 | 79 | 71 |
| Presiunea aerului, mm col, Hg | 32 | 25 | 32 | 25 | 32 | 25 | 32 | 25 |
| Granulația fondanților, mm | 1 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 6 | 6 |

Pe baza datelor obținute s-au trasat diagramele din fig. 16, 17, 18 și 19,

Din datele obținute și din diagrame se constată că:

*Randamentul* crește pînă la granulația de 5 mm a fondanților, iar la granulații mai mari scade.

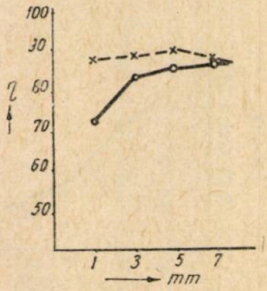



Fig. 16 — Variația randamentului de aglomerare în funcție de granulația fondanților.

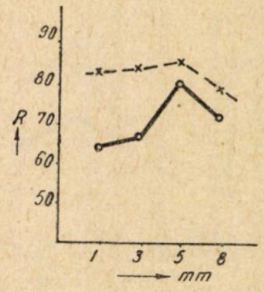



Fig. 17—Variația rezistenței aglomeratului în funcție de granulația fondanților.

*Rezistența aglomeratului* crește cu mărirea granulației fondanților pînă la 5 mm. apoi rezistența scade deoarece cu creșterea granulatiei fondanților la aceeași cantitate numărul particulelor respectiv numărul punctelor de contact și de sinterizare scade.

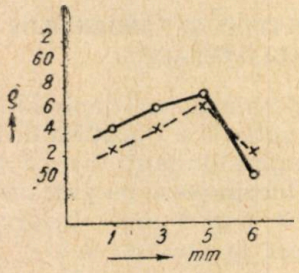



Fig. 18 — Variația porozității aglomeratului în funcție de granulația fondanților.

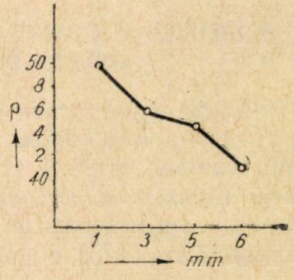



Fig. 19—Variația gradului de desulfurare în funcție de granulația fondanților.

*Porozitatea aglomeratului* crește odată cu mărirea granulație fondanților deoarece permeabilitatea este în funcție de mărimea golurilor din șarjă.

*Gradul de desulfurare* scade odată cu mărirea granulației fondanților, deoarece particulele mai mari se încălzesc mai greu și îngreunează aprinderea materialului.

Studiul efectuat asupra procesului aglomerării cu variația granulației fondanților și a aglomeratului retur arată că granulația, care satisface cerințele impuse de procesul aglomerării, este de 3 „„ 5 mm.

## 6. AGLOMERAREA CONCENTRATELOR PLUMBOASE FĂRĂ ADAOS DE FONDANȚI: INFLUENȚA BIOXIDULUI DE SILICIU ȘI OXIDULUI DE CALCIU ASUPRA AGLOMERĂRII

Pentru a se vedea influența pe care o are introducerea fondanților în șarjă asupra aglomerării, s-au făcut încercări fără nici o adăugare de fondanți, numai cu un adaus de bioxid de siliciu sau numai cu un adaus de oxid de calciu.

Amestecul pentru aglomerarea fără adaus de fondanți a fost :

| *pentru probele (a)* | *pentru probele (b)* |
|---|---|
| 87% prăjit | 80% prăjit |
| 9% retur | 20% crud |
| 4% crud | |

Amestecul pentru aglomerarea numai cu adaus de cuarț a fost :

| *pentru probele (a)* | *pentru probele (b)* |
|---|---|
| 83% prăjit | 68% prăjit |
| 9% retur | 17% crud |
| 3,5% crud | 15% cuarț |
| 5,5% cuarț | |

Amestecul pentru aglomerarea numai cu adaus de calcar a fost :

| *pentru probele (a)* | *pentru probele (b)* |
|---|---|
| 83 % prăjit | 68 % prăjit |
| 9 % retur | 77 % crud |
| 3.5 % crud | 15 % calcar |
| 5,5 % calcar | |

Tabela 8

**Influența fondanților asupra caracteristicilor aglomeratului**

| Nr. probei | 1 | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Umiditate, % | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| Randament de aglomerare, % | 70,5 | 91 | 95 | 93 | 94,88 | 95 |
| Sulf în șarjă, % | 7,4 | 7,2 | 7,2 | 7,2 | 7,3 | 7,3 |
| Sulf în aglomerat % | — | 3,96 | — | 3,7 | — | 3,8 |
| Grad de desulfurare, % | — | 46 | — | 48 | — | 47 |
| Porozitate, % | 40 | 55 | 45 | 57,5 | 44 | 55 |
| Rezistență, % | 92,5 | 78 | 92 | 88 | 84 | 86,5 |
| Presiunea aerului, mm col., Hg | 30 | 25 | 30 | 24 | 30 | 25 |
| Granulația fondanților, mm | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Proba nr. 1 este încercarea de aglomerare fără adaus de fondanți.
Proba nr. 2 este încercarea de aglomerare numai cu adaus de cuarț.
Proba nr. 3 este încercarea de aglomerare numai cu adaus de calcar.

Influenţa silicei respectiv a calcei la probele 2 şi 3, faţă de proba 1, care este aglomerată fără nici o adăugire de fondanţi se observă foarte bine: atît silicea. cît şi calcea imbunătăţesc caracteristicele aglomeratului.

Calcarul joacă rolul regulatorului de temperatură, deoarece disocierea lui decurge cu absorbţie mare de căldură, iar CaO format este un oxid greu fuzibil.

Bioxidul de siliciu la temperaturi ridicate formează cu oxizii metalelor, mai ales cu oxizii de plumb, silicaţi uşor fuzibili, cimentînd particulele şarjei. Silicaţii uşor fuzibili constituie lianţi de bază în procesul aglomerării şarjei.

## 7. AGLOMERAREA CONCENTRATELOR PLUMBOASE PRIN ADĂUGIREA FONDANŢILOR ŞI DE MATERIALE DE RECIRCULAŢIE (MATĂ ŞI ZGURĂ SĂRACĂ)

Pentru buna desfăşurare a procesului de aglomerare, se utilizează diverşi fondanţi, care să contribuie la procesul de formare a aglomeratului.

Deoarece materialele rezultate din cuptor au temperatura de topire mai mică decît cea necesară formării lor s-au făcut o serie de încercări la care au fost folosiţi diverşi fondanţi.

Rezultatele încercărilor de aglomerare cu adaus total de fondanţi şi cu materiale de recirculaţie (mată şi zgură retur) sînt date în tabela 9.

Tabela 9

**Influenţa adausului de fondanţi total şi de materiale de recirculaţie (mată şi zgură săracă) asupra aglomerării**

| Numărul probei | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|
| | a | b | a |
| Umiditate, % | 8 | 8 | 8 |
| Randament de aglomerare, % | 85 | 83 | 90 |
| Conţinut de S în şarjă, % | 7,4 | 6,9 | 8,9 |
| Conţinut de S în aglomerat, % | — | 3,28 | 4,3 |
| Grad de desulfurare, % | — | 50 | 51,5 |
| Rezistenţă, % | 67 | 62 | 87,5 |
| Presiunea aerului, mm. col. Hg | 30 | 25 | 25 |
| Granulaţia fondanţilor, mm. | 5 | 5 | 5 |

La aglomerarea cu adaus total de fondanţi s-a urmărit obţinerea la topire a unei zguri şi a unei mate cu compoziţia următoare :

Zgura : 38% FeO ; 32% $SiO_2$ şi 16% CaO ;
mata : 12% Cu ; 20% Pb şi 20% S.

Compoziţia amestecului pentru încercarea cu adaus total de fondanţi este:

| *Pentru probele (a)* | | *Pentru probele (b)* | |
|---|---|---|---|
| 78% | prăjit | 37% | prăjit |
| 9% | retur | 22% | retur |
| 4% | crud | 14% | crud |
| 5,2% | cuarţ | 13,5% | cuarţ |
| 4% | calcar | 13,5% | calcar |

Compoziţia amestecului pentru încercarea cu adaus de mată şi zgură retur este următoarea :

| | |
|---|---|
| 34% | prăjit |
| 20% | retur |
| 13% | crud |
| 7,5% | cuarţ |
| 7,5% | calcar |
| 13% | zgură retur |
| 4% | mată |

Rezultatele obţinute arată că lucrînd în acelaşi condiţii ca la probele precedente, dar cu adăugirea totală a fondanţilor, randamentul util de aglomerare, porozitatea şi gradul de desulfurare au valori bune. Caracteristic este însă rezistenţa scăzută a aglomeratului, ceeace se explică prin aceia că o parte din fondanţii adăugaţi nu se sinterizează bine deoarece temperatura atinsă nu este suficientă, astfel încît o parte din particule ramîn nesinterizate constituind puncte de rezistenţă minimă.

Prin adăugirea materialelor de recirculaţie (zgură şi mată retur), alături de fondanţii iniţiali rezistenţa este mult îmbunătăţită.

Studiul efectuat asupra procesului de aglomerare fără adaus de fondanţi arată că este indicat să se lucreze cu adaus total de fondanţi. Se realizează un grad de desulfurare şi porozitatea mai bună, decît în cazul celorlalte încercări, iar randamentul de aglomerare şi rezistenţa acestuia aflîndu-se în limite admisibile.

## 8. AGLOMERAREA CONCENTRATELOR PLUMBOASE, CU INLOCUIREA PARŢIALĂ ŞI TOTALĂ A CONCENTRATULUI PLUMBOS CRUD CU CONCENTRAT PIRITOS.

Pirita se adaugă în cazul în care nu este sulf suficient pentru formarea matei sau cînd nu este fier suficient pentru formarea zgurii.

Pentru aglomerarea fără adaus de pirită s-a folosit amestecul :

| | |
|---|---|
| 80% | prăjit |
| 8,8% | retur |
| 4% | cuarţ |
| 3,6% | calcar |
| 3,6 | crud |

Pentru aglomerarea cu adaus de 50% pirită, în loc de concentrat crud, s-a lucrat cu amestecul :

80% prăjit
8,8% retur
4% cuarţ
3,6% calcar
1,8% crud
1,8% pirită

Pentru aglomerarea cu înlocuirea totală a concentratului crud prin concentrat piritos. s-a lucrat cu amestecul :

80% prăjit
8,8% retur
4% cuarţ
3,6% calcar
3,6% pirită

Tabela 10

**Influenţa adausului de pirită asupra caracteristicilor aglomeratului**

| Numărul probei | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Umiditate, % | 8 | 8 | 8 |
| Randament de aglomerare, % | 89 | 92,7 | 93 |
| Conţinut S în şarjă, | 6,7 | 7,1 | 7,9 |
| Conţinut S în aglomerat, % | 0,5 | 2,19 | 3,42 |
| Grad de desulfurare, % | 61 | 69 | 57 |
| Porozitate, % | 61 | 53 | 50 |
| Rezistenţă, % | 79 | 84 | 86 |
| Presiunea aerului, mm. col. Hg. | 32 | 32 | 32 |
| Granulaţia fondanţilor, mm. | 5 | 5 | 5 |
| Pirită adăugată, g | — | 6,6 | 13,2 |
| Concentrat crud adăugat, g | 13,2 | 6,6 | — |

Pe baza datelor obţinute s-au trasat diagramele din fig, 20, 21 22 şi 23.

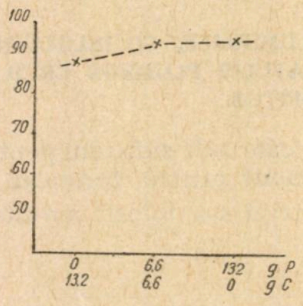



Fig. 20—Variaţia randamentului de aglomerare în funcţie de cantitatea de pirită şi concentratului crud din şarjă,

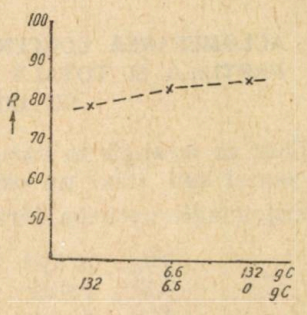



Fig. 21 — Variaţia rezistenţei aglomeratului în funcţie de cantitatea de pirită şi concentrat crud din şarjă.

Din analiza rezultatelor obținute și a diagramelor trasate rezultă:

*Randamentul de aglomerare*, prin înlocuirea a 50% concentrat plumbos crud cu concentrat piritos, crește atingînd valorile de 89... 93%. La înlocuirea totală a concentratului plumbos crud cu concentrat piritos, randamentul rămîne aproape constant.

*Rezistența aglomeratului* crește prin înlocuirea concentratului plumbos cu pirită, ca o consecință a măririi cantității de sulf.

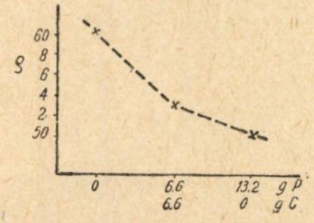



Fig. 22—Variația porozității aglomeratului în funcție de cantitatea de pirită și concentrat crud din șarjă.

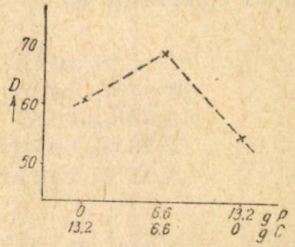



Fig. 23—Variația gradului de desulfurare în funcție de cantitatea de pirită și concentrat crud din șarjă.

*Gradul de desulfurare* prin înlocuirea concentratului plumbos crud cu pirită scade datorită topirii parțiale a materialuiui.

*Porozitatea aglomeratului* prin înlocuirea concentratului plumbos cu pirită scade datorită topirii parțiale a materialului.

Studiul efectuat asupra procesului de aglomerare, la înlocuirea parțială sau totală a concentratului plumbos cu concentrat piritos, arată că înlocuirea totală nu dă rezultate satisfăcătoare; înlocuirea parțială este indicată pentru a mări randamentul în aglomerat util precum și rezistența acestuia.

## 9. AGLOMERAREA CONCENTRATELOR PLUMBOASE CU VARIAȚIA COMPOZIȚIEI ȘARJEI (CU ADAUS DE AGLOMERAT RETUR ȘI CONCENTRAT PLUMBOS CRUD)

La incercările efectuate s-a variat cantitatea de aglomerat retur în proporțiile de 10, 20, 30, 40 și 50% în șarjă iar crudul și materialul prăjit au fost astfel calculate. încît șarja de aglomerare să aibă un conținut de circa 6... 8,5% S.

Incercările de aglomerare s-au făcut cu amestecurile de următoarele compoziții:

*Pentru amestecul cu 10% retur*

82,17% prăjit
10 % retur
3,72% crud
1,50% calcar

*pentru amestecul cu 20% retur*

68,44% prăjit
20 % retur
7,24% crud
2,76% cuarţ
1,57 calcar

*pentru amestecul cu 30% retur*

55 % prăjit
30 % retur
10,86% crud
2,76% cuarţ
1.57% calcar

*pentru amestecul cu 40% retur*

40,67% prăjit
40 % retur
13 % crud
2, 7% cuarţ
1,57% calcar

Tabela 11

**Influenţa adausului de aglomerat şi de concentrat plumbos crud asupra caracteristicilor aglomeratului**

| Numărul probei | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | b | a | b | a | b | b |
| Umiditate, % | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| Randament de aglomerare, % | 90,8 | 83 | 92,4 | 85 | 91,7 | 81 | 88 | 91 | 88 |
| S în şarjă, % | 7,9 | 6,2 | 8,21 | 6,4 | 8,54 | 6,65 | 8,56 | 6,9 | 6,9 |
| S în aglomerat, % | — | 3,1 | — | 2,95 | — | 2,83 | — | 3,8 | 4,2 |
| Grad de desulfurare, % | — | 50 | — | 53 | — | 57 | — | 46 | 41 |
| Porozitate, % | 59 | 52,5 | 59 | 56 | 61 | 57 | 62 | 54 | 52,5 |
| Rezistenţă, % | 90,2 | 78,2 | 86 | 80 | 80 | 81,5 | 76 | 82 | 76 |
| Presiunea aerului, mm col. Hg, | 30 | 25 | 30 | 25 | 30 | 25 | 30 | 25 | 25 |
| Granulaţia fondanţilor, mm | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Procentul de retur, % | 10 | 10 | 20 | 20 | 30 | 30 | 40 | 40 | 50 |

Pe baza datelor, s-au trasat diagramele din fig. 24. 25, 26. şi 27

Analizind rezultatele obţinute se observă că:

*Randamentul de aglomerare* creşte cu mărirea cantităţii de crud şi retur, datorită faptului că returul adăugat este un material mai poros şi totodată conţinutul de *S* al şarjei creşte.

*Rezistența aglomeratului* crește pînă la adăugarea a 30% retur, apoi scade.

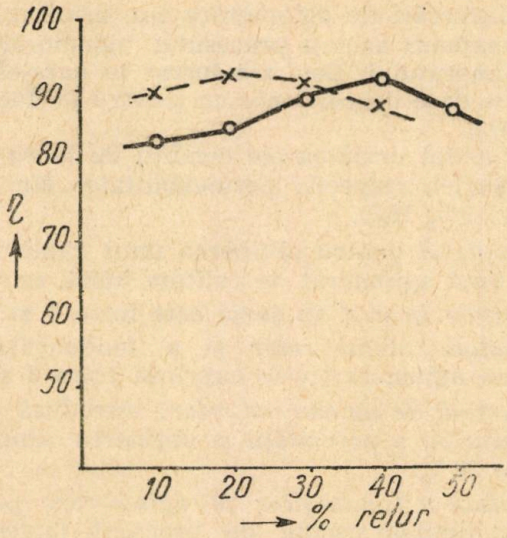



Fig. 24 — Variația randamentului de aglomerare în funcție de conținutul de retur în amestec.

*Porozitatea* crește cu mărirea conținutului de material retur în șarjă.

*Gradul de desulfurare* are un maxim pentru adaosul de 30% aglomerat retur.

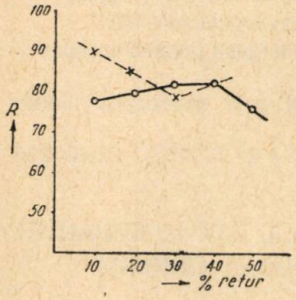



Fig. 25 — Variația rezistenței aglomeratului în funcție de conținutul de retur în amestec.

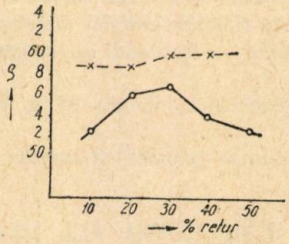



Fig. 26 — Variația porozității aglomeratului în funcție de conținutul de retur din amestec.

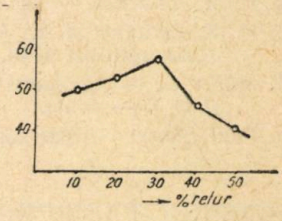



Fig. 27 — Variația gradului de desulfurare în funcție de conținutul de retur din amestec.

Din datele obținute se observă că valorile optime pentru caracteristicile aglomeratului se obțin pentru amestecul cu 20% crud, 30% retur și 50% prăjit.

## CONCLUZII

Prin aceste încercări de aglomerare s-a urmărit să se determine factorii care influenţează asupra procesului aglomerării şi asupra caracteristicilor aglomeratului. Deşi s-a lucrat în paralel cu aparate diferite, s-au obţinut date concordante cu privire la factorii care influenţează aglomerarea.

S-au stabilit astfel următoarele condiţii de lucru:

*Parozitatea* şarjei, respectiv permeabilitatea sînt maxime pentru un conţinut de 8... 9% $H_2O$.

*Umiditatea optimă* pentru obţinerea unui randament de aglomerare maxim şi a unui aglomerat de calitate bună, este 8%.

*Conţinutul optim în sulf* în şarjă este între 7 şi 8%.

*Granulaţia aglomeratului retur* şi a fondanţiilor care satisface cerinţele unei bune aglomerări este cuprinsă între 3 şi 5 mm.

*Cantitatea optimă de aglomerat retur*, introdusă în şarjă pentru mărirea randamentului, a porozităţii şi obţinerea unui aglomerat bine desulfurat este de 30%.

*Adăugirea totală a fondanţilor la aglomerare* permite obţinerea de valori aflate în limitele cerute de procesul topirii, duce însă la o rezistenţă scăzută a aglomeratului.

Adăugirea materialelor de recirculare (zgură şi mată retur) şi de fondanţi obişnuiţi, îmbunătăţeşte şi rezistenţa aglomeratului, obţinîndu-se un material de foarte bună calitate.

## BIBBIOGRAFIE

1. *D. M. Cijicov* — Metalurghia tiajolâh ţvetnah metalov—Izdat. A. N. SSSR—1948.
2. *F. M. Loscutov* — Metalurghia tiajolâh ţvetnăh metalov—Metalurghizdat—1951.
3. *F. M. Loskutov şi A. A. Teidler* — Rasceotă po metalurghii tiajolâh ţvetnâh metalov—Metalurghizdat 1948.
4. *Müller G.* — Aglomerarea minereului mărunt şi a prafului prin sinterizare. Berlin (I D T — 1951).
5. *Paul Henry* — Observaţii la teoria aglomerării corecte (Trad. I D T 1950). Paris 1946

## ВЛИЯИИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ПРОЦЕСС АГГЛОМЕРАЦИИ КОНЦЕНТРАТОВ С БОЛЬШИМ СОДЕРЖАНИЕМ СВИНЦА

(Краткое содержание)

Процесс агломерации свинцовых концентратов для получения качественного материала требует изучения влияния нескольких факторов.

В настоящей работе определяется влияние следующих факторов:

а) влажность
б) содержание серы
в) напора (тяжа) воздуха
г) грануляция материалов, образующих шихту

д) добавки флюсов:
е) добавки штейна и обедненного шлака
ж) добавки пиритного концентрата и возвратного агломерата.

Вследствие проведенных работ установлены оптимальные условия получения качественного агломерата:

Влажность 8—9% $H_2O$, серы 7 – 8%, напор воздуха 25—32 мм. Hg. грануляция возвратного агломерата и флюсов 3 — 5 мм, количество агломерата 30%.

## L'INELUENCE DFS DIVÉRS FACTEURS SUR LE PROCESSUS D'AGGLOMÉRATION DES CONCENTRÉS RICHES EN PLOMB

(Résumé)

Le processus d'agglomération des concentrés riches en plomb en vue d'obtenir des matériaux de bonne qualité nécessite l'étude de l'influence des divers facteurs,

Ainsi a-t-on déterminé dans ce travail l'influence des facteurs suivants: humidité, pression de l'air (tirage), granulation des matériaux qui forment la charge, fondants; $SiO_2$, CaO, scorie, mate, pyrite et agglomérat retour

Les conditions optima sont les suivantes: humidité, 8—9%; teneur en S, 7—8%; pression de l'air: 25—32 torr; granulation de l'agglomérat retour et des fondants: 3—5 mm; quantité de l'agglomérat retour: 30%.

Laboratorul
de Metalurgie Neferoase
Institutul Politehnic Bucureşti

Laboratorul de Metale neferoase —
pirometalurgie
Institutul de cercetări Metalurgice
Bucureşti

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 1 - 2

# N O T E

## PERIODICE ŞI PUBLICAŢII ŞTIINŢIFICE EDITATE DE INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI

de L. SĂVEANU

### 1. REVISTE ŞTIINŢIFICE

1.1. *„Bulletin de Mathématiques et de Physique" (1929—1940).* Primul periodic ştiinţific al fostei Şcoli Politehnice a fost «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Politechnique de Bucarest», care apare în 1929 tipărit la «Imprimeriile de Stat», în formatul 19 × 26 cm.

Scopul iniţial al acestui periodic a fost acela de a reflecta activitatea ştiinţifica a corpului didactic, precum şi de a publica articole şi note ale foştilor elevi ai Şcoalei Politehnice sau ale oamenilor de ştiinţă din ţară şi străinătate, pe măsura în care acestea erau în strînsă legătură cu specificul activităţii ştiinţifice desfăşurate în secţiile de specialitate ale instituţiei.

Cu o periodicitate de trei fascicole pe an (fiecare fascicolă corespunzînd unui număr de periodic), buletinul apare, cu unele excepţii, destul de regulat pînă în anul 1940, cînd îşi schimbă titulatura în cea de «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Titlul iniţial al acestei reviste reflectă el însuşi influenţa puternicei şcoli matematice ce exista în instituţie la data apariţiei sale, datorită activităţii meritorii a profesorilor: Gh. Ţiţeica, Tr. Lalescu, D. Pompeiu, I. Ionescu, A. Ioachimescu, E. Abason, N. Ciorănescu, etc.

Deşi titlul revistei circumscria oarecum profilul ei tematic, axat pe matematică şi fizică, totuşi în ea s-au publicat articole şi note în legătură cu diverse ramuri ale tehnicei: Mecanică, Rezistenţa materialelor, Chimie, Electrotehnică, Electrocomunicaţii, Hidraulică, Aeronautică, Metalurgie, Tehnologia materialelor, Căi ferate, Arhitectură, Geodezie, etc.

In partea introductivă a statisticei revistei publicată în tomul 15 (anul VII, 1935-36), pag. 208, se observă tendinţa conducerii insituţiei de a edita în viitor jurnale pe specialităţi corespunzînd întrucîtva facultăţilor Politehnicei, pe măsura dezvoltării activităţii ştiinţifice în sectoarele respective. Totuşi acest plan nu a fost realizat deoarece cu timpul s-a constatat că necesităţile de publicare pot fi acoperite cu o singură revistă pentru toate specialităţile, cu condiţia ca să i se asigure acesteia o anumită periodicitate şi un anumit număr de pagini

Mai jos se dă o tabelă statistică sintetizînd volumele apărute sub titlul inițial :

Tabela 1

**Tabela statistică, pe volume apărute, a revistei „Bulletin de Mathématiques et de Physique"**

| Nr. crt. al volumului | Anul administrativ | Nr. fascicolei din an | Fascicola de la apariție | Anul apariției | Nr. articolelor pro vol. | Pagini pro volum |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | I (1929) | 1 | 1 | 1929 | 16 | 77 |
| 2 | I (1929) | 2 | 2 | 1930 | 10 | 69 |
| 3 | I (1929) | 3 | 3 | 1930 | 12 | 92 |
| 4 | II (1930-31) | 1 | 4 | 1930 | 9 | 76 |
| 5 | II (1930-31) | 2 | 5 | 1931 | 10 | 76 |
| 6 | II (1931-32) | 3 | 6 | 1931 | 11 | 94 |
| 7 | III (1931-32) | 1 | 7 | 1932 | 10 | 84 |
| 8 | III (1931-32) | 2 | 8 | 1932 | 7 | 72 |
| 9 | III (1932-33) | 3 | 9 | 1933 | 9 | 73 |
| 10 | IV (1933) | 1 | 10 | 1933 | 8 | 83 |
| 11 | IV (1933) | 2—3 | 11, 12 | 1933 | 20 | 113 |
| 12 | V (1933-34) | 1 | 13 | 1934 | 9 | 72 |
| 13 | V (1933-34) | 2—3 | 14, 15 | 1935 | 11 | 127 |
| 14 | VI (1934-35) | 1—2—3 | 16, 17, 18 | 1936 | 30 | 239 |
| 15 | VII (1935-36) | 1—2—3 | 19, 20, 21 | 1937 | 26 | 238 |
| 16 | VIII (1936-37) | 1—2—3 | 22, 23, 24 | 1937 | 26 | 231 |
| 17 | IX (1937-38) | 1—2—3 | 25, 26, 27 | 1938 | 21 | 207 |
| 18 | X (1938-39) | 1—2—3 | 28, 29, 30 | 1939 | 20 | 259 |
| 19 | XI (1939-40) | 1—2—3 | 31, 32, 33 | 1940 | 9 | 186 |

Pe lîngă articolele și informațiile pe care le-a publicat, revista «Bulletin de Mathématiques et de Physique» mai întreținea și un larg schimb de cărți și publicații cu instituțiile și oamenii de știință din diferite țări.

Astfel dintr-o statistică încheiată la data de 1 februarie 1937, se constată că 709 exemplare ale fiecărui volum erau trimise la adrese prestabilite din 33 țări (inclusiv Romînia), repartizate precum urmează : 78 la diferite politehnici ; 128 la diferite facultăți tehnice și de științe ; 13 la academii ; 41 la diferite alte instituții ; 16 la societăți culturale ; 29 la biblioteci independente de politehnici și facultăți ; 84 la diferite reviste similare ; 53 la edituri ; 92 la personalități științifice ; 4 la laboratoare ; 12 la societăți particulare și 159 la abonați particulari.

Cele 230 exemplare difuzate *direct* în țară se repartizează astfel : 18 la instituții de învățămînt superior și Academie ; 4 la societăți culturale ; 7 la biblioteci ; 15 la alte reviste similare ; 14 la personalități științifice ; 1 la laboratoare ; 12 la societăți particulare ; 159 la abonați.

In perioada 1929—1936 buletinul a primit pe bază de schimb cu străinătatea un număr de 1396 publicații (din care 187 românești și 1209 străine), repartizate astfel pe categorii : 218 reviste ; 229 cărți-tratate ; 716 teze de doctorat ; 161 extrase de lucrări științifice ; 72 anuare și diverse. In volumele revistei se publica regulat lista tipăriturilor primite pe bază de schimb în intervalul respectiv.

Un merit deosebit în organizarea apariţiei acestui periodic îi revine defunctului profesor Ernest Abason, redactorul responsabil al revistei.

Printre oamenii de ştiinţă din străinătate care au publicat articole în buletin se remarcă următoarele nume, citate în ordinea alfabetică a ţărilor de apartenenţă: Harold Hilten (Anglia); Bruwier L., Vignaux I. (Belgia); Obrechkoff G., Tchakaloff L. (Bulgaria); Crook Walton (S. U. A.); Bouligand G., Guillet L., Proca Al, Thebault V., Turrière E, (Franţa); Zervos P. (Grecia); Petralia S. (Italia); Karamata J., Peyovici T. (Iugoslavia); Biernacki M., Hoborschi A. (Polonia).

Marea majoritate a colaboratorilor acestui buletin a fost însă formată din corpul didactic al Politehnicei din Bucureşti, la care s-au alăturat şi membri ai corpului didactic dela Politehnica din Timişoara precum şi dela alte instituţii de învăţămînt superior din ţară. Se relevă în special colaborarea următorilor autori din ţară, citaţi în ordinea alfabetică: Abason Ernest, Avramescu A., Bardan D., Barbilian Dan, Beleş A., Bianu V., Botea N., Bratu Em., Budeanu C., Carafoli E., Cerchez V., Chirnoagă E., Ciorănescu N., Constantinescu G. G., Constantinescu I., Filipescu Gh., Fotino Sc., Germani Di., Gheorghiu I. S., Germănescu M., Hangan M., Huber-Panu I., Ioachimescu A., Ionescu Ion, Linteş I., Mateescu Cr., Marinescu Matei, Moisil Gr., Negrescu Tr., Nenitescu C., Niculescu Is., Niculescu M., Onicescu O., Pavel Dorin, Petrescu Gh., Pompei D., Popescu Al., Răduleţ R., Sarian M., Solacolu S., Staehelin P., Stan D., Ştefănescu Sabba, Stoilov S., Tănăsescu T., Teodorescu C. C., Teodorescu D., Tipei N., Toporescu E., Ţiţeica Şerban, Vasilescu-Karpen N., Vîlcovici V.

1.2. *Buletinul Politehnicei din Bucureşti (1941—1948).*

Aceas ă revistă, precum rezultă din nota publicată pe contracopertă, «reprezintă continuarea sub o formă nouă a vechiului «Bulletin de Mathématiques et de Physique», care a fost reorganizat într-un cadru mai larg, pentru a cuprinde toate domeniile ştiinţifice şi tehnice care sînt reprezentate în Politehnica din Bucureşti. Buletinul îşi începe activitatea cu data de 1 ianuarie 1941. Numerotaţia pe ani a decurs în continuare cu vechiul buletin, deşi a avut loc o schimbare de titulatură.

Administraţia acestui buletin este asigurată iniţial de Rectoratul Politehnicei unde este indicată şi redacţia sa. Mai tîrziu. în ianuarie 1948, s-a format un comitet de conducere compus din: Preşedinte Prof. Ing. Gh. Nicolau; Secretariatul de redacţie: Conf. St. Bălan, Prof. D. Borcea, Prof. G. G. Constantinescu; Membrii: Conf. D. Bardan, Prof. V. Bianu, Prof. C. Georgescu, Prof. I. S. Ghebrghiu, Prof. M. Hangan, Prof. C. Nenitescu, Asist. Gh. Oprescu, Prof. N. Petrulian, Prof. N. Sburlan, Prof. M. Stamatiu.

Spre deosebire de vechiul buletin, care apărea odată la patru luni, noul buletin apare trimestrial (4 numere-fascicole pe an), pînă în anul 1945 inclusiv, cînd apariţia sa este întreruptă pentru reorganizare şi este continuată în ianuarie 1948 sub conducerea comitetului menţionat. Apar însă numai 3 numere în 1948, deoarece noua restructurare a învăţămîntului superior din R. P. R., a impus o reorganizare pe baze noi a tuturor publicaţiilor ştiinţifice.

Cele două volume apărute în anul XII (1941) sînt tipărite la Tipografia «Finanțe și Industrie» din București, iar volumele următoare la «Imprimeria Națională», aceeași la care s-a tipărit și vechiul buletin. Formatul de apariție este 23,5 × 16 cm.

Mai jos se dă tabela statistică de apariție pe volume a «Buletinului Politehnicei din București.

Tabela 2

**Tabela statistică, pe volume apărute, a revistei „Buletinul Politehnicei din București**

| Nr. crt. al volumului *) | Anul administrativ | Nr. fascicolei din an | Anul apariției | Nr. articolelor pro vol. | Pagini pr volum |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | XII (1941) | 1—2 | 1941 | 26 | 220 |
| 21 | XII (1941) | 3—4 | 1941 | 15 | 147 |
| 22 | XIII (1942) | 1—2 | 1942 | 32 | 294 |
| 23 | XIII (1942) | 3—4 | 1942 | 20 | 188 |
| 24 | XIV (1943) | 1—2 | 1943 | 12 | 142 |
| 25 | XIV (1943) | 3 4 | 1943 | 15 | 198 |
| 26 | XV (1944) | 1—2—3—4 | 1944 | 11 | 124 |
| 27 | XVI (1945) | 1—2—3—4 | 1945 | 10 | 346 |
| 28 | XVII (1948) | 1 | 1948 | 10 | 94 |
| 29 | XVII (1948) | 2—3 | 1948 | 10 | 136 |

Printre colaboratorii din străinătate, al căror număr s-a micșorat din cauza războiului, se citează: Sikorski (U. R. S. S., 1942), Bouvais M. (Franța, 1942), Thébault V. (Franța, 1945). Din aceleași cauze, se reduce simțitor și schimbul de publicații cu străinătatea.

Printre colaboratorii din țară, care au semnat articole la noul buletin, se relevă în ordinea alfabetică: Balan St. Beleș A. Bianu V., Bratu Em. Budeanu C., Carafoli E., Cîrstoiu I., Cartianu Gh., Cerchez V., Ciorănescu N., Constantinescu G. G., Dumitrescu D., Fotino Sc., Georgescu C. C., Germani D., Gheorghiu I. S., Guțu Al., Hangan M., Huber-Panu I., Linteș I., Livada M., Marinescu Mat., Moisil G., Nicolau Gh., Parteni Cezar, Pavel D., Racliș Ro., Rădulescu Vlad, Solacolu Șerb., Steopoe A., Stoenescu Al., Tănăsescu T., Teodorescu C. C., Teodorescu N., Tipei N., Toporescu Er., Zamfirescu Gr.,

1.3. *Buletinul Institutului Politehnic București* (1956). Este actualul periodic al Institutului, al cărui prim număr este cel de față.

El apare cu patru fascicule pe an, fiecare fasciculă cuprinzînd aprox. 200 pag., formatul 17 × 25 cm.

Comitetul de redacție este cel indicat pe contracoperta interioară.

Numerotația tomurilor se face în continuare cu periodicele susmenționate.

1. 4. *Periodice ale institutelor alipite definitiv la Institutul Politehnic București.*

*„Buletinul Institutului Electrotehnic Universitar din București“*, a fost editat și administrat de către fostul Institut Electrotehnic Universitar din București, alipit în anul 1938 la Politehnica din București,

*) Numerotarea făcută în continuare cu „Bulletin de Mathématiques et Physique“.

pe baza legii pentru concentrarea învăţământului tehnic superior în politehnici.

In primul volum, apărut în iulie 1931 se indică pe contracopertă componenţa Comitetului de direcţie sub preşedinţia Prof. Dragomir Hurmuzescu, precum şi a comitetului de redacţie (secretariatul) sub preşedenţia Dr. Ing. E. Petraşcu. Formatul: 17 × 24 cm.

De la apariţia acestei reviste şi pînă la concentrarea învăţământului tehnic superior în Politehnici au apărut numai 3 volume ale acestui periodic. Primul volum (Nr. 1; 1931) cuprinde 170 pag. cu 13 art cole, al doilea (Nr. 2—4; 1931—1933) cuprinde 72 pag. cu 7 articole, iar al treilea volum (Nr. 5 : 1934—1936) cuprinde 117 pag. cu 10 articole.

Se relevă colaborarea următorilor membri ai corpului didactic dela fostul Institut Electrotehnic Universitar din Bucureşti, dintre care unii aveau funcţii similare şi la Politehnică (în ordine alfabetică): Bacinski E., Hurmuzescu Drag., Nicolau A. T., Negulescu P., Pavel Dorin, Persu A., Petraşcu E., Popescu Al., Petrescu Th., Roman P. G., Stavrescu A., Vencov St.

## 2. ANUARE ŞI MONOGRAFII.

### 2.1. ANUARE.

2.11. *Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. Anuarul pe anul şcolastic 1903—1904.* Este primul anuar organizat al Institutiei, fiind tipărit în anul 1904.

Conţine 285 pagini format 23 × 16 cm. Cuprinde: Organizaţia Şcoalei şi programele. Personalul şi tabele de elevi şi absolvenţi. Vizitele făcute Şcoalei la diferite date. Exerciţii, proiecte şi lucrări practice. In partea II-a se reproduc unele lucrări şi propuneri cu privire la o nouă organizare a Şcoalei.

2.12. *Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. Anuarul pe anul şcolastic 1905—1906.* Tipărit în 1906. Conţine 308 pag. format 23 × 16 cm. Cuprinde în partea I-a, istoricul Şcoalei şi în partea II-a organizarea Şcoalei cu date monografice asupra primelor laboratoare.

2.13. *Şcoala Politehnică din Bucureşti. Anuarul pentru anul 1926—1927.* Apare în 1927, cu 122 pag., format 23 × 16 cm. Cuprinde: o prezentare a Şcoalei; reproducerea decretului-lege de înfiinţare şi organizare a Şcoalelor Politehnice din Romînia şi legea de organizare a învăţământului silvic; lista personalului cu atribuţii; condiţiile de admitere şi programele de învăţământ; norma cu privire la obligaţiile şcolare ale elevilor; programul activităţii practice a studenţilor, etc.

2.14. *Şcoala Politehnică din Bucureşti. Anuarul pentru anul 1927—1928.* Apare în 1928, la tipografia „Cartea Romînească", cu 495 pag., format 23×16 cm. Cuprinde o prezentare iniţială, planurile de învăţământ, programele analitice ale tuturor disciplinelor, lista personalului cu atribuţii, etc.

2.15. *Şcoala Politehnică Bucureşti. Anuar pentru anul şcolar 1931—1932.* Tipărit în 1933, la „Imprimeria Centrală" Bucureşti, cu

183 pag. format 23×16 cm. Conținutul: Solemnitatea aniversării, de 75 ani, cu discursurile rostite; Date monografice cu privire la Cursul de pregătire militară; Consiliul profesoral, Consiliul de perfecționare, Comitetul de direcție, Personalul Școalei; Planuri de învățământ și programe de cursuri, tabele de elevi, statistica diplomaților Școalei; tabele de publicații primite în schimbul buletinului Școalei, etc.

*2.16. Școala Politehnică din București. Anuar.* Tipărit la „Cartea Romînească" în 1933, cu 899 pag., plus 2 anexe. Cuprinde: Decretul-lege relativ la înființarea și organizarea Școalelor Politehnice; Extras din legea de organizare a învățământului silvic; Norme pentru definitivarea corpului didactic; Regulamentul ciclurilor; Consiliul Profesoral; Consiliul de Perfecționare; Comitetul de Direcție; Personalul Școalei; Tabelul cursurilor militare; Programe de cursuri și lucrări practice; Programe analitice; Învățământul aeronautic al Școalei; Programele analitice ale cursurilor pentru secția de Aviație și Armament; Tabloul diplomaților Școalei; Statistica elevilor; Date statistice privitor la Buletinul Școalei; Legea pentru concentrarea pregătirii inginerilor, etc.

*2.17. Anuarul Institutului pentru Încercarea Materialelor și pentru Analize Industriale depe lîngă Școala Politehnică din București.* Lucrarea a apărut într-un singur volum (vol. I—1926) cu 187 pag. format 26,5×20,5 și 1 anexă. Ea cuprinde o dare de seamă cu privire la activitatea institutului cu același nume, care făcea parte integrantă din Politehnică, fiind destinat încercărilor mecanice și analizelor cerute de industrie. Partea întîia a lucrării cuprinde un istoric și o monografie a instalațiilor, iar a doua, lucrările efectuate în 1926, sub semnăturile: Remiceanu Al., Dumitriu D., Manea A., Pfeiffer G., cu toții chimiști din cadrul Institutului.

Lucrarea apare sub conducerea Prof. Severin Em. Șeful Institutului.

## 2.2. MONOGRAFII.

*2.21. Școala Națională de Poduri și Șosele.* Constituie o primă monografie a instituției, apărută în 1889, la „Imprimeria Statului", cu 285 pag., format 20,5×13 cm. Cuprinde: Personalul Școalei; Condițiuni de admisibilitate; Programele cunoștințelor cerute la concursurile de admitere; Programele cunoștințelor predate în Școală pentru toți anii.

*2.22. Aniversarea a 75 ani de învățământ tehnic în Romînia. 50 de ani dela Reorganizarea Școalei Naționale de Poduri și Șosele, 10 ani dela înființarea Școalei Politehnice București.* Lucrarea apare în 1931, în editura „Cartea Romînească" București, cu 298 pag., format 23×16 cm. Ea cuprinde două părți principale.

Prima parte: Darea de seamă asupra învățământului în Școala Politehnică din București, întocmită de N. Vasilescu-Karpen (Directorul Școalei). Această parte reprezintă o monografie a Școalei Politehnice, cu prezentarea organelor de conducere și administrare, a cor-

pului didactic, a personalului administrativ şi de laborator, a cursului de pregătire militară, a bibliotecii centrale, a laboratoarelor şi a institutului pentru încercări şi analize, a serviciului medical, a muzeului, dîndu-se totodată o statistică a elevilor şi diplomaţilor, cu tabele, planşe, diagrame, etc.

Partea a doua : Istoricul învăţămîntului ingineriei în Romînia pînă la înfiinţarea Şcoalelor politehnice, de Ion Ionescu, profesor. La aceasta se adaugă : indexul alfabetic de nume personale, index alfabetic de localităţi, tabela absolvenţilor vechii şcoli de Poduri şi Şosele, tabela absolvenţilor Şcoalei Politehnice pînă la 20 aprilie 1931, planurile tuturor clădirilor Şcoalei Politehnice, planşe, documentar.

Lucrarea cuprinde un valoros material pentru studiul evoluţiei învăţămîntului tehnic superior dela noi şi în special pentru cunoaşterea trecutului actualului Institut Politehnic din Bucureşti.

2.23. *Popescu Al. şi Popescu Cr. : Monografia Laboratorului de Electrotehnică pentru Încercări Industriale şi Cercetări.* Lucrarea, apărută în 1936 cu un cuprins de 142 pag. 29, fig. şi 9 planşe în text, oferă o amplă şi documentată descriere a laboratorului de Electrotehnică al Şcoalei Politehnice, în special a instalaţiilor destinate încercărilor curente pentru industrie, după ce într-un capitol introductiv se arată rolul laboratorului, organizarea sa, încercările posibile şi regulamentul de încercare.

Intr-un al treilea capitol sînt expuse în detaliu regulamentul de funcţionare, precum şi tarifele perceptibile pentru lucrările externe. De o deosebită valoare pentru organizarea materialului documentar este descrierea bibliotecii laboratorului (cap. II), organizată pe baza unor fişe speciale de documentare rapidă.

### 3. PUBLICAŢII ŞTIINŢIFICE

3.1. *Publications Scientifiques de l'Ecole Politeehnique Bucarest.* Sub acest titlu, conducerea Politehnicei şi-a propus să editeze treptat, într-o colecţie, lucrările ştiinţifice de valoare, elaborate în cadrul disciplinelor şi laboratoarelor instituţiei. Exemplarele acestei colecţii erau totodată destinate să servească şi drept publicaţii ştiinţifice pentru schimbul cu străinătatea.

Primul şi ultimul volum al acestei colecţii îl formează lucrarea intitulată: *Prof. Ing. Dr. Ene Carafoli: Travaux du laboratoire Aérodinamique.*

Lucrarea a fost tipărită în 1938, la «Imprimeria Naţională» din Bucureşti şi conţine 222 pag. format 17×25 cm, cu 3 planşe în anexă. Intr-un prim capitol al lucrării se face descrierea tehnică a sufleriei aerodinamice aparţinînd de Laboratorul de Aerodinamică al Politehnicei, precum şi metodica şi tehnica experimentală specifică acestei instalaţii.

Se dau indicii tehnici şi performanţele acestei suflerii, unică în acel timp în sud-estul Europei. Interesant este, în această parte a lucrării, şi faptul că aci se dau o serie de diagrame şi polare comparative cu rezultate ale încercărilor făcute cu aceeaşi machetă la sufleriile dela Moscova, Eiffel, Saint-Cyr, le Moulineaux, Göttingen şi Bucu-

reşti, din care rezultă justeţea soluţiei constructive şi a etalonării-reglajului instalaţiei din curtea Politehnicii.

In partea a doua a lucrării, Prof. E. Carafoli expune partea teoretică a unei noi metode de trasare a profilelor pentru aripele de avion, folosind ca puncte de plecare cercetările anterioare ale lui Jukowski, Karmán-Treffitz, von Mises, Girault, etc. şi bazîndu-se pe o justă interpretare geometrică a funcţiei de transformare, cît şi pe o determinare precisă a parametrilor care domină variaţia caracteristicelor geometrice şi aerodinamice ale profilului.

In lucrare se stabilesc relaţii aplicabile formei celei mai generale pentru întregul domeniu de aplicaţie. Metoda propusă de E. Carafoli scoate definitiv trasarea profilelor de aripă de avion din domeniul empirismului şi o situează pe linia justă a unei proiectări ştiinţifice, cu predeterminarea parametrilor aerodinamici doriţi.

Urmează apoi interpretarea rezultatelor experimentale ale cercetărilor făcute asupra profilelor trasate teoretic, studiindu-se influenţa fiecărui parametru aerodinamic.

In ultima parte a lucrării sînt publicate cotele şi polarele experimentale obţinute la sufleria aerodinamică pentru 101 profile diferite de aripi de avion construite şi trasate în laborator după metoda Carafoli.

* * *

Elaborarea rîndurilor de mai sus, s-a făcut pe baza materialului documentar aflat la Biblioteca Institutului Politehnic Bucureşti. Tezele de doctorat şi diferitele cursuri, litografiate sau tipărite, nu fac obiectul prezentei note.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicula 1 - 2

# INFORMAŢII

## ASPIRANŢII CARE ŞI-AU SUSŢINUT LUCRAREA DE DIZERTAŢIE IN CADRUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

| Nr. crt. | Numele şi pronumele aspirantului | Titlul lucrării de dizertaţie | Conducătorul ştiinţific |
|---|---|---|---|
| 1 | Blum Lya | Frînarea reacţiilor de oxidare în curent ondulat. | Prof. I. Atanasiu |
| 2 | Dănilă Nicolae | Contribuţia la studiul termoficării în R. P. R. şi la alegerea schemelor optime de termoficare pentru condiţiile din ţara noastră. | Prof. C. Dinculescu Membru coresp. al Acad. R. P. R. |
| 3 | Dulămiţă Titi | Cercetări experimentale privind influenţa prelucrărilor mecanice pe bază de deformaţii plastice şi a tratamentelor termice, asupra rezistivităţii unor materiale metalice pentru conductorii electrici. | Acad. Prof. Tr. Negrescu |
| 4 | Geru Nicolae | Cercetări experimentale privind influenţa tratamentelor termice asupra proprietăţilor magnetice ale unora dintre materialele magnetice dure. | Acad. Prof. Tr. Negrescu |
| 5 | Potolea Eugen | Contribuţii la studiul sistemelor electrice cu ajutorul meselor de calcul. | Prof. M. Bercovici Membru coresp. al Acad. R. P. R. |

| Nr. curent | Numele şi pronumele aspirantului | Titlul lucrării de dizertaţie | Conducătorul ştiinţific |
|---|---|---|---|
| 6 | Răileanu Dan | Sinteze în seria indolului, în vederea unei obţineri mai uşoare a acidului 3 —indolil—acetic (heteroauxina). | Acad. Prof. C. D. Nenițescu |
| 7 | Dinescu Radu | Studiul sistemelor : oxid de potasiu — oxid de aluminiu — bioxid de siliciu — oxid de sodiu — oxid de aluminiu — bioxid de siliciu, oxid de magneziu — oxid de aluminiu — bioxid de siliciu şi oxid de bariu — oxid de aluminiu — bioxid de siliciu, privind sinteza şi proprietăţile porţelanurilor. | Prof. Şerban Solacolu |

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

# INDICAŢII REDACŢIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri şi colaţionate de autor. Relaţiile matematice şi formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele şi graficele vor fi executate în tuş negru pe hîrtie de calc, numerotate şi prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent şi legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

In continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referinţă şi, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, unul în limba rusă şi celălalt în limba franceză, germană sau engleză, la alegerea autorului. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele şi iniţialele de pronume ale autorului, titlul şi volumul lucrării, editura, locul şi anul apariţiei, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina iniţială şi finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text şi se va numerota curent. Referinţele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Intreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experienţelor şi afirmaţiilor ştiinţifice revine numai autorilor. Conducerea revistei îşi rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

F 1130

KAT

# BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XVIII — FASCICULA 3—4

IULIE — DECEMBRIE 1956

LITOGRAFIA ŞI TIPOGRAFIA ÎNVĂŢĂMÎNTULUI BUCUREŞTI

## BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicule pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. In limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

**INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI**
**CALEA GRIVIŢEI 132**
**(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")**

## БУЛЕТИНУЛ ИНСТИТУТУЛУИ ПОЛИТЕХНИК БУКУРЕШТЬ

издаётся в четырех годовых выпусках продожением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленый на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производится по адресу:

**INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI**
**CALEA GRIVIŢEI 132**
**(*с указанием* „pentru Buletinul Institutului")**

## BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges des publications est:

**INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI**
**CALEA GRIVIŢEI 132**
**(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")**

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

# BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XVIII — FASCICULA 3—4

IULIE — DECEMBRIE 1956

LITOGRAFIA ŞI TIPOGRAFIA INVĂŢĂMINTULUI BUCUREŞTI

COMITETUL DE REDACȚIE:

Prof. *Antoniu S. Ion;* Prof. *Ausländer Iosif;* Prof. *Buzdugan Gh.,* Conf. *Călin Sergiu;* Prof. *Ciorănescu N.;* Prof. *Ionescu Tudor;* Acad. Prof. *Negrescu Traian;* Acad. Prof. *Nenițescu Costin;* Prof. *Nicolau Edmond;* Conf. *Pollingher Adolf;* Prof. *Rădulet Remus,* membru corespodent al Academiei R. P. R.; Prof. *Săveanu Lucius*; Prof. *Tănăsescu Tudor,* membru corespondent al Academiei R. P. R.

Redactor responsabil: Prof. *Parteni Cesar*

Lucrările publicate în acest volum au fost comunicate în cadrul sesiunii științifice comemorative a cadrelor didactice din Institutul Politehnic și Institutul de Construcții din București care a avut loc în zilele de 20, 21, 22 iunie 1956, cu ocazia împlinirii a 75 ani de învățământ tehnic superior în București.

Исследовательские работы, публикуемые в настоящем выпуске, были представлены объединенной научной сессии научных работников Политехнического Института и Строительного Института гор. Бухареста, посвященной 75-ти летней годовщине учреждения высшего технического образования в Румынии, состоявшейся 20, 21 и 22 июня 1956 в Бухаресте.

Les travaux publiés dans ce volume ont été présentés à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique et de l'Institut de Constructions de Bucarest. Cette session a eu lieu entre le 20 et le 22 juin 1956 pour fêter les 75 ans d'enseignement supérieur technique à Bucarest.

## SUMAR

### *MATEMATICĂ*


Pag.

O. KREINDLER — Simetria față de o curbă . . . . . 17

HAR. P. IONESCU — O teoremă asupra numerelor ordinare și cîteva consecințe . . . . . 35

I. SABAC — Cîteva proprietăți ale cîmpurilor biscalare . . 41

I. BARBĂLAT — Mulțimi cofinale . . . . . 51

ST. PETRESCU — Despre conexiunea indusă într-un spațiu neolonom $X_n^m$ . . . . . 57

ST. PETRESCU — Despre spațiile $A_2$. local euclidiene . . . 67

C. COȘNIȚĂ — O proprietate a curbelor plane . . . . . 81

C. COȘNIȚĂ — Asupra substituției omografice . . . . . 89

C. COȘNIȚĂ — Asupra unor transformări geometrice . . . 99

M. GUTMANN — Asupra mulțimii cîmpurilor biscalare . . . 109

M. GUTMANN — Cîteva formule stokiene . . . . . 119

FL. BUCUR — Asupra unei clase de transformări funcționale . 129

V. MAGER — Asupra unei ecuații n-metaarmonice . . . . 133

I. MATEI — Spațiile cu coneixune afină $A_2$ care admit grupul ortogonal sau pseudo-ortogonal de transformări de congruențe . . . . . 139

F. ABRAMOVICI — Asupra spațiilor cu conexiune afină cu cîmp paralel maximal . . . . . 145


### *FIZICA*


N. BARBULESCU — Ecuația de stare a subterfației lichide 149

V. PAVLU — Dozarea polarografică a vitaminei C în morcovi 157


### *CHIMIE ANORGANICĂ*


P. SPACU, F. ROBOIU — Metodă volumetrică pentru determinarea vitaminei $B_1$ . . . . . 165

P. SPACU, F. ROBOIU, M. BRAȘOVEANU — Metodă gravimetrică pentru determinarea vitaminei $B_1$ . . . . . 169

Pag.

P. SPACU, F. ROBOIU, M. BRAŞOVEANU — O metodă nouă pentru determinarea gravimetrică a acridinei . . . . 175
P. SPACU, V. SPIRIDONESCU — O metodă nouă volumetrică de dozare a metioninei . . . . . 181
P. SPACU, F. POPESCU — O metodă volumetrică pentru dozarea stronţiului . . . . . 185
P. SPACU, GR. TEODORESCU — O metodă de separare cantitativă a fierului de zinc . . . . . 189
P. SPACU, A. OVANESIAN, D. GĂVĂNESCU — Contribuţii la utilizările analitice ale cloraminei T. . . . . 193
GH. HAGYMAS, P. ANGHEL — Comportarea anozilor nichelaţi la obţinerea permanganatului de potasiu . . . . . 199

*CHIMIE ORGANICĂ*

I. L. BLUM — Elemente caracteristice în procesul de cocsificare al cărbunelui . . . . . 205
I. L. BLUM, I. NISTOR — Determinări gravimetrice, ca element de clasificare al unor huile romîneşti . . . . . 221

*CHIMIE TEHNOLOGICĂ*

P. VOICHESCU, A. DINESCU — Acţiunea de mineralizator şi fondant a fluoroapatitei la cimentul portland . . . . . 231

*ELECTROTEHNICĂ*

C. I. BUDEANU — Aplicaţii în practică de suprapunere a fenomenelor reactive şi deformante . . . . . 245
I. S. ANTONIU — Funcţionarea contoarelor de inducţie, într-un regim deformant . . . . . 263
E. ARIE, A. ARIE — Relativ la criteriile practice de calcul a stabilităţii statice . . . . . 281

*TELEFONIE*

S. CONDREA — Sistemul direcţional al repetorului vocal pe două fire . . . . . 301

*ELECTRONICĂ*

M. DRĂGĂNESCU — Dependenţa factorului de amplificare al unei triode de condiţiile de funcţionare . . . . . 317

Pag.

## *RADIOCOMUNICAŢII*

GH. CARTIANU — Emiţător cu modulaţie de frecvenţă pentru radiodifuziune . . . . . 327

AL. SPĂTARU — O metodă de calcul a distorsiunilor unui semnal modulat în frecvenţă aplicat amplificatorului de bandă largă cu circuite acordate pe aceeaşi frecvenţă şi decalat acordate 345

A. VALERIU — Spectrul de frecvenţe al oscilaţiilor cu modulaţie de frecvenţă şi fază în cazul semnalului dreptunghiular . 365

I. TEODORESCU, GH. RULEA, A. CENGEA — Generator de înaltă frecvenţă pentru lipit termoplaste . . . . . 381

## *NECROLOG*

V. CORLAŢEANU, E. ŞOFAN — Cezar Parteni Antoni . . 387

*INFORMAŢII* . . . . . 397

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика


| | Стр. |
|---|---|
| КРЕЙНДЛЕР О.—Симметрия относительно одной кривой | 17 |
| ИОНЕСКУ ХАР. П.—Об одной теореме теорий множеств порядковых чисел и некоторые ее последствия . . | 35 |
| ШАБАК ИОН Г.—Некоторые свойства бискалярных полей | 41 |
| БАРБАЛАТ И.—Кофинальные множества . , . . . . , | 51 |
| ПЕТРЕСКУ ШТ.—Об индуктивном соединении неоголомономном пространстве $X_n^m$ . . . . . | 57 |
| ПЕТРЕСКУ ШТ.—О местных эфклидовых пространствах $A_2$ | 67 |
| КОШНИЦА К.—Свйство плоских кривых . . . . . | 81 |
| КОШНИЦА К.—Об омографической замене . . , . . . | 89 |
| КОШНИЦА К.—О некоторых геометрических превращениях | 99 |
| ГУТМАНН М.—О множестве дву скалярных полей . . | 109 |
| ГУТМАНН М.—Некоторые формулы типа стокса . . . . | 119 |
| БУКУР ФЛ.—О классе функциональных превращений . . | 129 |
| МАДЖЕР В.—К вопросу о н-метагормоническом уравнении | 133 |
| МАТЕЙ И.—Пространства с афинным соединением $A_2$, допускающим ортогональную или псевдоортогональную группу преобразозаний конгруенций . . , . . . , | 139 |
| АБРАМОВИЧ Ф.—К вопросу пространств с афинным соединением с параллельным максимальным полем . . | 145 |


### Физика


| | |
|---|---|
| БЭРБУЛЕСКУ Н.—Уравнение состояния подповерхности жидкости . . . . , . . . . . , . . . . | 149 |
| ПАВЛУ В,—Полярографическая дозировка витамина *C* в моркови . . . . . | 157 |


### Неорганическая химия


| | |
|---|---|
| СПАКУ П., РОБОЮ Ф.—Объемный метод определения витамина $B_1$ . . . . . | 165 |
| СПАКУ П., РОБОЮ Ф., БРАШОВЯНУ М,—Весовой метод дозировки витамина $B_1$ . . . . . | 169 |

Стр.

СПАКУ П., БРАШОВЕАНУ М., РОБОЮ Ф.—Новый метод гравиметрического определения акридина . . . . . 175
СПАКУ П., СПИРИДОНЕСКУ В.—Новый объемный метод дозирования метионина . . . . . 181
СПАКУ П., ПОПЕСКУ Ф.—Объемный метод дозирования стронция . . . . . 185
СПАКУ П,, ТЕОДОРЕСКУ ГР.—Новый метод количественного отделепия железа от цинка . . . . . 189
СПАКУ П., ОВАНЕЗИЯН А., ГАВАНЕСКУ Д.—К вопросу аналитического применения хлорамина *Т* . . . . . 193
ХАГИМАШ Г., АНГЕЛ П. — О поведении никелированных анодах при получении перманганата калия . . . . 199

Органическая химия

БЛЮМ И. И.—Характерные элементы процесса коксификации угля . . . . . 205
БЛЮМ И, Л., НИСТОР И.—Гравиметрические определения, как элемент классификации некоторых сортов румынского каменного угля . . . . . 221

Технологическая химия

ВОИКЕСКУ П,, ДИНЕСКУ А.—Минерализующее и понижающее точки лавления воздействие флуорапатита на портландский цемент . . . . . 231

Электотехника

БУДЯНУ К. И,—Применения в практике совпадения реактивных и деформирующих явлений . . . . . 245
АНТОНИУ И, С.—Функционирование индукционных счетчиков при деформирующем режиме . . . . . 263
АРИЕ Е., АРИЕ А.—К вопросу о практических критериях, используемых для расчета статической устойчивости 281

Телефония-Телеграфия

КОНДРЯ С.—Дифференциальная система двухпроводного усилителя звуковой частоты . . . . . 301

Электроника

ДРАГАНЕСКУ М.—Зависимость коэффициента усиления триода от рабочих условий . . . . . 317

*Стр.*

Радиосвязь

КАРТИАНУ Г., ПРЕДА А. — Радиопередатчик с частотной модуляцией для радиопередач . . . . . 327

СПЭТАРУ АЛ.—Метод расчета искажений частотно модулированного сигнала, вносимых широкополосным усилителем с настроенными на одинаковую частоту а также расстроснми контурами . . . . . 345

ВАЛЕРИУ А.—Спектры колебаний с частотной и фазовой модуляцией при прямоугольном сигнале . . . . . 365

ТЕОДОРЕСЧУ И., РУЛЯ ГХ., ЧЕНДЖЯ А. — Генератор высокой частоты для обработки термопластических материалов . . . . . 381

Некролог

КОРЛЭЦЯНУ В., ШОФАН Е.— Чезар Партени Антони 387

СООБЩЕНИЯ . . . . . 397

## SOMMAIRE


Pag.

*MATHÉMATIQUES*

O. KREINDLER — La symétrie par rapport à une courbe . 17
HAR. P. IONESCU — Un théorème sur les nombres ordinaux et quelques conséquences . . . . . 35
I. SABAC — Quelques propriétés des champs biscalaires . . . 41
I. BARBĂLAT — Ensembles cofinales . . . . . 51
ST. PETRESCU — Sur la connexion induite dans un espace non holonome $X_n^m$ . . . . . 57
ST. PETRESCU — Sur les espaces $A_2$ localement euclidiens 67
C. COŞNIŢĂ — Sur une propriété des courbes planes . . . 81
C. COŞNIŢĂ — Sur une substitutian homographique . . . . 89
C. COŞNIŢĂ — Sur certaines transformations géométriques . 99
M. GUTMANN — Sur l'ensemble des champs biscalaires . . 109
M. GUTMANN — Quelques formules stokiennes . . . . . 119
FL. BUCUR — Sur une classe de transformations fonctionelles 129
V. MAGER — Sur une équation n-métaharmonique . . . . . 133
I. MATEI — Sur les espaces à connexion affine $A_2$ admettant le groupe orthogonal ou pseudo-orthogonal de transformations de congruences . . . . . 139
F. ABRAMOVICI — Sur les espaces à connexion affine avec un champ parallèle maximal . . . . . 145

*PHYSIQUE*

N. BARBULESCU — L'équation d'état de la subterface liquide 149
V. PAVLU — Sur le dosage polarographique de la vitamine C dans les carottes . . . . . 157

*CHIMIE ANORGANIQUE*

P. SPACU, F. ROBOIU — Méthode volumétrique pour déterminer la vitamine $B_1$ . . . . . 165
P. SPACU, F. ROBOIU, M. BRAŞOVEANU — Une méthode gravimétrique pour le dosage de la vitamine $B_1$ . . . . . 169

Pag.

P. SPACU, F. ROBOIU, M. BRAŞOVEANU — Une nouvelle méthode de détermination gravimétrique de l'acridine . . . 175

P. SPACU, V. SPIRIDONESCU — Une nouvelle méthode de dosage volumétrique de la méthionine . . . . . 181

P. SPACU, F. POPESCU — Une méthode volumétrique pour le dosage de strontium . . . . . 185

P. SPACU, GR. TEODORESCU — Une nouvelle méthode de séparation quantitative du fer d'avec le zinc . . . . . 189

P. SPACU, A. OVANESIAN, D. GAVYNESCU — Contributions à l'emploi de la chloramine T dans la chimie analytique . 193

GH. HAGYMAS, P. ANGHEL — Le comportement des anodes nickelés utilisés pour obtenir le permanganate de potassium 199

*CHIMIE ORGANIQUE*

I. L. BLUM — Eléments caractéristiques dans le procesus de cokéfaction du carbon . . . . . 205

I. L. BLUM, I. NISTOR — Déterminations gravimétriques comme élément de classifications des houilles roumaines . . . 221

*CHIMIE TECHNOLOGIQUE*

P. VOICHESCU, A. DINESCU — L'action de minéralisateur et fondant de la fluorapatite sur le cimènt de portland . . 231

*ELECTROTECHNIQUE*

C. I. BUDEANU — Applications dans la pratique de la super position des phénomènes réactifs et déformants . . . . 245

I. S. ANTONIU — Le fonctionnement des compteurs d'induction en régime déformant . . . . . 263

E. ARIE, A. ARIE — A propos des crytériums utilisés en pratique pour le calcul de la stabilité statique . . . . . 281

*TÉLÉFONIE*

S. CONDREA — Le système directionnel du répéteur à deux fils 301

*ELECTRONIQUE*

M. DRĂGANESCU — La dépendance du facteur d'amplification d'une triode des conditions de son fonctionnement . . . . 317

Pag.

*RADIOCOMMUNICATISON*

GH. CARTIANU — Emmetteur à modulation de fréquence pour la radiodiffusion . . . . . 327

AL. SPĂTARU — Une méthode de calcul des distorsions d'un signal modulé en fréquence appliqué à un amplificateur de bande large, avec des circuits décalé accordés et avec des circuits synchrones . . . . . 345

A. VALERIU — Le spectre de fréquences des oscillations modulées en fréquence et en phase au cas du signal rectangulaire . . 365

I. TEODORESCU, GH. RULEA, A. CENGEA — Générateur pour la soudure des thermoplastiques par les pertes diélectriques 381

*NECROLOGE*

V. CORLĂŢEANU, E. ŞOFAN — Cezar Parteni Antoni . . 387

*INFORMATIONS* . . . . . 397

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

# MATEMATICĂ



## SIMETRIA FAŢĂ DE O CURBĂ

de O. KREINDLER

1. Pornind de la problema construcției bolților, putem ajunge la noțiunea de *simetrie față de curbă.*

Să considerăm o boltă, limitată în concavitate de o curbă *I* (intrados) și în convexitate de o curbă *E* (extrados). Calculul bolții se face considerînd-o redusă la axa ei mediană, curba *M,* iar intradosul se trasează simetric față de această mediană, curbele *E* și *I,* avînd poziții speciale față de curba *M.*

Ducînd o normală (N) într-un punct oarecare al curbei M, segmentele AB și AB' trebuie să fie egale.

In practică se dă de obicei curba M și se trasează empiric, prin puncte, curbele E și I. Dacă s-ar da, pe lîngă M și curba I (din considerente de estetică, simplitate în execuție etc.), ar rămîne să construim prin puncte curba E (Fig. 1).

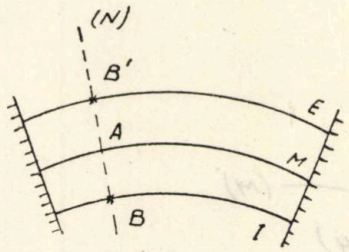



Fig. 1.

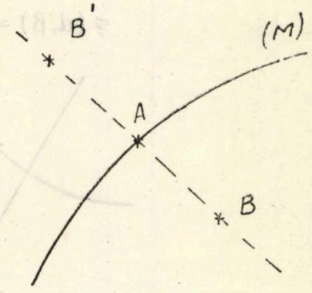



Fig. 2.

2. În cele ce urmează vom trata problema analitic, căutînd să obținem ecuația curbei E (Fig. 1) cunoscînd ecuațiile curbelor M și I.

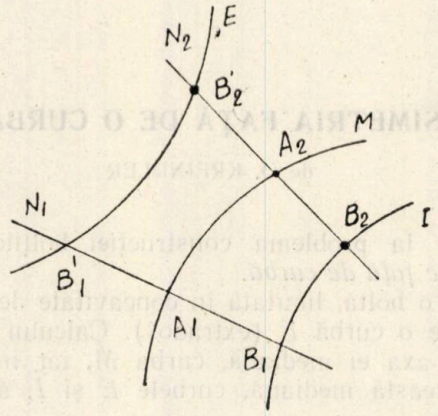
În legătură cu considerațiile de mai sus și prin analogie cu simetria în raport cu o dreaptă,, vom defini *simetria față de o curbă.* — Considerăm curba plană (M) a cărei ecuație o cunoaștem

$$f(x, y) = 0$$

Luăm în planul curbei un punct B și normala (N) la curbă în punctul A, care trece prin B, (Fig. 2). — Pe această normală luăm AB' = AB.

Prin definiție spunem că *punctul B' este simetricul lui B față de curba M.*

Dacă punctul B descrie o curbă I, simetricul lui, B', față de (M) va descrie o curbă (E) pe care o vom numi *simetrica curbei (I) față de curba (M)* (Fig. 3).



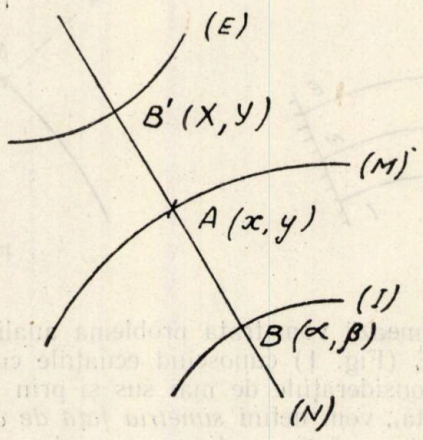

Fig, 3.

In cele ce urmează vom arăta deci, cum putem afla ecuația curbei (E), cînd cunoaștem ecuațiile curbelor (M) și (I).

3, Tratăm problema ca una de loc geometric. Cunoaștem

$$f(x, y) = 0 \text{ ecuația curbei } (M) \tag{1}$$

$$\varphi(d, \beta) = 0 \text{ ecuația curbei } I \tag{2}$$




Fig, 4.

Avem prin definiție:

$$AB = AB'$$

deci :

$$x = \frac{a+X}{2} \tag{3}$$

$$y = \frac{\beta+Y}{2} \tag{4}$$

și ecuația normalei

$$Y - y = \frac{f'_y}{f'_x}(X - x) \tag{5}$$

Pentru a obține ecuația curbei E, adică o relație între X și Y, de forma $\Phi\ (X, Y) = 0$, trebuie să eliminăm între cele cinci relații de mai sus, cei patru parametrii : $\alpha$, $\beta$, $x$ și $y$.

Eliminarea se efectuează în general greu.

În multe cazuri putem ajunge la rezultat mai ușor, exprimînd coordonatele X și Y ale punctului B' de pe curba E, în funcție de $x$ și $y$ coordonatele punctului A.

Notînd cu $\theta$ unghiul normalei cu axa ox, avem : $\operatorname{tg}\theta = \frac{f'_y}{f'_x}$

din care scoatem

$$\sin\theta = \frac{f'_y}{\pm\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} \quad \text{și} \quad \cos\theta = \frac{f'_x}{\pm\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}$$

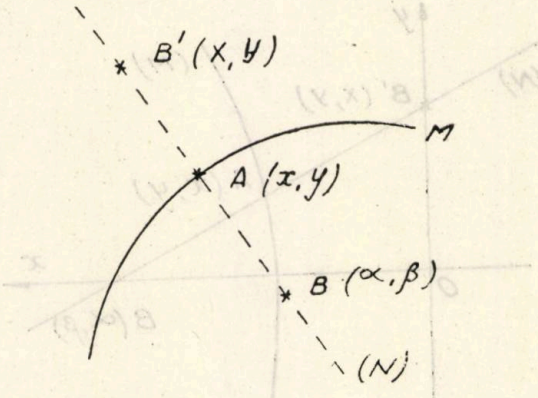



Fig. 5.

Însemnînd cu $\varrho$ segmentul AB avem :

$$\alpha = x + \varrho \cos\theta$$

$$\beta = y + \varrho \sin\theta$$

Pentru a-l calcula pe $\varrho$, scriem că $\alpha$ și $\beta$ verifică ecuația curbei I, $\varphi\ (\alpha, \beta) = 0$.

Avem:

$$\varphi\,[x+\varrho\,\cos\,\theta,\ y+\varrho\,\sin\,\theta]=0$$

din care putem calcula valoarea (sau valorile) lui $\varrho$, exprimate prin x și y, sau, ținînd seama de ecuația curbei (M) f (x, y) = 0, îl exprimăm pe $\varrho$ prin unicul parametru x.

Deoarece B' este simetricul lui B față de A, avem:

$$X=x-\varrho\,\cos\,\theta$$

$$Y=y-\varrho\,\sin\,\theta$$

care relații ne dau exprimarea parametrică a curbei E, prin parametrii x și y, sau numai prin x.

Dacă eliminăm parametrii x și y [ținînd seama de ecuația f(x,y) = o] sau unicul parametru x, obținem ecuația curbei (E) sub forma

$$\psi\,(X,Y)=0$$

Calculele suferă mici modificări, dacă ecuația curbei (M) este dată sub formă parametrică.

Vom trata cîteva exemple prin metodele schițate mai sus.

4. Să exprimăm simetria axei Ox, față de o hiperbolă echilateră (fig. 6).

Avem ecuațiile curbelor

$$(M)\quad x^2-y^2=1$$

$$(I)\qquad \beta=0$$

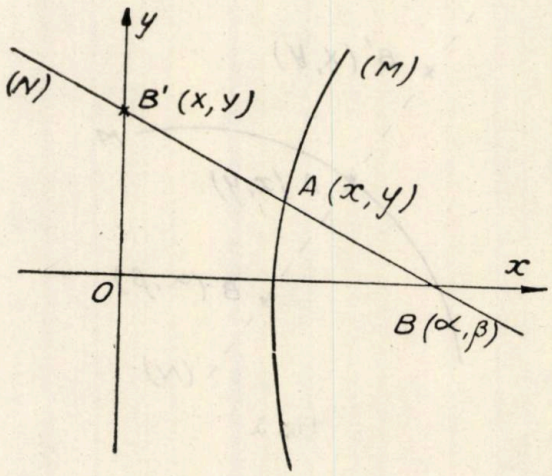



Fig. 6.

Scriem și celelalte relații:

$$x=\frac{\alpha+X}{2};\quad y=\frac{\beta+Y}{2}\quad \text{sau}\quad y=\frac{Y}{2}$$

Normala are ecuația

$$(N) \qquad Y - y = -\frac{y}{x}(X - x)$$

Introducem pe $y = \frac{Y}{2}$ în ecuația normalei

$$Y - \frac{Y}{2} = -\frac{\frac{Y}{2}}{x}(X - x)$$

sau

$$\frac{Y}{2} = -\frac{Y}{2}\frac{X - x}{x}$$

de unde $x = 0$ ecuația curbei (E).

Rezultă că simetria axei ox față de hiperbola echilateră este axa oy, adică axele sînt simetrice față de hiperbolă.

5. Să găsim simetrica unei tangente față de un cerc.

Luăm cercul cu centrul în origine și tangenta verticală (Fig. 7).

Avem ecuațiile:

$$(M) \qquad f(x, y) = 0 \qquad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(I) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0 \qquad \alpha = 1$$

$$x = \frac{\alpha + X}{2}; \quad y = \frac{\beta + Y}{2}$$

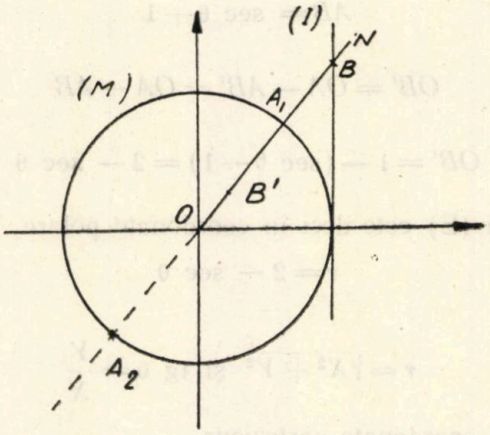



Fig. 7.

Toate normalele la curba (M), adică la cerc trec prin o; ele au deci ecuația

$$(N) \qquad Y = \frac{y}{x}X$$

Avem

$$x=\frac{1+X}{2} \quad y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

și

$$y=\pm\sqrt{\frac{3-2X-X^2}{4}} \qquad y=\pm\frac{\sqrt{3-2X-X^2}}{2}$$

și înlocuind în ecuația normalei

$$y=\frac{\pm\sqrt{3-2X-X^2}}{2\frac{1+X}{2}}X \quad \text{sau} \quad Y=\pm\frac{X}{X+1}\sqrt{3-2X-X^2}$$

ecuația curbei (E).

Curba (E) va avea două ramuri distincte, deoarece punctului B de pe tangentă îi corespund două puncte $A_1$ și $A_2$ pe cerc și deci două puncte simetrice $B_1$ și $B_2$.

*Observație.* În acest caz putem ajunge la ecuația curbei (E), prin considerații simple geometrice, exprimînd-o în coordonate polare.

Avem (Fig. 7)

$$OB=\sec\theta=OA+AB=1+AB$$

de unde

$$AB=\sec\theta+1$$

Însă

$$OB'=OA-AB'=OA-AB$$

deci

$$OB'=1-(\sec\theta-1)=2-\sec\theta$$

Ecuația curbei (E) este deci în coordonate polare

$$r=2-\sec\theta$$

Înlocuind

$$r=\sqrt{X^2+Y^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\theta=\frac{Y}{X}$$

obținem ecuația în coordonate carteziene

$$Y=\pm\frac{X}{X+1}\sqrt{3-2X-X^2}$$

Pentru a construi curba, observăm că există între

$$-3\leqslant x\leqslant+1$$

o asimptotă verticală

$$x = -1$$

și un maximum între 0 și +1

Dăm graficul în Fig. 8.

Curba are ramurile $E_1$ și $E_2$

Ea este o concoidă, ceea ce rezultă și din forma polară

$$r = -\sec\theta + 2$$

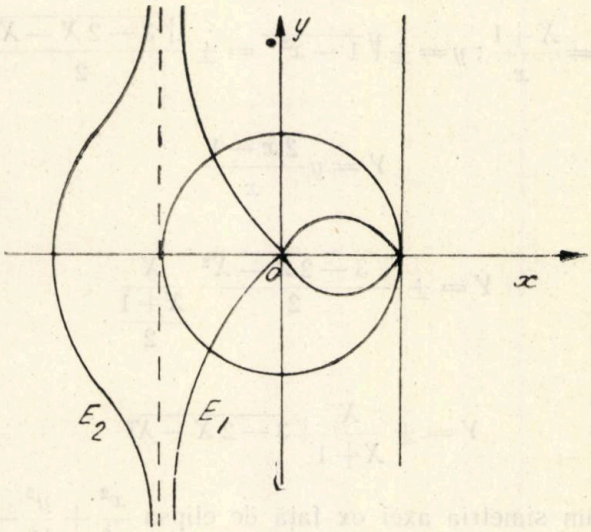



Fig. 8.

Să tratăm aceeași problemă prin metoda a doua.

Avem

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

și deoarece $x^2 + y_2 = 1$ avem

$$\cos\theta = x \quad \text{și} \quad \sin\theta = y$$

Notăm

$$AB = \varrho$$

Avem

$$\alpha = x + \varrho\cos\theta \qquad \alpha = x + \varrho x$$

$$\beta = x + \varrho\sin\theta \qquad \beta = y + \varrho y$$

Insă

$$\alpha = 1$$

deci

$$x + \varrho x = 1 \qquad \varrho = \frac{1-x}{x}$$

Coordonatele lui B' sînt

$$X = x - \varrho \cos\theta\,; \quad X = x - \frac{1-x}{x}x = 2x - 1$$

$$Y = y - \varrho \sin\theta\,; \quad Y = y - \frac{1-x}{x}y = y\,\frac{2x-1}{x}$$

Eliminăm pe x și y între cele două relații și ecuația cercului $x^2 + y^2 = 1$

$$x = \frac{X+1}{x}\,; \; y = \pm\sqrt{1-x^2} = \pm\frac{\sqrt{3-2X-X^2}}{2}$$

și înlocuind în

$$Y = y\,\frac{2x-1}{x}$$

avem :

$$Y = \pm\frac{\sqrt{3-2X-X^2}}{2}\,\frac{X}{\frac{X+1}{2}}$$

adică :

$$Y = \pm\frac{X}{X+1}\sqrt{3-2X-X^2}$$

6. Să aflăm simetria axei ox față de elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

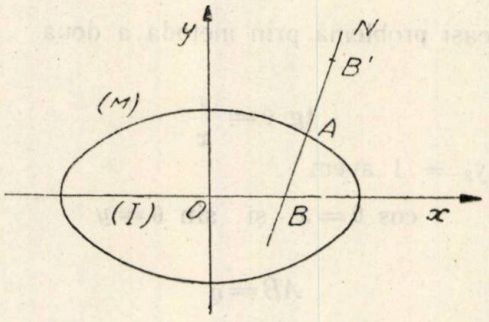



Fig. 9.

Vom utiliza forma parametrică a elipsei

$$\text{curba } (M) \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$\text{curba } (I)\ \beta = 0 \quad \text{deci } y = \frac{Y}{2}$$

Ecuația normalei (N) este

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0$$

sau

$$-a\,\sin\,t\,(X-a\,\cos\,t)+\frac{Y}{2}\,b\,\cos\,t=0$$

Avem:

$$\sin\,t=\frac{y}{b}=\frac{Y}{2b}$$

și

$$\frac{aY}{2b}\,[X-a\,\cos\,t]+\frac{Y}{2}\,b\,\cos\,t=0$$

$$-a\,[X-a\,\cos\,t]+b^2\,\cos\,t=0 \text{ sau}$$

$$aX=(a^2+b^2)\,\cos\,t \quad \text{și} \quad Y=2y$$

de unde obținem ecuațiile parametrice ale curbei (E)

$$X=\frac{a^2+a^2}{a}\,\cos\,t$$

$$Y=2b\,\sin\,t$$

ceea ce ne arată că *(E)* simetrica axei *ox* față de elipsa dată, este tot o elipsă cu semiaxele

$$a'=\frac{a^2+b^2}{a} \quad \text{și} \quad b'=2b$$

Să utilizăm pentru rezolvarea aceleeași probleme a doua metodă.
Avem ecuația elipsei

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

Notînd cu $\theta$ unghiul normalei cu axa ox avem:

$$\text{tg}\;\theta=-\frac{1}{y'}=\frac{f'_y}{f'_x}=\frac{a^2y}{b^2x}$$

de unde

$$\cos\,\theta=\frac{b^2x}{\pm\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}\;;\quad \sin\,\theta=\frac{a^2y}{\pm\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}$$

Avem deci coordonatele lui B

$$\alpha=x-\frac{\varrho\,b^2x}{\sqrt{b^4a^2+a^4y^2}}\;;\quad \beta=y-\frac{\varrho\,a^2y}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}$$

Insă

$$\beta=0$$

deci

$$\varrho = \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2}$$

Coordonatele lui B' sînt:

$$X = x + \varrho \frac{b^2 x}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}; \quad Y = 2y \quad (\text{din } \beta = 0)$$

Introducînd valorile lui $\varrho$ avem:

$$X = x + \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2} \frac{b^2 x}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}$$

sau

$$X = x + \frac{b^2}{a^2} x = \frac{a^2 + a^2}{a^2} x \quad \text{și} \quad Y = 2y$$

Scoatem valorile lui x și y

$$x = \frac{a^2}{a^2 + b^2} X \qquad y = \frac{Y}{2}$$

și introducîndu-le în ecuația elipsei avem:

$$\frac{X^2}{\left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right)^2} + \frac{Y^2}{(2b)^2} - 1 = 0$$

o elipsă cu semiaxele

$$\frac{a^2 + b^2}{a} \quad \text{și} \quad 2b$$

*Observație.* În cazul cercului, b = a și curba E cu ecuația

$$X = 2a \cos t; \quad Y = 2a \sin t$$

este un cerc cu rază dublă, concentric cu cel dat, ceea ce este de altfel evident.

7. Să aflăm simetrica curbei exponențiale față de bisectoarea primului cadran.

Avem:

$$\text{Curba } M: \quad y - x = 0$$

$$\text{Curba } I: \quad \beta = e^{\alpha}$$

Normala e $\perp$ pe bisectoare:

$$(N) \qquad Y - y = -(X - x)$$

sau

$$X + Y = x + y$$

și deoarece

$$x = y \qquad X + Y = 2y$$

$$x = \frac{\alpha + X}{2} \quad \text{și} \quad y = \frac{\beta + y}{2}$$

deci

$$\alpha + X = \beta + Y = 2y \quad \text{sau} \quad \beta + Y = X + Y$$

de unde

$$X = \beta \quad \text{și} \quad Y = \alpha$$

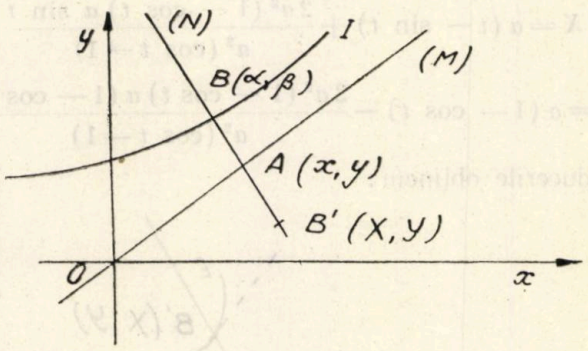



Fig. 10.

Înlocuind în $\beta = e^{\alpha}$ sau în $\alpha = \ln \beta$ avem $Y = \ln X$, adică simetrica curbei exponențiale față de bisectoarea primului cadran este curba logaritmică, ceea ce este de altfel evident.

Exerciții propuse:

1. Să se afle simetrica axei *ox* față de parabola $y_2 = 2x$.
(Se va folosi metoda prin calcularea lui $\varrho$)

$$R: \; Y^2 = 4X + 4$$

2. Să se afle simetrica axei ox față de curba $y = x^3$

8 Ne propunem să aflăm simetrica evolutei față de curbă. Coordonatele punctului B de pe evoluta I sînt coordonatele centrului de curbură ($\alpha$ și $\beta$) ale lui A de pe curba M.

Dacă curba M e exprimată parametric: $x = x(t)$ $y = y(t)$ avem:

$$\alpha = x - \frac{(x'^2 + y'^2)\, y'}{x'\, y'' - x''\, y'}$$

$$\beta = y + \frac{(x'^2 + y'^2)\, x'}{x'\, y'' - x''\, y'}$$

Coordonatele X și Y ale lui B', simetricul lui B față de A (pe normală) vor fi deci:

$$X = x + \frac{(x'^2 + y'^2)\, y'}{x'\, y'' - x''\, y'} \quad \text{și} \quad Y = y - \frac{(x'^2 + y'^2)\, x'}{x'\, y'' - x''\, y'}$$

Aceste relații exprimă parametric simetrica evolutei față de curbă. Să aplicăm relațiile pentru cicloida:

$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t)$$

Avem

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1 - \cos t)$$
$$x'y'' - x''y' = a^2(\cos t - 1)$$

deci

$$X = a(t - \sin t) + \frac{2a^2(1 - \cos t)\, a \sin t}{a^2(\cos t - 1)}$$

$$Y = a(1 - \cos t) - \frac{2a^2(1 - \cos t)\, a(1 - \cos t)}{a^2(\cos t - 1)}$$

Făcînd reducerile obținem:

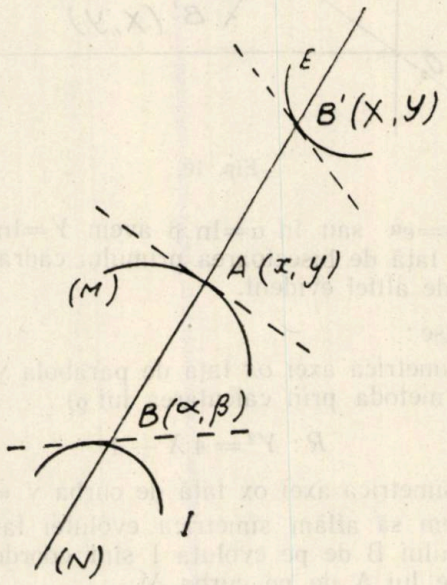



Fig. 11.

$$X = a(t - 3 \sin t)$$
$$Y = 3a(1 - \cos t)$$

9 Ne propunem să stabilim o relație între derivatele la curbele (M), (I) și (E) în puncte corespunzătoare.

Fixăm un punct A pe curba (M) de ecuație dată

$$f(x, y) = 0$$

Unghiul format de normala (N) cu axa Ox este $\theta$ și putem exprima $\cos\theta$ și $\sin\theta$ prin parametrul x.

Pe de altă parte avem:

$$\alpha = x + \varrho \cos\theta \quad \text{și} \quad \beta = y + \varrho \sin\theta,$$

aceste coordonate trebuind să verifice ecuația curbei *I*:

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

Vom scoate pe $\varrho$ din

$$\varphi[x + \varrho \cos\theta, y + \varrho \sin\theta] = 0$$

așa cum am mai arătat.

$\varrho$ se exprimă tot prin parametrul x [ținînd seama de f(x,y) = 0].

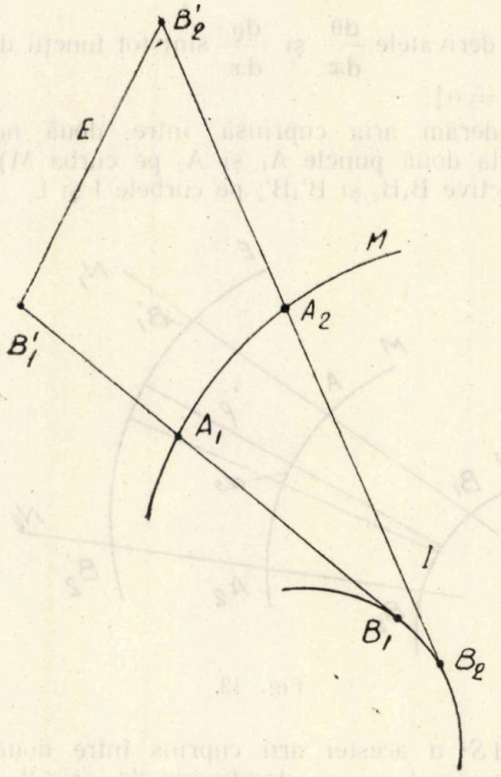



Fig. 12.

Avem deci exprimate în funcție de x cantitățile: $\varrho$, cos $\theta$ și sin $\theta$, de unde rezultă că și coordonatele lui B', X și Y sînt exprimate în funcție de x prin relațiile:

$$X = x - \varrho \cos\theta; \quad Y = y - \varrho \sin\theta$$

Diferențiind avem:

$$dX = dx + \varrho \sin\theta\, d\theta - \cos\theta\, d\varrho$$

$$dY = dy - \varrho \cos\theta\, d\theta - \sin\theta\, d\varrho$$

de unde

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy - \varrho \cos\theta\, d\theta - \sin\theta\, d\varrho}{dx + \varrho \sin\theta\, d\theta = \cos\theta\, d\varrho}$$

sau

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dy}{dx} - \varrho \cos\theta \frac{d\theta}{dx} - \sin\theta \frac{d\varrho}{dx}}{1 + \varrho \sin\theta \frac{d\theta}{dx} - \cos\theta \frac{d\varrho}{dx}}$$

care reprezintă relația căutată.

Observăm că derivatele $\frac{d\theta}{dx}$ și $\frac{d\varrho}{dx}$ sînt tot funcții de x [ținînd seama de relația f(x,y) = o].

10 Să considerăm aria cuprinsă între două normale $N_1$ și $N_2$ (corespunzătoare la două puncte $A_1$ și $A_2$ pe curba M). și porțiunile respective $B_1B_2$ și $B'_1B'_2$ pe curbele I și E.

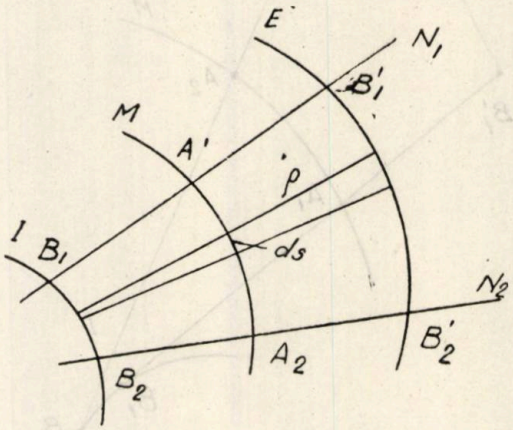



Fig. 13.

Un element $dS$ a acestei arii cuprins între două normale infinit vecine poate fi considerat ca un dreptunghi de arie $2\,\varrho\,d\,S$ ($dS$ fiind de arc pe curba M).

Aria totală va fi deci:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\,\varrho\, ds$$

în care $\varrho$ și $dS$ sînt exprimate prin x și dx.

Vom aplica această formulă pentru a calcula aria cuprinsă între axa Ox și simetrica ei față de elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, problema tratată punctul 6.

În acest caz avem:

$$\varrho = \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2}$$

și deoarece

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx \quad \text{și} \quad y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$ds = \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2 y}\, dx;$$

aria va fi deci

$$S = 2\int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2 y}\, dx = \frac{2}{a^4}\int_{-a}^{+a} \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{y}\, dx$$

în care

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Avem deci:

$$S = \frac{2b}{a^3}\int_{-a}^{+a} \frac{b^2 x_2 - a^2 (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

Prin substituția

$$x = a \cos \varphi$$

avem

$$S = \frac{2b}{a^3}\int_0^{\pi} [b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2]\, d\varphi$$

care ne dă pentru aria întreagă:

$$S_1 = \frac{2b(a^2 + b^2)}{a}\pi$$

adică aria elipsei E, ceea ce e evident.

11 Putem — evident — extinde problema și în spațiu, căutînd simetrica unei suprafețe I față de o suprafață M.

Se dau deci: (fig. 14).

1. f(x,y,z) = o ecuația suprafeței M.
2. φ (α, β, γ, = 0 ecuația suprafeței I.

B'AB este normala în A la suprafața M.

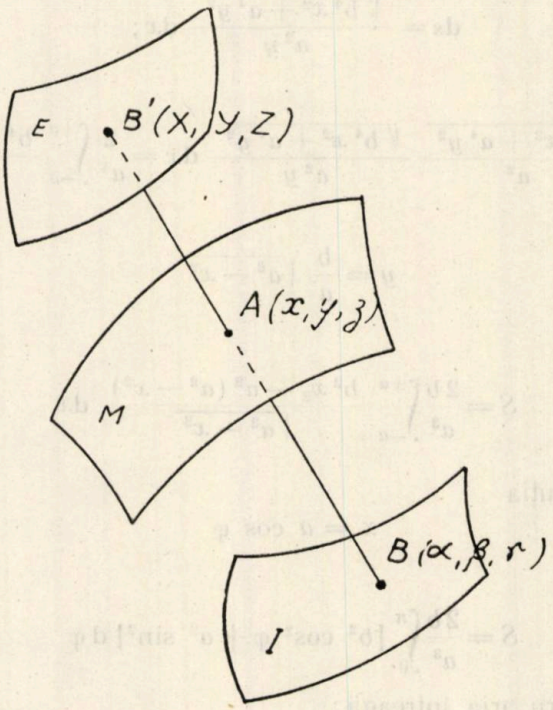
Avem pe de altă parte:

$$x = \frac{\alpha + X}{5};\ y = \frac{\beta + Y}{2};\ z = \frac{\gamma + Z}{2}$$

și ecuațiile normalei

$$\frac{X-x}{f'_x}=\frac{Y-y}{f'_y}\frac{Z-z}{f'_z}$$

Pentru a afla ecuația suprafeței E adică o relație de forma $\Phi(X, Y, Z)=0$ trebuie să eliminăm între cele *șapte* ecuații (1), (2), (3) și (4) cei șase parametrii $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.




Fip. 14.

Vom da un exemplu: aflarea simetricei unui plan tangent față de o sferă.

Luăm sfera $x^2+y^2+z^2-1=0$ și planul tangent în A paralel cu yoz.

Avem relațiile:

$$2)\ x^2+y^2+z^2-1=0$$

$$2)\ \alpha=1$$

$$3)\ x=\frac{\alpha+X}{2};\ y=\frac{\beta+Y}{2};\ z=\frac{\gamma+Z}{2}$$

Normalele sînt drepte care trec prin origine.

$$2)\ x=\lambda X;\ y=\lambda Y;\ z=\lambda Z$$

Înlocuind în ecuația sferei obținem:

$$\lambda^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) - 1 = 0$$

Pentru a-l determina pe $\lambda$ pornim de la $x = \frac{\alpha + X}{2}$

și deoarece

$$\alpha = 1 \quad \text{și} \quad x = \lambda X; \; \lambda X = \frac{1 + X}{2}$$

de unde

$$\lambda = \frac{1 + X}{2X}$$

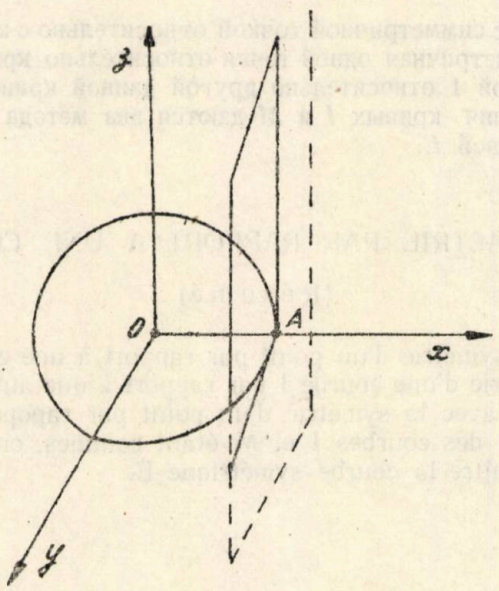



Fig. 15.

Ecuația suprafeței simetrice va fi deci

$$(1 + X)(X^2 + Y^2 + Z^2) - 4X^3 = 0$$

Să aflăm intersecția ei cu planul xoy

adică $Z = 0$

$$(1 + X)^2 (X^2 + Y^2) - 4X^2 = 0$$

sau

$$Y^2 = \frac{4X^2}{(1+X)^2} - X^2$$

$$Y^2 = \frac{X^2}{(1+X)^2}[4-(1+X)^2] = \frac{X^2}{(1+X)^2}[3-2X-X^2]$$

$$Y = \pm \frac{X}{1+X}\sqrt{3-2X-X^2}$$

ceea ce este în concordanță cu problema tratată la punctul 5.

## СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ КРИВОЙ

(Краткое содержание)

По сходству с симметричной точкой относительно с какой либо прямой. определяется симметричная одной точки относительно кривой, так-же симметря одной кривой 1 относительно другой данной кривой *M*.

Зная уравнения кривых *I* и *M* даются два метода для нахождения симметричной кривой *E*.

## LA SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UNE COURBE

(Résumé)

Ou étudie la symétrie d'un point par rapport à une courbe quelconque, ainsi que la symétrie d'une courbe I par rapport à une autre courbe M donnée, par analogie avec la symétrie d'un point par rapoport une droite.

Les équations des courbes I et M étant connues, on donne deux méthodes pour connaître la courbe symétrique E.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

512.9

# O TEOREMĂ ASUPRA NUMERELOR ORDINALE ȘI CÎTEVA CONSECINȚE

de HAR. P. IONESCU

1. În această lucrare vom demonstra următoarele:

*Teoremă:* Pentru două numere ordinele transfinite $\alpha$ și $\beta$ care au aceeași putere corespund două numere ordinale $2^{\alpha}$ și $2^{\beta}$ care au deasemenea o aceeași putere, deci $|\alpha| = |\beta|$ și $|2^{\alpha}| = |2^{\beta}|$.

Se pot regăsi cu ușurință proprietățile numerelor ordinele transfinite.

Ca o consecință vom regăsi că: numerele ordinale transfinite $\alpha$ și $2^{\alpha}$ aparțin unei aceleași clase de numere, oricare ar fi numărul ordinal $\alpha$; deci $|\alpha| = |2^{\alpha}|$.

Pentru oricare numere ordinale $\alpha$ și $\beta$ avem $|\alpha^{\beta}| = |\alpha \cdot \beta|$.

Ca o remarcă: numerele ordinale $\alpha^{\nu}$ și $\beta^{\mu}$ au o aceeași putere, cînd cîte unul (cel mai mare) dintre cele două numere care le compun, au fiecare deasemeni o aceeași putere.

2. Dacă $\alpha$ este un număr ordinal transfinit oarecare, iar $A(\alpha)$ mulțimea bine — ordonată formată din toate numerele ordinale mai mici decît $\alpha$, aranjate în ordinea mărimii (primul fiind zero), mulțimea $A(\alpha)$ are ca tip de ordine, numărul ordinal $\alpha$.

Mulțimea tuturor submulțimilor formată cu un număr finit — n — de elemente, care aparțin lui $A(\alpha)$, are ca tip de ordine număru ordinal 2 și este asemenea cu mulțimea bine — ordonată a tuturor numerelor ordinale $< 2^{\alpha}$, ordonate după mărimea lor (fiind inclus și zero). [1]

3. *Teoremă. Dacă $\alpha$ și $\beta$ sînt două numere ordinale transfinite care au aceeași putere, numerele $2^{\alpha}$ și $2^{\beta}$ au deasemenea o aceeași putere.*

Fie două numere ordinale $\alpha$ și $\beta$ care aparțin unei aceleași clase de numere — adică au același număr cardinal — deci $|\alpha| = |\beta|$.

În consecință între elementele mulțimilor $A(\alpha)$ și $A(\beta)$ există o corespondență biunivocă.

Fie $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ o submulțime formată cu un număr finit — n — de elemente care aparțin mulțimii bineordonată $A(\alpha)$ și care sînt în ordinea mărimii, primul fiind cel mai mare. Fiind dată prima corespondență, este posibil de format o submulțime $(x'_{r_1}, x'_{r_2}, \cdots x'_{r_m})$ care să nu conțină decît un număr finit de elemente din mulțimea $A(\beta)$ și astfel ca între elementele celor două submulțimi să existe o corespondență biunivocă.

Fie deci cele două submulțimi considerate:

$$(x_1, x_2, \cdots x_n) \text{ și } (x'_{r_1}, x'_{r_2}, x'_{r_3}, \cdots, x'_{rm}).$$

În prima submulțime elementele sunt aranjate în ordinea mărimii, primul fiind cel mai mare. Va trebui ca și în a doua submulțime să aranjăm elementele la fel.

Presupunînd că elementele submulțimei $(x'_{r_1}, x'_r \cdots x'_{r_m})$ nu sînt aranjate în ordinea mărimei; vom nota $z_1 = x'_{rk}$, unde $k < m$, cel mai mare dintre numere; apoi $z_2 = x'_{r_i}$, $i < m$, următorul și așa mai departe. Atunci submulțimea devine $(z_1, z_2, \cdots, z_m)$.

Cu aceste două grupe de numere ordinale vom defini următoarele două [1] numere:

$$y = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_n}; \quad z = 2^{z_1} + 2^{z_2} + \cdots + 2^{z_m}$$

unde

$$\alpha > x_1 > x_2 > \cdots > x_n \geq 0 \text{ și } \beta > z_1 > z_2 > \cdots > z_m \geq 0 .$$

Cele două numere ordinale $y$ și $z$ sînt respectiv mai mici decît $2^\alpha$ și $2^\beta$.

Pentru o demonstrație completă a acestei teoreme, vom distinge trei cazuri:

a) numerele $\alpha$ și $\beta$ nu sînt numere limită;
b) $\alpha$ este un număr limită și $\beta$ nu este număr limită;
c) numerele $\alpha$ și $\beta$ sînt numere limită.

Dacă $\alpha$ nu este număr limită, fie $\alpha_0$ cel mai mare număr limită mai mic decît $\alpha$, deci $\alpha = \alpha_0 + m$, $m < \omega$. Atunci:

$$|\alpha| = |\alpha_0 + m| = |\alpha_0| .$$

Cum $m < \omega$ avem:

$$|2^\alpha| = |2^{\alpha_0 + m}| = |2^{\alpha_0}||2^m| = |2^m||2^{\alpha_0}| = |2^m + \alpha_0| = |2^{\alpha_0}| ,$$

aceasta arată că este suficient a demonstra propoziția noastră pentru $\alpha$ și $\beta$ numere limită, (pentru cazul c).

Fie $\alpha$ un număr limită și $x$ un număr ordinal astfel că $x < \alpha$ iar $n$ un număr natural $(n < \omega)$.

Avem

$$x + n < \alpha ; \quad n < 2^n$$

și [2]

$$2^x \cdot n < 2^x \cdot 2^n = 2^{x+n} < 2^\alpha$$

deci

$$y = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_n} < 2^{x_1} \cdot n < 2^{x_1} \cdot 2^n = 2^{x+n} < 2^\alpha$$

$$y < 2^\alpha, \text{ analog } z < 2^\beta .$$

Așa că la fiecare grupă formată cu un număr finit de numere ordinale mai mici decît $\alpha$, corespunde un număr ordinal $y$ mai mic decît $2^\alpha$.

Invers, oricare număr ordinal mai mic decît $2^\alpha$, poate fi reprezentat, într-un singur mod, sub formă normală printr-o grupă de $n$ ($n$ finit) numere ordinale mai mici decît $\alpha$. [3].

Existînd o corespondență biunivocă între elementele care formează grupele considerate, există deasemenea, o corespondență biunivocă între numerele $y$ și $z$; deci:

*Între elementele mulțimilor bine-ordonate de numere ordinale mai mici decît $2^\alpha$ și $2^\beta$ există o corespondență biunivocă* (care face să corespundă numărului zero din prima multime, numărul zero din mulțimea a doua), *dacă numerele ordinale $\alpha$ și $\beta$ aparțin unei aceleaș clase de numere.*

Adică dacă $|\alpha| = |\beta|$ avem deasemenea și $|2^\alpha| = |2^\beta|$.

4. *Consecințe.*

Ca o consecință imediată putem regăsi cu ajutorul propoziției de mai sus proprietățile cunoscute ale numerelor ordinale.

Ca un exemplu să arătăm proprietățile:

1). *Orice număr ordinal transfinit are aceiaș putere ca cel mai mare număr delta pe care îl conține și ca cel mai mic număr delta mai mare decît el* [1].

Fie $\alpha$ unnumăr limită. Atunci $2^{2^\alpha} = 2^h = \delta$, este un număr delta [1]).

Primul număr delta mai mare decît $\delta$ [1] este $\delta^\omega = 2^{h\omega}$, căci primul număr limită superior lui $\alpha$ este $\alpha + \omega$.

Cum $\alpha$ și $\alpha + \omega$ cu aceiaș putere, după cele mai sus, avem

$$|h| = |h \cdot \omega| \quad \text{și} \quad |\delta| = |\delta^\omega|.$$

Însă pentru orice număr ordinal $\xi$ există două numere delta consecutive așa că:

$$\delta \leqq \xi < \delta^\omega.$$

dar

$$|\delta| \leqq |\xi| < |\delta^\omega| = |\delta| \; ; \; |\delta| = |\xi| = |\delta^\omega|.$$

2). *Orice număr ordinal transfinit are aceiaș putere ca cel mai mare număr epsilon pe care îl conține.*

Cum orice număr epsilon este un număr delta, după cele de mai sus, pentru oricare număr ordinal transfinit $\alpha$ putem scrie:

$$\varepsilon \leqq \alpha < \varepsilon^\omega \; ; \; |\alpha| = |\varepsilon|.$$

5. *Pentru orice număr transfinit $\alpha$ numerele ordinale $\alpha$ și $2^\alpha$ aparțin unei aceleiaș clase de numere.*

Avem

$$\varepsilon \leqq \alpha < \varepsilon^\omega \qquad \alpha < 2^\alpha < 2^{\varepsilon^\omega}$$

presupunînd că $\alpha$ nu este un număr epsilon.

Sau

$$\varepsilon \leqq \alpha < 2^\alpha < 2^{\varepsilon^\omega},$$

---

1. Căci $\alpha = \omega\tau$, $2^{2^\alpha} = 2^{2^{\omega\tau}} = 2^{\omega^\tau}$, $\omega^\tau = h$ un număr principal.

cum $2^{\varepsilon} = \varepsilon$ putem scrie

$$\varepsilon = 2^{2^{\varepsilon}} < \alpha < 2^{\alpha} < 2^{\varepsilon^{\omega}} .$$

În virtutea teoremei de la 3) rezultă că numerele $2^{\varepsilon}$ și $2^{\varepsilon^{\omega}}$ aparțin aceleiaș clase, dacă numerele $2^{\varepsilon} = \varepsilon$ și $\varepsilon^{\omega} = 2^{\varepsilon^{\omega}}$ **aparțin unei aceleiaș** clase. Aceste numere aparțin aceleiaș clase pentru că numerele $\varepsilon$ și $\varepsilon \cdot \omega$ aparțin aceleiaș clase.

Deci

$$|\varepsilon| = |2^{2^{\varepsilon}}| < |\alpha| < |2^{\alpha}| < |2^{\varepsilon^{\omega}}| = |\varepsilon|$$

deci

$$|\alpha| = |2^{\alpha}| .$$

6. *Oricare ar fi numerele ordinale transfinite* $\beta$ *și* $\mu$ *numerele* $\beta^{\mu}$ *și* $\beta \cdot \mu$ *aparțin unei aceleiaș clase.*

Pentru oricare număr ordinal transfinit $\beta$ avem

$$2^{\lambda} \leqq \beta < 2^{\lambda+1} ,$$

iar cu cele din 5) deducem :

$$|\lambda| = |2^{\lambda}| = |\beta| .$$

Dar

$$2^{\lambda\mu} \leqq \beta^{\mu} \leqq 2^{(\lambda+1)\mu}$$

deci

$$|\lambda\mu| = |2^{\lambda\mu}| \leqq |\beta^{\mu}| \leqq |2^{(\lambda+1)\mu}| = |(\lambda+1)\mu| = |\lambda\mu| ;$$

$$|\beta^{\mu}| = |\lambda\mu| = |\beta \cdot \mu| .$$

Sau : *numărul* $\beta^{\mu}$ *are aceiaș putere ca cea mai mare putere pe care o are unul din cele două numere ce-l compun.*

Consecință : în mod imediat rezultă că numerele ordinale $\alpha^{\nu}$ și $\beta^{\mu}$ au aceiaș putere, cînd cîte unul (cel mai mare) dintre cele două numere care le compun, au fiecare deasemeni o aceiaș putere. Căci

$$|\alpha^{\nu}| = |\alpha \cdot \nu| ; \; |\beta^{\mu}| = |\beta \cdot \mu| \text{ deci trebue ca } |\alpha \cdot \nu| = |\beta \cdot \mu| .$$

## BIBLIOGRAFIE

1. *G. Sudan* — Sur les nombres delta — Buletinul Academiei. — t. XXVI, pag. 219, 214, 216, 213. București.
2. *E. Kamke.* — Mengenlehre. — pag. 110, 71 (Berlin, 1928).
3. *G. Sudan.* — Sur la forme normale de Cantor. — Buletinul Academiei. — t. XXVII, pag. 114, 115, București.
4. *W. Sierpinski.* — Leçons sur les nombres transfinis. — pag. 171 (Paris,

## ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИЙ МНОЖЕСТВ ПОРЯДКОВЫХ ЧИСЕЛ И НЕКОТОРЫЕ ЕЁ ПОСЛЕДСТВИЯ

(Краткое содержание)

Доказывается следующая теорема: если $\alpha$ и $\beta$ два порядковых трансфинитных числа одинаковой мощности, то порядковые числа $2^\alpha$ и $2^\beta$ также будут одинаковой мощности.

Затем мы найдём свойства порядковых трансфинитных чисел.

Доказывается одной из следствий теоремы согласно которой порядковые трансфинитные числа $\alpha$ у $2^\alpha$ принадлежат одному классу чисел, независимо от порядкового трансфинитного числа $\alpha$, то есть $|\alpha| = |2^\alpha|$.

Для любых порядковых чисел $\alpha$ и $\beta$ имеем

$$|\alpha^\beta| = |\alpha \cdot \beta|$$

Порядковые числа $\alpha^\nu$ и $\beta^\nu$ будут одной мощности, если самое большое из чисел $\alpha$; $\nu$ и самое большое из чисед $\beta$; $\mu$ так-же будут одной мощности.

## UN THÉOREME SUR LES NOMBRES ORDINAUX ET QUELQUES CONSÉQUENCES

(Résumé)

Nous démontrons la proposition suivante:

Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres ordinaux transfinis qui ont la même puissance, les nombres ordinaux $2^\alpha$ et $2^\beta$ ont aussi une même puissance.

Puis nous retrouverons les propriétés des nombres ordinaux transfinis.

Par conséquent nous montrons que: les nombres ordinaux transfinis $\alpha$ et $2^\alpha$ appartiennent à une même classe de nombres, quelque soit le nombre ordinal transfini $\alpha$ — c'est-à-dire: $|\alpha| = |2^\alpha|$.

Pour tous les nombres ordinaux $\alpha$ et $\beta$ on a: $|\alpha^\beta| = |\alpha \cdot \beta|$.

Les nombres ordinaux $\alpha^\nu$ et $\beta^\mu$ ont la même puissance si le plus grand des nombres $\alpha$; $\nu$ et le plus grand des nombres $\beta$; $\mu$ ont aussi la même puissance.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956 ; Fascicola 3—4

# CÎTEVA PROPRIETĂȚI ALE CÎMPURILOR BISCALARE

de ION GH. ȘABAC

Un cîmp vectorial **V** se numește biscalar dacă poate fi exprimat sub forma

$$\mathbf{V} = \lambda \text{ grad } U \tag{1}$$

unde $\lambda$ și $U$ sînt funcții scalare de punct arbitrare. Se știe că, pentru aceasta, este necesar și suficient ca **V** să satisfacă relația

$$\mathbf{V} \text{ rot } \mathbf{V} = 0 \tag{2}$$

în domeniul considerat.

Aceste cîmpuri vectoriale sînt singurele care admit o familie de suprafețe $(S)$ ortogonale liniilor de cîmp. Suprafețele $(S)$, precum și funcțiile $\lambda$ și $U$, se obțin prin integrarea ecuației cu diferențiale totale

$$\mathbf{V}\, d\mathbf{r} = 0$$

Dacă $\mathbf{V} = \mathbf{V}(P)$ este dat, suprafețele $(S)$ sînt complet determinate. Reciproc, oricărei familii de suprafețe $U(x,y,z) = C$ se poate atașa un cîmp de forma (1) $\lambda$, fiind o funcție arbitrară.

Obiectul acestei lucrări este stabilirea unor relații între curbura medie și totală a suprafețelor $(S)$ și cîmpul vectorial **V**, precum și utilizarea acestora la studiul unor cîmpuri fizice.

Forma suprafețelor $(S)$ depinde, evident, numai de direcția vectorilor **V**. Dată fiind familia de suprafețe $U(x,y,z) = C$, cel mai simplu cîmp vectorial ce i se poate atașa este cel al vectorilor unitari normali.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{G} \text{ grad } U, \quad G = |\text{ grad } U| \tag{3}$$

Cu aceasta, curbura medie a suprafețelor $(S)$ poate fi exprimată prin

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{div } \mathbf{n}$$

formulă datorită lui P. Appell [1]. Expresii analoage, folosind componentele vectorului **n** și derivatele lor parțiale, au fost date și pentru curbura totală de A. Buhl [2].

In cele ce urmează, vom stabili pentru curbura totală o nouă formulă, în care **n** figurează direct, nu prin componentele sale. Vom regăsi formulele date de Appell și Buhl și apoi vom deduce, pentru cazul general al

unui cîmp biscalar oarecare, relaţii între **V** şi cele două curburi ale suprafeţelor $(S)$.

1. Fie $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, componentele vectorului **n** faţă de triedrul **i, j, k** şi $\mathbf{dr}=\mathbf{i}\,dx+\mathbf{j}\,dy+\mathbf{k}\,dz$ o deplasare pe una din direcţiile principale ale suprafeţei $(S)$. Legătura între **dr** şi diferenţiala vectorului **n**, corespunzătoare acestei deplasări, este dată de formulele lui Olinde-Rodrigues

$$d\alpha=\frac{1}{R}dx\,,\quad d\beta=\frac{1}{R}dy\,,\quad d\gamma=\frac{1}{R}dz\,,$$

unde $R$ este raza de curbură principală respectivă. Aceste relaţii pot fi scrise matricial sub forma

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\alpha}{\partial z}\\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z}\\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial z}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}dx\\ dy\\ dz\end{matrix}\right\|=\frac{1}{R}\left\|\begin{matrix}dx\\ dy\\ dz\end{matrix}\right\| \tag{4'}$$

Direcţiile principale sînt direcţii proprii ale matricei

$$A=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\alpha}{\partial z}\\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z}\\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial z}\end{matrix}\right\| \tag{5}$$

iar curburile principale sînt valori proprii ale acestei matrice.

Ecuaţia caracteristică a matricei $A$

$$s^3-I_1s^2+I_2s-I_3=0$$

se reduce la

$$s^3-I_1s^2+I_2s=0 \tag{6}$$

deoarece, din relaţia $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\mathbf{n}^2=1$, rezultă

$$\alpha\ \mathrm{grad}\ \alpha+\beta\ \mathrm{grad}\ \beta+\gamma\ \mathrm{grad}\ \gamma=0\,, \tag{7}$$

deci

$$I_3=|A|=(\mathrm{grad}\ \alpha\,,\ \mathrm{grad}\ \beta\,,\ \mathrm{grad}\ \gamma)=0\,.$$

O rădăcină a ecuaţiei caracteristice este totdeauna nulă, iar celelalte, în general nenule, vor reprezenta cele două curburi principale $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$

în punctul considerat. Relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației (6) vor da:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=I_1=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}=\operatorname{div}\mathbf{n} \tag{8}$$

$$\frac{1}{R_1R_2}=I_2=\frac{\partial(\beta,\gamma)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(\gamma,\alpha)}{\partial(z,x)}+\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)} \tag{9}$$

Curbura medie și curbura totală a unei suprafețe $(S)$ coincid, respectiv, cu primul și al doilea invariant al matricei $A$.

Recunoaștem în (8) formula lui Appell. Vom arăta, ceva mai departe, cum se poate deduce din (9) formula lui Buhl.

2. Să căutăm și pentru curbura totală o expresie în care să nu figureze componentele vectorului $\mathbf{n}$. Pentru aceasta, vom introduce un nou cîmp vectorial

$$\mathbf{N}=\frac{d\mathbf{n}}{dn}$$

unde $\frac{d\mathbf{n}}{dn}$ este derivata vectorului $\mathbf{n}$ după direcția sa. Vectorul $\mathbf{N}$ este dirijat după normala principală la linia de cîmp ce trece prin punctul considerat, iar modulul său reprezintă curbura acestei curbe, în punctul respectiv.

Divergența acestui nou cîmp vectorial are expresia

$$\operatorname{div}\mathbf{N}=\frac{d}{dn}(\operatorname{div}\mathbf{n})+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2+$$
$$+2\left[\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right]$$

Folosind relația evidentă

$$[\operatorname{div}\mathbf{n}]^2=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2+2\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial z}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right],$$

obținem

$$\operatorname{div}\mathbf{N}=(\operatorname{div}\mathbf{n})^2+\frac{d}{dn}(\operatorname{div}\mathbf{n})-2\left[\frac{\partial(\beta,\gamma)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(\gamma,\alpha)}{\partial(z,x)}+\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)}\right]$$

Relația (9) devine:

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{1}{2}\left[(\operatorname{div}\mathbf{n})^2+\frac{d}{dn}(\operatorname{div}\mathbf{n})-\operatorname{div}\left(\frac{d\mathbf{n}}{dn}\right)\right] \tag{10}$$

Să observăm că, ținînd seama de (8), avem încă

$$\operatorname{div}\mathbf{N}=\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]^2+\frac{d}{dn}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]-\frac{2}{R_1R_2}$$

3. Formulele (8) și (9) mai pot fi scrise și sub alte forme

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\mathbf{i}\ \operatorname{grad}\alpha+\mathbf{j}\ \operatorname{grad}\beta+\mathbf{k}\ \operatorname{grad}\gamma \tag{8'}$$

$$\frac{1}{R_1R_2}=\mathbf{i}(\operatorname{grad}\beta\times\operatorname{grad}\gamma)+\mathbf{j}(\operatorname{grad}\gamma\times\operatorname{grad}\alpha)+\mathbf{k}(\operatorname{grad}\alpha\times\operatorname{grad}\beta) \tag{9'}$$

Curbura medie este suma proecțiilor vectorilor $\operatorname{grad}\alpha$, $\operatorname{grad}\beta$, $\operatorname{grad}\gamma$ respectiv pe **i, j, k,** iar curbura totală este suma proecțiilor vectorilor $\operatorname{grad}\beta\times\operatorname{grad}\gamma$, etc.

Din (7), deducem

$$\frac{1}{\alpha}(\operatorname{grad}\beta\times\operatorname{grad}\gamma)=\frac{1}{\beta}(\operatorname{grad}\gamma\times\operatorname{grad}\alpha)=\frac{1}{\gamma}(\operatorname{grad}\alpha\times\operatorname{grad}\beta)$$

a căror valoare comună este

$$\alpha(\operatorname{grad}\beta\times\operatorname{grad}\gamma)+\beta(\operatorname{grad}\gamma\times\operatorname{grad}\alpha)+\gamma(\operatorname{grad}\alpha\times\operatorname{grad}\beta)$$

Cu acestea,

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{\mathbf{n}}{\alpha}[\operatorname{grad}\beta\times\operatorname{grad}\gamma]=\frac{\mathbf{n}}{\beta}[\operatorname{grad}\gamma\times\operatorname{grad}\alpha]=\frac{\mathbf{n}}{\gamma}[\operatorname{grad}\alpha\times\operatorname{grad}\beta]$$

sau încă, sub o formă simetrică în $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,

$$\frac{1}{R_1R_2}=\mathbf{n}[\alpha(\operatorname{grad}\beta\times\operatorname{grad}\gamma)+\beta(\operatorname{grad}\gamma\times\operatorname{grad}\alpha)+\gamma(\operatorname{grad}\alpha\times\operatorname{grad}\beta)] \tag{11}$$

Această expresie, scrisă sub formă de determinant,

$$\frac{1}{R_1R_2}=-\begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\alpha}{\partial z} & \alpha \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} & \beta \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} \tag{11'}$$

este formula lui Buhl.

4. Dacă în locul cîmpului vectorial **n** vom considera un cîmp biscalar oarecare **V**, expresiile celor două curburi nu vor mai fi tot așa de simple.

Cîmpul vectorial **V**, fiind presupus continuu și $V\neq 0$ într-un domeniu $(D)$, putem dispune de semnul funcției $U$ astfel ca **V** și grad $U$, să fie de același sens în toate punctele domeniului. Vectorul **n** va fi versorul lui **V**

$$\mathbf{V}=\mathbf{n}V \tag{12}$$

Formula (8) devine:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{V}\operatorname{div}\mathbf{V}-\frac{1}{V^2}\mathbf{V}\operatorname{grad}V.$$

Dar

$$\frac{\mathbf{V}}{V}\operatorname{grad}V=\mathbf{n}\operatorname{grad}V=\frac{dV}{dn},$$

unde $\frac{dV}{dn}$ este derivata modulului lui $\mathbf{V}$ după versorul său, deci

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{V}\left[\operatorname{div}\mathbf{V}-\frac{dV}{dn}\right] \tag{13}$$

Deasemenea, din (9) obţinem

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{1}{V^2}\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}+\frac{d\mathbf{V}}{dn}\operatorname{grad}V-\frac{dV}{dn}\operatorname{div}\mathbf{V}\right] \tag{14}$$

unde $u$, $v$, $w$ sînt componentele vectorului $\mathbf{V}$ în raport cu triedrul **i, j, k.**

Din relaţia $V^2=u^2+v^2+w^2$, rezultă

$$V\operatorname{grad}V=u\operatorname{grad}u+v\operatorname{grad}v+w\operatorname{grad}w$$

După aceea,

$$\operatorname{grad}\beta\times\operatorname{grad}\gamma=\frac{u}{V^4}\Big[u(\operatorname{grad}v\times\operatorname{grad}w)+v(\operatorname{grad}w\times\operatorname{grad}u)+$$

$$+w(\operatorname{grad}u\times\operatorname{grad}v)\Big]$$

Expresii analoage obţinem pentru $\operatorname{grad}\gamma\times\operatorname{grad}\alpha$, $\operatorname{grad}\alpha\times\operatorname{grad}\beta$. Cu acestea, (11) devine

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{\mathbf{V}}{V^4}\Big[u(\operatorname{grad}v\times\operatorname{grad}w)+v(\operatorname{grad}w\times\operatorname{grad}u)+$$

$$+w(\operatorname{grad}u\times\operatorname{grad}v)\Big] \tag{15}$$

Se observă că, înlocuind vectorii unitari $\mathbf{n}$ prin $\mathbf{V}$, formula lui Buhl se reproduce împărţită prin $V^4$. Nu se întîmplă acelaş lucru cu (9) respectiv (14).

Dacă în (10) vom înlocui $\mathbf{n}$ prin $\mathbf{V}$ (după relaţia (12)), obţinem în urma unor calcule simple

$$\frac{2}{R_1R_2}=\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]\left[\frac{1}{V}\operatorname{div}\mathbf{V}\right]+\frac{d}{dn}\left[\frac{1}{V}\operatorname{div}\mathbf{V}\right]-\operatorname{div}\left[\frac{1}{V}\frac{d\mathbf{V}}{dn}\right] \tag{16}$$

Mai departe, vom urmări formulele (13) şi (16) în studiul unor cîmpuri vectoriale din problemele fizicei.

5. Cîmpurile vectoriale biscalare se întîlnesc deseori. Astfel, pentru un fluid în echilibru, cîmpul forțelor **F**, raportate la unitatea de masă, este

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p ,$$

unde $\varrho$ este densitatea fluidului, iar $p$ presiunea. Suprafețele ortogonale liniilor de cîmp, sînt suprafețele izobare.

Deasemenea, în mișcările plane ale fluidelor și în mișcările cu simetrie axială, cîmpul vitezelor este un cîmp biscalar deoarece viteza **V**, este pretutindeni normală pe rotorul său.

Mișcările irotaționale ale unui fluid, cînd $\mathbf{V} = \operatorname{grad} \varphi$, admit suprafețe ortogonale vectorilor **V**, cîmpul atracțiilor electrice sau magnetice și în general toate cîmpurile irotaționale au această proprietate.

Să considerăm ca primă aplicație, un fluid compresibil în mișcare permanentă, cu proprietatea că liniile de curent admit o familie de suprafețe ortogonale. Din ecuația continuității

$$\operatorname{div} (\varrho \mathbf{V}) = \varrho \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \operatorname{grad} \varrho = 0$$

rezultă

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = - \mathbf{V} \operatorname{grad} (\ln \varrho) = - V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} (\ln \varrho)$$

și formula (13) va da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \ln (\varrho V) = - \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \tag{17}$$

sau încă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} (\varrho V) = - \varrho V \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \tag{17'}$$

Dacă fluidul este incompresibil ($\varrho = \varrho_0 =$ constant), aceasta se reduce la

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n} = - V \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \tag{18}$$

În general, dacă un cîmp vectorial biscalar este și solenoidal ($\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$), între curbura medie a suprafețelor ortogonale liniilor de cîmp și $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}$ există relația (18).

Această relație ne conduce la o proprietate interesantă a mișcărilor staționare ale unui fluid perfect incompresibil. Dacă urmărim o particulă fluidă în mișcare, notînd cu ds elementul de arc al traectoriei,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{V} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

și (18) devine

$$\frac{dV}{dt} = -V^2\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] \tag{19}$$

Accelerația tangențială este proporțională cu patratul vitezei și cu curbura medie a suprafeței ortogonale liniilor de curent în punctul considerat, dacă aceste suprafețe există.

În particular, pentru mișcările plane permanente ale unui fluid incompresibil, curbura medie se reduce la curbura traectoriilor ortogonale liniilor de curent, deci

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V^2}{r} \tag{20}$$

Accelerația tangențială a unei particule fluide este egală cu accelerația normală, în acelaș punct, al unei particule care ar avea ca traectorie curba ortogonală liniilor de curent și aceeași viteză în punctul considerat.

Formulele (17) și (18) au fost găsite și de M. Giqueaux [3], pe o cale diferită.

6. În cazul cîmpurilor biscalare solenoidale, nu numai curbura medie ci și curbura totală a suprafețelor ortogonale are o expresie simplă. În adevăr, deoarece div $\mathbf{V} = 0$, formula (16) se reduce la

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2}\operatorname{div}\left[\frac{1}{V}\frac{d\mathbf{V}}{dn}\right] \tag{21}$$

Dacă $\mathbf{V}$ reprezintă cîmpul vitezelor în mișcarea staționară a unui fluid incompresibil, urmărind o particulă în mișcare,

$$\frac{d\mathbf{V}}{dn} = \frac{d\mathbf{V}}{ds} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{V}\frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

unde $\mathbf{J} = \dfrac{d\mathbf{V}}{dt}$ reprezintă accelerația în mișcarea particulei fluide. Rezultă

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2}\operatorname{div}\frac{\mathbf{J}}{V^2} \tag{22}$$

7. Ca o altă aplicație, ne punem problema determinării condițiilor în care cîmpul vitezelor unui fluid compresibil coincide cu acela al unui fluid incompresibil, problemă tratată de altfel de mai mulți autori *). Vom considera numai mișcări plane irotaționale permanente.

Notînd cu $\theta$ unghiul vitezei $\mathbf{V}$ cu axa $Ox$ și $\tau = \ln V$, $R = \ln \varrho$, din ecuația continuității și din condiția de irotaționalitate, se deduc ușor relațiile

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\tau}{\partial y} &= \sin\theta\frac{dR}{dn}\\ \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\tau}{\partial x} &= -\cos\theta\frac{dR}{dn}\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

* V. de ex. Demtchenko [4] și Caius Iacob [5].

Notînd cu $r$ raza de curbură a traectoriilor ortogonale liniilor de curent, formula (17) devine:

$$\frac{dR}{dn} = -\left[\frac{1}{r} + \frac{d\tau}{dn}\right] \tag{24}$$

Cîmpul vitezelor va fi identic cu cel al unui fluid incompresibil, dacă $\omega = \theta + i\tau$ este o funcţie olomorfă de variabila $z=x+iy$. Condiţia necesară şi suficientă este, după (23), $\frac{dR}{dn} = 0$, sau încă

$$\frac{dR}{d\tau}\frac{d\tau}{dn} = 0 \tag{25}$$

Două cazuri se pot întîmpla:

1) $\frac{dR}{d\tau} = 0$. Se ştie că, pentru mişcările irotaţionale cu $\varrho = \varrho(p)$, funcţie numai de presiune, $\varrho$ este funcţie de $V^2$. Rezultă $\varrho$ constant, cazul banal al fluidelor incompresibile.

2) $\frac{d\tau}{dn} = 0$, oricare ar fi legea caracteristică a fluidului compresibil. Deci $\tau =$ const. pe o linie de curent. Din (24), unde $\frac{d\tau}{dn} = 0$, $\frac{dR}{dn} = 0$, rezultă $\frac{1}{r} = 0$. Traectoriile ortogonale liniilor de curent sînt drepte. Pentru ca acestea să nu se taie, vor trebui să fie sau drepte paralele, sau concurente într-un singur punct. În primul caz, din (23), deducem că $\tau$ este constant în tot planul, deci şi $\varrho$; mişcarea este aceea a unui fluid incompresibil. Rămîne ca singurul caz nebanal cel al unui vîrtej punctual.

8. Ecuaţia continuităţii, sub forma (24), sau echivalenta sa

$$\frac{d}{dn} ln\,(\varrho V) = -\frac{1}{r} \tag{24'}$$

poate fi satisfăcută, oricare ar fi ecuaţia caracteristică, chiar şi pentru mişcări rotaţionale, dacă $\frac{dr}{dn} = 1$, prin funcţii foarte simple. În adevăr, în acest caz, (24') se mai poate scrie

$$\frac{d}{dn} \ln(\varrho V) = -\frac{d}{dn} \ln r$$

Deci, pe o linie de curent,

$$d\,[\ln(\varrho V)] = d\left[\ln\frac{1}{r}\right] - d\left[\ln\frac{k}{\varrho_0}\right], \quad (k > 0)$$

de unde rezultă

$$V = \frac{\varrho_0}{k\varrho}\frac{1}{r} \tag{26}$$

Condiția $\frac{dr}{dn} = 1$ este evident satisfăcută dacă liniile de curent sînt semidrepte ce pornesc din același punct. Am obținut astfel o sursă punctuală găsită și de Caius Iacob [5]. În acest caz mișcarea este evident și irotațională.

## BIBLIOGRAFIE


1. *P. Appell.* — Intermédiaire des Mathématiciens, 1917, question 4639.
2. *A. Buhl.* — Sur les transformations et extensions de la formule de Stokes (V-ème mémoire). Annales de la Fac. de Toulouse, 3-ème série, t. VII, 1917, p. 189.
3. *M. Giqueaux.* — Sur la géométrie des écoulements permanents des fluides compressibles. C. R. de l'Acad. des Sc. Paris, 1948, pag. 222.
4. *b. Demtchenko.* — Quelques problèmes d'hydrodynamique bidimensionelle des fluides compressibles. Publ. Sc. et Tech. du Min. de l'Air, Paris, No. 144, 1939.
5. *Caius Iacob.* — Sur quelques propriétés de la correspondance de M. Tchapliguine en dynamique des fluides compressibles. Bulletin Math. de la Soc. Roumaine des Sciences, t. XLII (1), 1940.


## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БИСКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

(Краткое содержание)


При данном бискалярном поле **V** выводят формулы, выражающие среднюю и полную кривизну ортогональных поверхностей к векторам **V** [формулы (13), (14), (15), (16)]. Применяя орты $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{V}}{V}$ выводятся формулы (8), (9), (10) и мы возвращаемся к Формулам П. Аппель и А. Бюла.

Если **V** соленоидально, то получаются формулы (18) и (21), которые для поля скоростей жидкости становятся (19) и (20).


## QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CHAMPS BISCALAIRES

(Résumé)


Étant donné un champ biscalaire **V**, on établit des formules qui expriment la courbure moyenne et totale des surfaces orthogonales aux vecteurs **V** [formules (13), (14, (15), (16)]. En utilisant les verseurs $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{V}}{V}$, on obtient (8), (9), (10) et on retrouve les formules de P. Appell et A. Buhl.

Si **V** est solénoïdal, on obtient les formules (18) et (21) qui, pour le champ des vitesses d'un fluide, deviennent (19) et (22).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

512.8

# MULŢIMI COFINALE

de I. BARBĂLAT

1. Fie $E$ o mulţime nevidă, ordonată parţial de o relaţie notată $" \leq "$, care verifică condiţiile [1].

a) $x \leq y \ \& \ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (transitivă)

b) $x \leq x$ pentru orice $x \in E$ (reflexivă)

c) $x \leq y \ \& \ y \leq x \Longrightarrow x = y$ (proprie)

Două părţi nevide $X$ şi $Y$ ale lui $E$ se numesc *cofinale* şi se notează $X \underset{c}{\sim} Y$, dacă pentru orice $x \in X$ există $y \in Y$ cu $x \leq y$ şi pentru orice $\eta \in Y$ există $\xi \in X$ cu $\eta \leq \xi$. Relaţia de cofinalitate, definită pe mulţimea părţilor nevide ale lui $E$ este simetrică, reflexivă şi transitivă, deci o relaţie de echivalenţă.

In această comunicare se fac unele consideraţii în legătură cu următoarea problemă, formulată de Acad. Gr. C. Moisil: *Să se decidă dacă există* $A \subset X$, $B \subset Y$ *cu* $A \underset{c}{\sim} X \underset{c}{\sim} Y \underset{c}{\sim} B$ *şi astfel încît* $A$ *şi* $B$ *să fie izomorfe relativ la structura de ordine din* $E$.

Reamintim propoziţia cunoscută: *Dacă* $X$ *şi* $Y$ *sînt două părţi nevide cofinale, ale mulţimii parţial ordonate* $E$, *atunci ele au aceeaşi mulţime de elemente maximale,* $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(Y)$.

2. Vom demonstra următoarea

*Teoremă. Dacă* $X \underset{c}{\sim} Y$ *sînt două părţi nevide cofinale ale mulţimii parţial ordonate* $E$ *există un număr cardinal minimal* $m > 0$ *şi două părţi* $A \subset X$, $B \subset X$, *cu proprietăţile*

a) $A \underset{c}{\sim} X \underset{c}{\sim} Y \underset{c}{\sim} B$, *card.* $A =$ *card.* $B = m$

b) $m$ *este cel mai mic număr cardinal a două submulţimi ale lui* $X$ *şi* $Y$ *cofinale cu acestea.*

*Demonstraţie.* Vom dovedi că există $Z \subset Y$, cofinală cu $Y$ şi astfel încît *card.* $Z \leq$ *card.* $X$. Fiecărui element $x \in X$ îi corespunde o parte nevidă $N_x \subset Y$ definită de relaţia

$$N_x = \{ y \mid y \in Y \ \& \ x \leq y \}$$

Cu axioma lui Zermelo se alege în fiecare $N_x$ un element $y$ şi se formează astfel o mulţime $Z \subset Y$, imagine în $Y$ a mulţimii $X$ prin funcţia selectivă definită cu axioma alegerii. Prin construcţia sa, $Z \underset{c}{\sim} X$ şi *card.* $Z \leq$ *card.* $X$.

Consider mulțimea $V = X \cup Y$: rezultă $V \underset{c}{\sim} X \underset{c}{\sim} Y$. Fie $\Psi$ mulțimea părților lui $V$ cofinale cu $X$ și deci și cu $Y$. Numerele cardinale ale mulțimilor din $\Psi$ formează o mulțime bine ordonată: fie $m$ cel mai mic număr cardinal din această mulțime și $\mathcal{F} \subset \Psi$ mulțimea părților lui $V$, cofinale cu $V$ (deci și cu $X$ și cu $Y$) și de putere $m$. Fie $\mathcal{X}$ mulțimea părților lui $X$ cofinale cu $V$ și $a$ cel mai mic număr cardinal al lor. Avem $\mathcal{X} \subset \Psi$. Dacă $a < m$, ultimul n'ar fi cel mai mic număr cardinal al mulțimilor din $\Psi$. Deci $m \leq a$. Să presupunem că $m < a$; fie $F \in \mathcal{F}$ și $P \in \mathcal{X}$, cu *card.* $P = a$. Există $Q \subset P$, $Q \underset{c}{\sim} F$ astfel încît

$$card.\ Q \leq card.\ F = m < card.\ P = a$$

ceea ce este contradictoriu; deci $m = a$.

Există deci $A \subset X$, $A \underset{c}{\sim} X$ și de putere $m$, cea mai mică putere a unei submulțimi a lui $X$ cofinală cu ea. In mod analog există $B \subset Y$, $B \underset{c}{\sim} Y$ de putere minimă $m$.

Submulțimile $A$ și $B$ satisfac condițiilor din teoremă. Intre ele există o corespondență biunivocă, *nu însă neapărat un izomorfism.*

3. *Dacă pentru orice* $x \in X \subset E$ *există un element maximal* $\xi$ *cu* $x \leq \xi$, *atunci orice* $Y \subset E$, $Y \underset{c}{\sim} X$ *satisface aceleași proprietăți și*

$$X \underset{c}{\sim} \mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(Y) \underset{c}{\sim} Y$$

*și nu există submulțimi cofinale cu* $X$ *și* $Y$ *de putere mai mică decît card.* $\mathcal{M}(X)$.

*Demonstrație.* Pentru orice $A \subset X$ și $B \subset Y$ cu $A \underset{c}{\sim} X \underset{c}{\sim} Y \underset{c}{\sim} B$ avem

$$A \underset{c}{\sim} \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(Y) = \mathcal{M}(B) \underset{c}{\sim} B$$

Deci *card.* $A \geq card.\ \mathcal{M}(X)$, *card.* $B \geq card.\ \mathcal{M}(Y)$

*Observație.* Condițiile teoremei precedente sînt îndeplinite dacă

a) $X$ *este inductivă* (adică orice parte a ei nevidă și total ordonată are o margine superioară)

b) *Orice parte total ordonată a lui* $X$ *este majorată.*

c) *Orice parte bine ordonată a lui* $X$ *este majorată.*

Intr-adevăr, dacă una din aceste condiții este îndeplinită, teoremele lui Zorn sau Kneser asigură existența elementelor maximale cu proprietatea cerută [2].

5. *Dacă* $m$ *este finit, mulțimile de cardinal minimal coicid cu* $\mathcal{M}(X)$ *și* $\mathcal{M}(Y)$.

Fie $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ o mulțime de $m$ elemente, cu $A \underset{c}{\sim} X$. Dacă elementele $a_i$ $(1 \leq i \leq m)$ sînt necomparabile între ele, atunci ele sînt neapărat elemente maximale. Intr-adevăr pentru orice $x \in X$, există un $a_{i_0}$ cu proprietatea $x \leq a_{i_0}$. Dacă ar exista $x' \in X$ cu $a_{i_0} < x'$, ar exista și $a_{i_1}$ cu $x' \leq a_{i_1}$ și deci $a_{i_0} < a_{i_1}$, ceea ce e contradictoriu. Deci $A \subset \mathcal{M}(X)$. In plus, deoarece $A \underset{c}{\sim} X$, $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(X)$, în baza primei propoziții, iar în baza ipotezei de necomparabilitate a elementelor din $A$, rezultă că $\mathcal{M}(A) = A$, deci $A = \mathcal{M}(X)$.

Dacă în $A$ există cel puțin două elemente comparabile, de exemplu $a_1 < a_3$, atunci $X \underset{c}{\sim} A \underset{c}{\sim} \{a_2, a_3, \cdots a_m\}$ și $m$ n-ar fi cardinal minimal.

6. *Problema pusă de Acad. Gr. C. Moisil se poate rezolva complet și în cazul particular cînd $X$ și $Y$ sînt bine ordonate, tipurile lor de ordine fiind de clasa a II$^a$ cel mult.*

In baza propozițiilor de mai sus, singurul caz nebanal de considerat este acela cînd tipurile de ordine ale mulțimilor $X$ și $Y$ sînt amîndouă de clasa II$^a$ și de specia II$^a$.

Fie $a_1$ primul element al lui $X$ și $b_1$ primul element al lui $Y$ pentru care $a_1 \leq b_1$. Fie acum $a_2$ primul element din $X - \{a_1\}$ care întrece pe $b_1$ și $b_2$ primul element din $Y - \{b_1\}$ care întrece pe $a_2$. Avem deci

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \quad \text{însă} \quad a_1 < a_2 \quad \text{și} \quad b_1 < b_2$$

Prin inducție se construesc mulțimile

$$A_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} \quad \text{și} \quad B_1 = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$$

cu proprietățile

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$$

$$b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_n < \cdots$$

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq a_3 \leq b_3 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots$$

Dacă mulțimea $A_1$ este cofinală $X$, deci dacă orice element din $X$ este întrecut de ce puțin un element (și deci de o infinitate) din $A_1$, atunci avem $A_1 \underset{c}{\sim} X$ și $A_1 \underset{c}{\sim} B_1$, deci $A_1 \underset{c}{\sim} B_1$ și evident $A_1$ și $B_1$ sînt izomorfe.

Dacă există în $X$ elemente care nu sînt întrecute de elemente din $A_1$ atunci exisă în $X$ elemente care nu sînt întrecute de elemente din $X - A_1$. Fie $a_\omega$ primul element din $X - A_1$ care întrece toate elementele lui $B_1$ și $b_\omega$ primul element din $Y - B_1$ care întrece pe $a_\omega$. Avem

$$A_1 < a_\omega \leq b_\omega \quad \text{și} \quad B_1 < b_\omega$$

unde prin $M \leq N$ se înțelege că toate elementele lui $N$ întrec elementele lui $M$.

Operația poate fi iar continuată de o infinitate numărabilă de ori și deci se pot construi mulțimile

$$A_2 = A_1 \cup \{a_\omega, a_{\omega+1}, a_{\omega+2}, \cdots, a_{\omega+n}, \cdots\}$$

$$B_2 = B_1 \cup \{b_\omega, b_{a+1}, b_{\omega+2}, \cdots, b_{\omega+n}, \cdots\}$$

Dacă $A_2$ este cofinală cu $X$ atunci $A_2$ și $B_2$ corespund problemei. Dacă nu, se construesc prin recurență mulțimile $A_p$ și $B_p$ (cu $p \geq 2$),

$$A_p = A_{p-1} \cup \{a_{\omega(p-1)}, a_{\omega(p-1)+1}, \cdots, a_{\omega(p-1)+n}, \cdots\}$$

$$B_p = B_{p-1} \cup \{b_{\omega(p-1)}, b_{\omega(p-1)+1}, \cdots, b_{\omega(p-1)+n}, \cdots\}$$

Dacă pentru orice $p \geq 1$ există în $X$ elemente care nu sînt întrecute de elemente din $A_p$, atunci există în $X$ elemente care nu sînt întrecute de ele-

mente din $B_p$, pentru orice $p$. Fie $a_{\omega^2}$ primul element din $X - A_\omega$, unde $A_\omega = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p$, care întrece toate elementele lui $B_\omega = \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p$ şi $b_{\omega^2}$ primul element din $Y - B_\omega$ care întrece pe $a_{\omega^2}$. Avem

$$A_\omega < a_{\omega^2} \leq b_{\omega^2} \quad \text{şi} \quad B_\omega < b_{\omega^2}$$

Astfel prin inducţie transfinită se poate ajunge la ori şi ce număr ordinal de clasa II$^a$ şi de specia II$^a$ iar mulţimile $A_\xi$ şi $B_\xi$ construite sînt bine ordonate, cofinale, izomorfe în raport cu structura de ordine şi cofinale cu mulţimile date $X$ şi $Y$.

In cazul general însă, problema formulată de Acad. G. C. Moisil rămîne deschisă.

7. *Aplicaţie. Fie $O$ un inel cu operatori şi cu element unitate. $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ doua subinele ale lui $O$, cu element unitate. Fie $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ mulţimile idealelor la stînga în $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$, diferite de acestea iar $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X})$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{Y})$ mulţimile de ideale maximale ale mulţimilor $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ respectiv în $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$. Condiţia necesară şi suficientă ca pentru fiecare ideal din $\mathcal{X}$ să existe un divizor în $\mathcal{Y}$ şi reciproc, este ca $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{Y})$ Această mulţime de ideale maximale are cel mai mic cardinal pe care-l poate avea două submulţimi de ideale $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$, astfel că orice ideal din $\mathcal{U}$ să admită un divizor în $\mathcal{V}$ şi reciproc.*

In baza unei teoreme a lui Krull [3], pentrn fiecare ideal $x \in \mathcal{X}$ există în $\mathcal{A}$ un ideal maximal $\xi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$, astfel încît $x \subset \xi$. Daçă $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ admit proprietatea de divizibilitate din enunţ ele sînt cofinale relativ la ordinea prin incluziune din $\mathcal{P}(O)$ şi teorema enunţată în aplicaţie este o consecinţă a propoziţiei 3 de mai sus.

*Catedra de Matematici a Institutului de Construcţii, Bucureşti*

## BIBLIOGRAFIE

1. *N. Bourbaki.* — Théorie des Ensembles (Fascicule de résultats), Paris, 1939.
2. *I. Barbălat.* — Teoremele lui Zorn şi Kneser în teoria mulţimilor ordonate. Bul. Ştiinţific al Acad. R.P.R., tomul IV, nr. 4, 1952.
3. *N. Bourbaki.* — Algèbre, ch. I, Paris, 1942.

## КОФИНАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

### (Краткое содержание)

Пусть $X$ и $Y$ два непустых и кофильных подножества частичро упорядоченного ножества $E$. Акад. Гр. К. Мойсил сформулировал следующую задачу: установить существуют ли $A \subset X$, $B \subset Y$, $A \underset{c}{\sim} X \underset{c}{\sim} Y \underset{c}{\sim} B$, таким овразом что $A$ и $B$ изоморфны относнтельно данного пореадка.

В настоящем сообщении доказывается, что существует наименьшее кардинальное число $m$ и два подножества $A \subset X$, $B \subset Y$, $A \underset{c}{\sim} X \underset{c}{\sim} Y \underset{c}{\sim} B$ *card.* $A =$ *card.* $B = m$, таким образом, что $m$ наименьшее кардинальное число двух полмножеств уз $X$ и $Y$, кофинальных с ними. Если $m$ конечно. то множества минимальной мощности совадают э мрожеством максимальных элемеотов $X$ и $Y$.

Наконец, при помощи построения использующего трансфинитную индукцию, задача решается в часуном елучае когоа $X$ и $Y$ вполне упореадочены и их пореадковый тип принадлежит неболее чем II-му классу.

## ENBLEMES COFINALS

(Résumé)

Soient $X$ et $Y$ deux parties non vides, cofinales, d'un ensemble ordonné E. L'académicien Gr. C. Moisil a formulé le probléme suivant: *décider s'il existe* $A \subset X$, $B \subset Y$, $A \underset{c}{\sim} X \underset{c}{\sim} Y \underset{c}{\sim} B$ *et tel que* $A$ *et* $B$ *soient isomorphes relativement à la structure d'ordre donée.*

Dans cette note on prouve qu'il existe un cardinal minimal $m$ et des parties $A \subset X$, $B \subset Y$, $B \underset{c}{\sim} X \underset{c}{\sim} Y \underset{c}{\sim} B$, *card.* $A =$ *card.* $B = m$ tel que $m$ soit le plus petit cardinal de deux partes de $X$ et $Y$ cofinales avec ces ensembles. Si $m$ est fini, les ensembles de puissance minima coïncident avec l'ensemble des éléments maxima de $X$ et de $Y$.

Enfin, à l'aide d'une construction par induction transfinie on résout le probléme dans le cas particulier où $X$ et $Y$ sont bien ordonnés et leur type d'ordre est au plus de la seconde classe.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII — 1956; Fascicola 3—4

517.4

# DESPRE CONEXIUNEA INDUSĂ ÎNTR-UN SPAȚIU NEOLONOM $X_n^m$

de ȘT. PETRESCU

1. Fie $X_n$ un spațiu n-dimensional, raportat la coordonatele $x^i$ dotat cu o metrică definită pozitiv

$$ds^2 = a_{ij}\,dx^i\,dx^j\,, \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

$a_{ij}$ fiind tensorul ei fundamental, și cu o conexiune $\Gamma^i_{jk}(x)$ cu torsiune

$$\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 2\,T^i_{jk} \tag{1.2}$$

Considerînd diferențialele $dx^i$ drept coordonatele unui punct dintr-un spațiu afin $E_n$ tangent spațiului $X_n$ în punctul $x^i$, metrica (1.1) reprezintă, în același timp, distanța dintre două puncte în $E_n$.

Să ne dăm acum $n-m$ ecuații Pfaff, ne complet integrabile,

$$\lambda_{Ai}\,dx^i = 0\,, \quad (A,B,C,\cdots = m+1,\cdots,n) \tag{1.3}$$

și să privim pe $\lambda_{Ai}$ ca fiind componentele a $n-m$ vectori covarianți, linear independenți. Diferențialele $dx^i$ ce satisfac acestor ecuații, definesc atunci un subspațiu cu $m$ dimensiuni, în spațiul afin tangent $E_n$. Cum însă $\lambda_{Ai}$ sînt funcții oarecari de $x^i$, urmează că, în fiecare punct al spațiului $X_n$, se poate considera un astfel de subspațiu. Mulțimea lor constituie — după G. Vrănceanu [1] un *spațiu neolonom* $X_n^m$ scufundat în $X_n$.

Definind componentele contravariante $a^{ij}$ ale tensorului fundamental prin relațiile

$$a_{ij}\,a^{jk} = \delta_i^k \begin{cases} = 0, & i \neq k \\ = 1, & i = k \end{cases} \tag{1.4}$$

se pot considera $n-m$ vectori contravarianți $\lambda^i_A$ dați de

$$\lambda^i_A = \lambda_{Aj}\,a^{ji}\,. \tag{1.5}$$

Astfel, ecuațiile (1.3) devin

$$a_{ij}\lambda^i_A\,dx^j = 0 \tag{1.3'}$$

și ne arată că vectorul de componente $dx^i$ este ortogonal tuturor vectorilor $\lambda^i_A$, care pot fi încă normați prin

$$a_{ij}\,\lambda^i_A\,\lambda^j_A = 1\,, \quad \text{(nu se însumează în raport cu } A\text{)}$$

Dar, deoarece în $E_n$ avem exact $n$ vectori contravarianţi linear independenţi, se pot alege $m$ vectori contravarianţi unitarii $\lambda_a^i$ ($a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, m$) linear independenţi, astfel încît să avem

$$a_{ij}\lambda_A^i\lambda_a^j = 0 \tag{1.5}$$

adică ei să fie ortogonali vectorilor unitari $\lambda_A^i$.

Notînd cu $ds^a$ nişte parametri relaţiile (1.3′) pot fi rezolvate în raport cu $dx^i$ sub forma

$$dx^i = \lambda_a^i\, ds^a, \quad (ds^a = \lambda_i^a\, dx^i). \tag{1.6}$$

Rezultă astfel că vectorii $\lambda_a^i$ definesc spaţiul neolonom $X_n^m$ în $X_n$.

In acelaş mod se vede că cei n-m vectori $\lambda_A^i$ definesc, la rîndul lor, un alt spaţiu neolonom cu $n-m$ dimensiuni $X_n^{n-m}$, deoarece avem

$$dx^i = \lambda_A^i\, ds^A, \quad (ds^A = \lambda_i^A\, dx^i) \tag{1.6′}$$

şi, după (1.5), ecuaţiile corespunzătoare lui (1.3) sînt atunci

$$\lambda_{ai}\, dx^i = 0. \tag{1.3″}$$

Spaţiul neolonom $X_n^{n-m}$ este ceea ce G. Vrănceanu numeşte, spaţiul complementar lui $X_n^m$ şi cum ne arată (1.5), aceste spaţii sînt ortogonale unul altuia.

2. Cele de mai sus ne permit să scriem în $X_n$ relaţia generală

$$dx^i = \lambda_\alpha^i\, s^\alpha = \lambda_a^i\, ds^a + \lambda_A^i\, ds^A \tag{2.1}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \cdots = 1, 2, \cdots, n)$$

aşa încît spaţiul $X_n^m$ este caracterizat de ecuaţiile Pfaff

$$ds^A = \lambda_i^A\, dx^i = 0 \tag{2.2}$$

iar spaţiul neolonom complimentar $X_n^{n-m}$, prin ecuţiile

$$ds^a = \lambda_i^a\, dx^i = 0 \tag{2.2′}$$

în care

$$\lambda_i^a = a^{ab}\lambda_{bi}, \lambda_i^A = a^{AB}\lambda_{Bi}. \tag{2.3}$$

Vectorii $\lambda_i^a$ şi $\lambda_i^A$ se abţin prin introducerea componentelor intrinseci ale tensorului metric $a_{ij}$, anume

$$a_{\alpha\beta} = a_{ij}\lambda_\alpha^i\lambda_\beta^j \tag{2.8′}$$

care au proprietăţile

$$a_{aA} = 1, \text{ (nu se face suma in raport cu } \alpha)$$

$$a_{aA} = a_{Aa} = 0$$

și a componentelor intrinseci contravariante $a^{\alpha\beta}$ definite prin relațiile

$$a_{\alpha\beta}\, a^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \begin{cases} = 0, & \alpha \neq \gamma \\ = 1, & \alpha = \gamma \end{cases} \tag{2.3''}$$

ceeace ne permite să definim în $X_n$ vectorii covarianți

$$\lambda_i^\alpha = a^{\alpha\beta}\, \lambda_{\beta i}\,. \tag{2.4}$$

Se poate vedea ușor că subsistă relațiile următoare

$$\lambda_\alpha^i\, \lambda_i^\beta = \delta_\alpha^\beta\,,\quad \lambda_\alpha^i\, \lambda_j^\alpha = \delta_j^i \tag{2.5}$$

$\delta$ fiind simbolul lui Kronecker.

3. Un vector contravariant de componente $V^i$ se găsește în $X_n^m (X_n^{n-m})$ dacă ele verifică ecuațiile (2.2)

$$\lambda_i^A\, V^i = 0\,,\quad (\lambda_i^\alpha\, V^i = 0)\,. \tag{4.1}$$

Însemnînd cu $V^\alpha$ componentele intrinseci ale acestui vector, adică

$$V^i = V^\alpha \lambda_\alpha^i\,,\quad V^\alpha = \lambda_i^\alpha\, V^i \tag{3.2}$$

dacă $V^i$ se află situat în $X_n^m (X_n^{n-m})$ avem din (3.1)

$$V^A = 0\,,\ (V^a = 0) \tag{3,3}$$

Pentru un vector covariant $V_i$ vom avea deasemenea

$$V_A = 0\,,\ (V_a = 0)\,. \tag{3.3'}$$

Să formăm acum în $X_n^m$ vectorul $^*V^i$

$$^*V^i = V^a \lambda_a^i\,,\quad (^{**}V^i = V^A \lambda_A^i)\,; \tag{3.4}$$

el se numește *vectorul indus* de către $V^i$ în $X_n^m (X_n^{n-m})$.

Definind încă tensorii $E_j^i (F_j^i)$ prin relațiile [2, p. 199]

$$E_j^i = \lambda_a^i \lambda_j^a\,,\quad F_j^i = \lambda_A^i \lambda_j^A \tag{3.5}$$

vom putea scrie formulele

$$^*V^i = V^j E_j^i,\ (^{**}V^i = V^j F_j^i)\,. \tag{3.6}$$

Sînt ușor de demonstrat proprietățile [2, p. 199]

$$\left.\begin{aligned} E_j^i E_k^j &= E_k^i\,, \\ F_j^i F_k^j &= F_k^i \\ E_j^i F_k^j &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

precum și egalitatea importantă

$$E_j^i + F_j^i = A_j^i \tag{3.7'}$$

care ne arat că, tensorul mixt $A^i_j$ are, în orice sistem de coordonate, componentele

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Din (3.6), (3.7') deducem formula

$$V^i = {}^{*}V^i + {}^{**}V^i. \tag{3.8}$$

După cum se vede, *vectorul contravariant* $V^i$ *se descompune într-o sumă de doi termeni, formată de vectorii pe care-i induce el în spațiile* $X^m_n$ *și* $X^{n-m}_n$ *respectiv.*

*Vom vedea mai departe, că o proprietate asemănătoare este valabilă și pentru componentele conexiunei* $\Gamma^i_{jk}$ *a spațiului* $X_n$.

4. Tensorul fundamental $a_{ij}$ și tensorul de torsiune $T^i_{jk}$ dat de (1.2), definesc, cum se știe, o conexiune metrică $\Gamma^i_{jk}(x)$, prin ecuațiile (1.2) și identitatea

$$a_{ij\,;\,k} \equiv a_{ij\,,\,k} - a_{lj}\Gamma^l_{ik} - a_{il}\Gamma^l_{jk} = 0 \tag{4.1}$$

care exprimă că derivata covariantă, în raport cu coeficienții $\Gamma^i_{jk}$, a tensorului $a_{ij}$ este nulă. Rezolvînd, în adevăr, cele $n^3$ ecuații (1.2) și (4.1), se obțin pentru componentele conexiunei spațiului $X_n$ expresiile

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + T^i_{jk} - T^i_{.jk} - T^i_{.kj} \tag{4.2}$$

$\left\{ {i \atop jk} \right\}$ fiind simbolii lui Christoffel de a doua speță formați cu $a_{ij}$ iar

$$T^i_{.jk} = a^{il} a_{km} T^l_{mj}. \tag{4.2'}$$

Fie $V^i$ un vector contravariant din $X_n$. Derivata sa convariantă este

$$V^i_{\,;\,k} = V^i_{\,,\,k} + V^j \Gamma^i_{jk}, \quad \left( V^i_{\,,\,k} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} \right) \tag{4.3}$$

și reprezintă un tensor mixt.

Pentru componentele intrinseci $V^\alpha$ ale lui $V^i$, vom avea deasemenea (definind $V^\alpha_{\,;\,\gamma} = \lambda^\alpha_i \lambda^k_\gamma V^i_{\,;\,k}$), formula

$$V^\alpha_{\,;\,\gamma} = V^\alpha_{\,,\,\gamma} + V^\beta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \tag{4.4}$$

unde

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_i \lambda^j_\beta \lambda^k_\gamma \Gamma^i_{jk} + \lambda^\alpha_i \lambda^i_{\beta,\,\gamma}. \tag{4.4'}$$

Partea nesimetrică a coeficienților $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ se scrie sub forma [2, p. 205]

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = 2T^\alpha_{\beta\gamma} + 2w^\alpha_{\beta\gamma} \tag{4.5}$$

$T^\alpha_{\beta\gamma}$ fiind componenele intrinseci ale tensorului de torsiune

$$T^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_i \lambda^j_\beta \lambda^k_\gamma T^i_{jk} \tag{4.5'}$$

iar $w_{\beta\gamma}^{\alpha}$ coeficienții covarianților bilineari ai formelor Pfaff

$$ds^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha} dx^i . \tag{4.6}$$

5. Să trecem acum la conexiunea indusă în spațiul neolonom $X_n^m$ și spațiul complementar $X_n^{n-m}$ [2, p. 206].

Pentru aceasta, să presupunem că vectorul contravariant $V^i$ se află în $X_n^m$ ($X_n^{n-m}$), deci că

$$\lambda_i^A V^i = 0 , \quad (\lambda_i^a V^i = 0). \tag{5.1}$$

Acest fapt se poatea exprim și prin relațiile

$$E_j^i V^j = V^i , \quad F_j^i V^j = 0 \tag{5.2}$$

(respectiv

$$E_j^i V^j = 0 , \quad F_j^i V^j = V^i) . \tag{5.2'}$$

Dacă luăm derivata convariantă a acestui vector într-o direcție situată deasemenea în $X_n^m$ ea poate fi scrisă sub forma

$$V^i_{;k} E_l^k dx^l$$

însă nu putem afirma că și ea se află situată în $X_n^m$. Vom defini atunci drept *diferențială absolută în* $X_n^m$ expresia

$$\mathcal{D} V^i = E_j^i V^j_{;k} E_l^k dx^l . \tag{5.3}$$

Derivînd covariant prima din (5.2') obținem, după cîteva calcule

$$\mathcal{D} V^i = V^i_{|k} E_l^k dx^l \tag{5.4}$$

unde

$$V^i_{|k} = V^i_{,k} + V^j M^i_{jk} \tag{5.4'}$$

reprezintă derivata covariantă în raport cu coeficienții

$$M^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - E^i_{j;k} . \tag{5.4''}$$

În același fel, presupunînd că vectorul $V^i$ este situat în $X_n^m$ și definind diferențiala absolută în cest spațiu prin formula

$$\mathcal{D}' V^i = F_j^i V^j_{;k} F_l^k dx^l \tag{5.5}$$

(într-o direcție tot din $X_n^{n-m}$ obținem expresia

$$\mathcal{D}' V^i = V^i_{||k} F_l^k dx^l \tag{5.6}$$

$V^i{}_{||k}$ reprezentînd derivata covariantă

$$V^i_{||k} = V^i{}_{,k} + V^j N^i_{jk} \tag{5.6'}$$

în raport cu coeficienţii de conexiune

$$N^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - F^i_{j\,;\,k} . \tag{5.6''}$$

Ţinînd seama de faptul că $E^i_j + F^i_j = A^i_j$, se poate vedea uşor că subsistă relaţiile [2, p. 208] :

$$M^i_{jk} - N^i_{jk} = -2E^i_{j\,;\,k} = 2F^i_{j\,;\,k} \tag{5.7}$$

$$M^i_{jk} + N^i_{jk} = 2\Gamma^i_{jk} \tag{5.8}$$

Ultima din ele pune în evidenţă următorul fapt important :

*Conexiunea* $\Gamma^i_{jk}$ *a spaţiului* $X_n$ *se descompune într-o sumă de doi termeni, fiecare din ei constituind conexiunea indusă în spaţiile* $X^m_n$ şi $X^{n-m}_n$ *respectiv.*

Pentru a justifica această denumire de *„conexiune indusă"*, vom arăta în primul rînd că, notînd cu $M^\alpha_{\beta\gamma}$ componentele intrinseci ale lui $M^i_{jk}$, avem

$$\left.\begin{aligned} M^a_{bc} &= \Gamma^a_{bc} \\ M^A_{ab} &= 0 , \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

unde

$$\Gamma^a_{bc} = \lambda^a_i \lambda^j_b \lambda^k_c \Gamma^i_{jk} + \lambda^a_i \lambda^i_{b\,,\,c} \tag{5.9'}$$

sînt coeficienţii de conexiune ai spaţiului $X^m_n$, iar coeficienţii $M^A_{ab}$ fiind obţinuţi dintre $M^\alpha_{\beta\gamma}$.

Ori, avînd prin definiţie

$$M^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_i \lambda^j_\beta \lambda^k_\gamma M^i_{jk} + \lambda^\alpha_i \lambda^i_{\beta\,,\,\gamma} \tag{5.10}$$

pentru $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ obţinem imediat

$$M^a_{bc} = (\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{j\,;\,k}) \lambda^a_i \lambda^j_b \lambda^k_c + \lambda^a_i \lambda^i_{b\,,\,c} = \Gamma^a_{bc} ,$$

deoarece al doilea termen din paranteză, înmulţit cu factorii respectivi ne dă zero.

Deasemenea, înlocuind pe $F^i_{j\,;\,k}$ prin expresia sa desvoltată, pentru $\alpha = A$, $\beta = a$, $\gamma = b$ găsim

$$M^A_{ab} = (\Gamma^i_{jk} + F^i_{j\,;\,k}) \lambda_i \lambda^j_a \lambda^k_b + \lambda^A_i \lambda^i_{a\,,\,b} = 0 .$$

Pe dealtă parte, am văzut că spaţiul $X_n$ posedă în afară de coeficienţii de conexiune $\Gamma^i_{jk}$, şi coeficienţii $M^i_{jk}$, diferiţi de primii, însă bucurîndu-se de proprietatea că diferenţa lor formează un tensor (form. 5/4″).

Fiecare din aceste două categorii de coeficienți, induce o conexiune în spațiul $X_n^m$, de coeficienți $\Gamma_{bc}^a$ și $M_{bc}^a$ respectiv și cum am arătat, aceștia sînt egali între ei. Dar, ceeace este important de remarcat, este faptul următor.

Să presupunem că transportăm prin paralelism, un vector $V^i$ din $X_n^m$ de-a lungul unui mic drum situat deasemenea în raport cu coexiunea $\Gamma_{jk}^i$. *Vectorul pe care-l obținem astfel, nu se mai află în* $X_n^m$.

Dacă însă transportăm prin paralelism același vector $V^i$ în raport cu conexiunea $M_{jk}^i$, vectorul astfel obținut se găsește situat în $X_n^m$.

*În acest sens spunem că* $M_{jk}^i$ *este „conexiunea indusă" de către* $\Gamma_{jk}^i$ *în spațiul neolonom* $X_n^m$.

Această interpretare poate fi foarte bine dedusă și din faptul că, dacă $\overset{M}{\delta}$ și $\overset{\Gamma}{\delta}$ reprezintă simbolul deplasării paralele în raport cu coeficienții $M_{jk}^i$ și $\Gamma_{jk}^i$ respectiv, avem:

$$\overset{M}{\delta} V^i = E_j^i \overset{\Gamma}{\delta} V^j . \tag{5.11}$$

În adevăr, am definit diferențiala absolută în $X_n^m$ prin formula

$$\mathcal{D} V^i = E_j^i V^j_{;k} E_l^k \, dx^l = E_l^k E_j^i \nabla_k V^j \, dx^l = E_l^k V^i_{|k} dx^l , \tag{5.12}$$

deci avem relația

$$V^i_{|j} = E_j^i V^j_{;k} = E_j^k \nabla_k V^i . \tag{5.12'}$$

simbolul $\nabla_k$ însemnînd tot derivata covariantă în raport cu $\Gamma_{jk}^i$, ia (|) derivata covariantă în raport cu coeficienții $M_{jk}^i$.

Dacă însemnăm acum cu $\nabla'$ simbolul derivării covariante în $X_n^m$, vom putea scrie

$$\nabla'_j V^i = E_j^k V^i_{|k} = E_j^k \nabla_k V^i \tag{5.13}$$

și de aci deducem

$$E_j^k V^i_{|k} dx^j = E_j^i E_l^k \nabla_k V^l \, dx^j \tag{5.14}$$

adică în fond, tocmai relația (5.11).

Din (5.11) se vede cum, contracția prin $E_j^i$ (în raport cu j) ne conduce la proecția în spațul neolonom $X_n^m$ a vectorului reprezentat de diferențiala absolută luată față de coeficienții de conexiune $\Gamma_{jk}^i$ și care vector se află, după cum am arătat, în $X_n$.

Este astfel clar că, transportîndu-l paralel pe $V^i$ în raport cu coeficienții $M_{jk}^i$, vectorul pe care-l obținem după transport, se află în $X_n^m$.

Geometric ne putem imagina acest lucru în felul următor.

Avem coeficienții de conexiune $\Gamma_{jk}^i$, $M_{jk}^i$ și $\Gamma_{bc}^a = M_{bc}^a$ Dacă transportăm vectorul $\mathbf{V}$ $(V^i)$ paralel, din punctul $P$ în punctul vecin $Q$, față de conexiunea $\Gamma_{jk}^i$, obținem vectorul $\mathbf{V}_1$ care nu este situat în $X_n^m$. Transportîndu-l însă pe $\mathbf{V}$, prin paralelism, în raport cu $M_{jk}^i$ și $M_{bc}^a$ obținem

același vector $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3$ situat în spațiul $X_n^m$ ; acest vector este chiar proecția lui $\mathbf{V}$, din spațiul $X_n$, în spațiul neolonom $X_n^m$.

6. Ca încheere, vom demonstra acum că :

*Pentru ca coeficienții* $M_{jk}^i$ *să reprezinte coeficienții conexiunei induse de către* $\Gamma_{jk}^i$ *în spațiul* $X_n^m$, *este necesar și suficient ca* $M_{ab}^A = 0$.

În acest scop, fie $V^i$ un vector contravariant din $X_n^m$, de componente intrnseci $V^\alpha$, deci $V^A = 0$. Definind *diferențiala covariantă* (sau absolută) în $X_n^m$ (care este dat prin ecuațiile $ds^A = 0$), prin formula

$$\delta V^\alpha = (V^\alpha_{,\beta} + V^\gamma M^\alpha_{\gamma\beta})\, ds^\beta \tag{6.1}$$

pentru $\alpha = A$ obținem

$$\delta V^A = V^A_{,\beta}\, ds^\beta + V^a M^A_{a\beta}\, ds^\beta + V^B M^A_{B\beta}\, ds^\beta \tag{6.2}$$

Primul și ultimii termeni din sume fiind însă nuli, în virtutea ecuațiilor de neolonomie $ds^A = 0$ și dat fiindcă $V^A = V^A$, $\beta = 0$ rămîne numai

$$\delta V^A = M^A_{ab} V^a ds^b . \tag{6.3}$$

Deci, dacă $M_{ab}^A = 0$, avem $\delta V^A = 0$, adică vectorul $\delta V^A$ găsește situat în $X_n^m$. Condiția este prin urmare suficientă.

Invers, dacă $\delta V^A = 0$, urmează că și $M_{ab}^A = 0$, deoarece relațiile (6.3) trebuie să aibă loc oricare ar fi $V^a$ și $ds^l$. Condiția $M_{ab}^A = 0$ este astfel și necesară.

Referindu-ne încă la (5.11) și făcînd legătura cu componentele scalare $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ și $M^\alpha_{\beta\gamma}$ care definesc dealtfel, în $X_n$, aceeași conexiune ca și $\Gamma_{jk}^i$, $M_{jk}^i$ respectiv, relația $\delta V^A = 0$ ne spune că vectorul $\mathbf{V}$ $(V^\alpha)$ din $X_n$, coincide cu proecția sa în spațiul neolonom $X_n^m$.

*Obs.* Este de la sine înțeles că, considerații asemănătoare sînt valabile și pentru spațiul neolonom complementar $X_n^{n-m}$.

## BIBLIOGRAFIE

1. *G. Vrănceanu.* — Les espaces non holonomes, Mémorial de Sci. Mathématiques, f. 76, 1936.
2. *K. Yano et St. Petrescu.* — Sur les espaces non holonomes complémentaires, Disquis. Mathém. et Physicae, T. I, f. 1—2, 1940.

## ОБ ИНДУКТИВНОМ СОЕДИНЕНИИ НЕОГОЛОМОНОМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ $X_n^m$

### (Краткое содержание)

После указания Формулы разложения соединения $\Gamma_{jk}^i$ пространства $X_n$ с завитым метрическим соединением: $\Gamma_{jk}^i = M_{jk}^i + N_{jk}^i$, уточняется и подтверждается название индуктивного содсинения, данные $M_{jk}^i$ и $N_{jk}^i$.

Затем указываются необходимые и достаточные условия, чтобы $M_{jk}^i$ ($N_{jk}^i$) представляли коэффициенты соединения индуктированного $\Gamma_{jk}^i$ в неголономном пространстве $X_n^m$ ($X_n^{n-m}$).

## SUR LA CONNEXION INDUITE DANS UN ESPACE NON HOLONOME $X_n^m$

(R e s u m é)

Aprés avoir indiqué une formule de décomposition de la connexion $\Gamma_{jk}^i(x)$ d'un epace $X_n$ a connexion métrique avec torsion: $\Gamma_{jk}^i = M_{jk}^i + N_{jk}^i$, l' *A.* precise et justifie la dénomination de „conexion induite" donnée pour $M_{jk}^i$ et $N_{jk}^i$. Ensuite on donne des conditions nécéssaires et suffisantes pour que $M_{jk}^i$ ($N_{jk}^i$) représentent les coefficients de la connexion induite par $\Gamma_{jk}^i$ dans l'espace non holonome $X_n^m$ ($X_n^{n-m}$).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4



# DESPRE SPAŢIILE $A_2$ LOCAL EUCLIDIENE

de ŞT. PETRESCU

1. Într-o comunicare făcută la Sesiunea ştiinţifică a Academiei R. P. R. din 1954, Akad. Vrănceanu [1] s-a ocupat de spaţiile cu conexiune afină bidimensionale $A_2$ local euclidiene, arătînd — în primul rînd — că dacă spaţiul este raportat la coordonare $x$, $y$ reprezentînd curbe auto-paralele ale sale, iar conexiunea satisface condiţia $\Gamma^1_{12} \cdot \Gamma^2_{12} \neq 0$, determinarea sa depinde de integrarea unei anumite ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi, într-o funcţie necunoscută $\lambda\,(x, y)$, deci soluţia problemei include două funcţii arbitrare de cîte un argument.

În al doilea rînd, D-sa tratează cazurile în care $\Gamma^1_{12} = 0$, $\Gamma^2_{12} \neq 0$ $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = 0$ arătînd că terminarea spaţiului $A^2$ se obţine atunci prin cuadraturi, conexiunea sa putînd depinde de o funcţie arbitrară de $y$, ori se obţine explicit, fără nici-o funcţie arbitrară, fiind lineară sau constantă.

Nota de faţă are drept scop de a cerceta toate cazurile (afară de cele semnalate mai sus), în care conexiunea unui spaţiu $A_2$ local euclidian, raportat la coordonate $x, y$ auto-paralele, poate depinde de arbitrare şi natura acestor arbitrare.

2. Un spaţiu $A_2$ cu conexiune afină local euclidian (adică avînd tensorul de torsiune şi de curbură nuli), are conexiunea $\Gamma^i_{jk}\,(x, y)$ de forma

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = u\,, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = v \\ &\Gamma^1_{11} = \alpha\,, \quad \Gamma^2_{22} = \beta\,, \quad \Gamma^1_{22} = a\,, \quad \Gamma^2_{11} = b\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Anularea celor patru componente ale tensorului de curbură

$$\Gamma^1_{212}\,, \quad \Gamma^2_{121}\,, \quad \Gamma^1_{112}\,, \quad \Gamma^2_{212}$$

conduce la un sistem de patru ecuaţii cu derivate parţiale de primul ordin în $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$, $a$, $b$ ca funcţii necunoscute de $x, y$, admiţînd — în general — soluţii [1, p. 335].

Presupunînd a fi anulat coeficienţii de conexiune $\Gamma^1_{22}$ şi $\Gamma^2_{11}$, lucru posibil [2] şi observînd că valorile

$$\Gamma^1_{22} = 0\,, \quad \Gamma^2_{11} = 0\,, \quad (a = b = 0) \tag{1'}$$

se păstrează faţă de o transformare a lui $x, y$ de forma

$$x' = f(x)\,, \quad y' = \varphi(y) \tag{2}$$

şi că axele coordonate $x, y$ sînt în acest caz curbe auto-paralele ale spaţiului $A_2$, ce rămîn invariante în raport cu (2), presupunînd a fi raportat spaţiul la aceste coordonate, funcţiile $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$, trebuie să verifice sistemul [1, p. 336]

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha v-v^2=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\beta u-u^2=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial x}-uv=0\,,\quad \frac{\partial \alpha}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+uv=0\,. \tag{3}$$

A doua ecuaţie poate fi încă scrisă

$$\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 Lu}{\partial x\partial y}-uv=0$$

şi eliminînd dferenţa $\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}$ cu jutorul celei de a patra ecuaţie (3) şi

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial^2 Lu}{\partial x\partial y}$$

ajungem la ecuaţia de ordinul doi

$$\frac{\partial^2 Lu}{\partial x\partial y}=2uv \tag{4}$$

cu soluţia

$$uv=\frac{m'(x)\,n'(y)}{(m+n)^2} \tag{4'}$$

$m'$, $n'$ fiind derivatele funcţiilor arbitrare $m$ (x), respectiv $n$ (y).

În acelaşi timp însă, funcţiile $u$, $v$ trebuie să satisfacă şi ecuaţiei [1, p. 336].

$$\frac{\partial^2 L\overset{u}{\underset{v}{}}}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}=0\,. \tag{5}$$

Printr-o transformare (2) putem să luăm

$$m=x+\frac{1}{2}\,,\quad n=y-\frac{1}{2} \tag{5'}$$

şi (4') devine

$$uv=\frac{1}{(x+y)^2} \tag{6}$$

relaţie care este verificată şi dacă punem

$$u=\frac{e^{\lambda}}{x+y}\,,\ v=\frac{e^{-\lambda}}{x+y} \tag{6'}$$

funcția $\lambda\ (x, y)$ trebuind să fie atunci soluție a ecuației cu derivate parțiale de ordinul al doilea [1]).

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}-\frac{1}{x+y}\left(e^{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+e^{-\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)+\frac{1}{(x+y)^2}(e^{\lambda}-e^{-\lambda})=0\ . \qquad (7)$$

De aci se deduce teorema [1, p. 337]:

*Spațiile $A_2$ local euclidiene, raportate la coordonate* x, y *ce constitue curba auto-paralele ale lui, depind de două funcții arbitrare de cîte un argument, dacă conexiunea satsface condițiilor*

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}\neq 0\ ,\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}\neq 0$$

*și determinarea acestor spații revine la integrarea ecuației (7).*

Enunțul precednt reprezintă cazul general considerat de Acad. G. Vrănceanu.

Soluția generală a ecuației (7), în cazul cînd ea este integrabilă, nu pare a fi ușor de găsit. D-sa a determinat însă ulterior, soluția generală $\lambda=\lambda(x)$ **sau** $\lambda=\lambda(y)$ și se pot găsi soluții particulare depinzînd de constante arbitrare, prin integrarea unei ecuații diferențiale de tip Riccati.

Este de observat că, ecuația (7) rămîne neschimbată, cînd schimbăm pe $x$ în $-x$ și pe $y$ în $-y$ și are aceeași proprietate, cînd schimbăm pe $\lambda$ în $-\lambda$, $x$ în $y$ și $y$ în $x$.

3. În cele ce urmează, vom arăta mai întîi că, dacă $\alpha=\beta$, deci dacă conexiunea spațiului $A_2$ satisface condiției

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{22} \qquad (8)$$

soluția problemei nu conține nici-o funcție arbitrară.

Pentru aceasta, să facem $\alpha=\beta$ în sistemul (3). Avem atunci

$$v-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}=u-\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

și ținînd seama de valorile (6') ale lui $u$ și $v$, obținem ecuația de primul ordin în $\lambda$, liniară și neomogenă,

$$(x+y)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)+e^{-\lambda}-e^{\lambda}=0 \qquad (9)$$

a cărei soluție generală poate fi scrisă sub forma

$$e^{\lambda}=\frac{1+(x+y)\,\varphi\,(x-y)}{1-(x+y)\,\varphi\,(x-y)} \qquad (9')$$

$\varphi(x-y)$ fiind o funcție deocamdată arbitrară.

---

1) In lucrarea [1] ecuația (7) apare puțin schimbată. Anume acolo, coeficienții $\frac{1}{x+y}$ și $\frac{1}{(x+y)^2}$ sunt $\frac{1}{1+x+y}$ și $\frac{1}{(1+x+y)^2}$, respectiv.

Pe de altă parte însă, funcţia

$$\lambda = \ln \frac{1+(x+y)\,\varphi(x-y)}{1-(x+y)\,\varphi(x-y)}, \tag{10}$$

trebuie să verifice şi ecuaţia (7).

Făcînd transformarea de variabile

$$\xi = x+y\,, \quad \eta = x-y$$

şi scriind că funcţia

$$\lambda = \ln \frac{1+\xi\,\varphi(\eta)}{1-\xi\,\varphi(\eta)}$$

verifică ecuaţia (7) şi ajungem la relaţia diferenţială

$$\xi^2 \varphi(\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2) - (\varphi'' + 4\varphi\varphi' + 2\varphi^3) = 0 \tag{11}$$

care trebuind să aibă loc oricare ar fi $\xi$ (finit), ne conduce la sistemul în $\varphi$

$$\left.\begin{aligned} \varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 &= 0 \\ \varphi'' + 4\varphi\varphi' + 2\varphi^3 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

Soluţia generală a primei sale ecuaţii este (cu $C_1$, $C_2$ constante)

$$\varphi = \frac{-1}{C_1\eta + C_2}\,.$$

Scriind însă că această funcţie verifică şi cea de a doua ecuaţie (11'), se găseşte că

$$(C_1+1)^2 = 0$$

şi ca atare avem $C_1 = -1$.

În felul acesta putem scrie acum

$$\varphi = \frac{-1}{-\eta + C_2} = \frac{1}{\eta + C}, \quad (C = \text{constantă arbitrară})$$

aşa încît soluţia (10) devine

$$\lambda = \ln \frac{2x+C}{C-2y}\,. \tag{10'}$$

Ţinînd seama de faptul că $\lambda$ depinde numai de constanta arbitrară $C$ şi că $\alpha\,(=\beta)$ se determină fără nici o cuadratură, urmează rezultatul:

*Dacă conexiunea spaţiului $A_2$ considerat, local euclidian, verifică condiţia (8), conexiunea sa este dată de formulele*

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} = 0\,, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = \frac{C-2y}{(x+y)(2x+C)}\left[1 + \frac{(C-2y)(4x+2y+C)}{(x+y)^2(2x+C)^2}\right]$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{2x+C}{(x+y)(C-2y)}\,, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{C-2y}{(x+y)(2x+C)}\,,$$

*deci depinde de o singură constantă arbitrară.*

4. În lucrarea citată [1], după punerea in evidență a gradului de arbitrarietatea a soluției în capul general, se consideră ipotezele $u=0, v\neq 0$ și $u=v=0$.

Revenind la sistemul (3), se observă că dacă $u$ este nul, atunci $\Gamma^1_{11}=\alpha$ nu depinde de variabila $y$. Vom demonstra acum proprietatea reciprocă și anume:

*Dacă coeficientul de conexiune* $\Gamma^1_{11}=\alpha$ *depinde numai de variabila* $x$, *atunci* $\Gamma^1_{12}$ *nu poate avea decît valoarea zero.*

Să presupunem deci că $\Gamma^1_{11}$ depinde numai de $x$ și că am luat pe $\alpha$ egal cu derivata unei funcții de $x$ determinante

$$\alpha(x)=\sigma'(x).$$

Atunci $v$ se determnă prin ecuația Bernoulli

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\sigma'(x)\,v-v^2=0 \tag{12}$$

care prin substituția obișnuită de funcție $z=\frac{1}{v}$ ne conduce la ecuația lineară

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\sigma'(x)\,z+1=0,$$

cu soluția

$$z=e^{\sigma(x)}\left[\varphi(y)-\int e^{-\sigma(x)}\,dx\right],$$

unde $\varphi(y)$ este o funcție arbitrară.

Rezultă atunci pentru $v$ valoarea

$$v=\frac{e^{-\sigma(x)}}{\varphi(y)-\int e^{-\sigma(x)}\,dx} \tag{12'}$$

și va trebui să considerăm două cazuri distincte, în ceea ce privește pe $\varphi(y)$, anume:

1°. $\varphi(y)$ este o funcție efectivă de $y$;

2°. $\varphi(y)$ se reduce la o constantă oarecare.

În cazul 1°, luînd pe $\varphi(y)$ ca nouă variabilă $y$, lucru posibil pe baza ipotezelor făcute, vom avea

$$v=\frac{e^{-\sigma(x)}}{y-\int e^{-\sigma(x)}\,dx}. \tag{13}$$

Presupunînd că am luat $\sigma'(x)=2x$, deducem

$$v=\frac{e^{-x^2}}{y-\int e^{-x}\,dx}. \tag{13'}$$

Determinarea lui $u$ este imediată, căci din ecuaţia

$$\frac{\partial Lu}{\partial x} = v$$

scoatem

$$u = \psi(y) e^{\int \frac{e^{-x}\,dx}{I - \int e^{-x}\,dx}} = \psi(y)\, e^{I} \tag{14}$$

$\psi$ (y) fiind o funcţie arbitrară, iar $I = \int \frac{e^{-x}\,dx}{y - \int e^{-x^2} dx}$.

Dacă ţinem însă seama de relaţia

$$\beta = u - \frac{\partial Lu}{\partial y} = \psi(y)\, e^{I} - \frac{\partial}{\partial y}\,[I + L\psi(y)] \tag{15}$$

şi ecuaţia

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - uv\,, \tag{16}$$

se poate vedea uşor că $\psi$ $(y)$ trebuie să fie nulă. În adevăr, avem derivînd (15) în raport cu $x$,

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \psi(y)\, e^{I} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{e^{-x^2}}{(y - \int e^{-x}\,dx)^2}$$

şi egalînd această valoare cu aceea dată de (16), obţinem relaţia în termeni finiţi pentru $\psi$,

$$\psi(y) = \frac{-e^{-I}}{y - \int e^{-x}\,dx}\,. \tag{17}$$

Ori, această egalitate este imposibilă, deoarece membrul al doilea este o funcţie de $x$ şi $y$, pe cîtă vreme $\psi$ este funcţie numai de $y$.

Prinurmare, $\psi$ nu poate fi o funcţie de $y$. Deasemenea, nu putem avea $\psi = C\text{-tă} \neq 0$, deoarece aceeaş, relaţie (17) ar constitui o legătură pentru $x$ şi $y$ şi ele n-ar fi variabile independente.

Aşa dar, trebuie să presupunem dela început că $\psi$ $(y) = 0$. Atunci însă avem

$$u = 0\,,\quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{e^{-x^2}}{(y - \int e^{-x^2}\,dx)^2}$$

deci

$$\beta = -\int \frac{e^{-x^2}\,dx}{(y - \int e^{-x^2}\,dx)^2} \tag{18}$$

cu $\lambda$ $(y)$ arbitrară.

2°. Dacă $\varphi$ (y) este o constantă $C$, luînd $C = 1$, obținem

$$v = \frac{e^{-x^2}}{1 - \int e^{-x}\, dx}, \tag{19}$$

deci $v$ nu mai depinde de $y$. În cazul acesta obținem

$$u = \psi(y)\, e^I, \quad \left(I = \int \frac{e^{-x^2}}{1 - \int e^{-x^2} dx}\right). \tag{19'}$$

Cît privește $\beta$, el se obține fără nici-o cuadratură, din relația (15). Cum însă trebuie să avem

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = -uv,$$

ajungem la relația

$$\psi(y)\, e^I\, v = 0.$$

Dar, $v$ și $e^I$ neputîndu-se anula, urmează că trebuie să avem $\psi$ (y)=0 și ca atare

$$u = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$$

deci $\beta$ este o funcție numai de $y$ ori o constantă.

Cu aceasta putem enunța teorema următoare:

*Un spațiu $A_2$ local euclidian, raportat la coordonate x, y curbe autoparalele și cu $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{11}$ (x), are coeficienții $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0$ și determinarea lui se face prin cuadraturi. Conexiunea spațiului depinde, dacă $\Gamma^2_{12}$ ( $= \Gamma^2_{21}$ ) conține pe y, de o funcție arbitrară de această variabilă.*

5. Să presupunem acum că $\Gamma^1_{11} = \alpha$ este o constantă nenulă $k$. Ecuația (12) ne dă atunci

$$v = \frac{k}{k\varphi(y)\, e^{kx} + 1} \tag{20}$$

Deosebind și acum cazurile 1°. $\varphi$ (y) = y și 2°. $\varphi$ (y) = C, obținem pentru $u$ valorile

(1°) $u = \psi(y) e^{\int \frac{k\, dx}{k y e^{kx} + 1}}$ și 2°. $u = \psi(y) e^{\int \frac{k\, dx}{k e^{kx} + 1}}$

respectiv. Făcînd însă același raționament ca în § 4, se găsește că trebuie să avem $\psi$ (y)=0 în ambele cazuri și ca atare $u = 0$ ($\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0$). Atunci, din ecuația

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

deducem pentru $\beta$ valorile următoare:

(1°) $$\beta = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{kye^{kx} + 1} + \lambda(y)$$

(2°) $$\beta = \beta(y); \quad \beta = C_1; \quad \beta = 0.$$

In cazul $2^0$, dacă $\beta$ este o funcţie efectivă de variabila $y$, putem lua chiar $\beta(y) = y$, iar dacă $\beta$ este o constantă nenulă $C_1$, luînd $C_1 = 1$, ne putem reduce la situaţia

$$\Gamma^2_{22} = \beta = y\ ;\ 1\ ;\ 0\ . \tag{21}$$

Este de observat că, atît în cazul $1^0$ cît şi în $2^0$, conexiunea spaţiului $A_2$ (cu $\alpha = k \neq 0$) este determinată sub formă explicită şi ea depinde de o funcţie arbitrară de $y$, numai dacă $\Gamma^2_{12}$ conţine aceasta variabilă.

6. In sfîrşit, dacă $\Gamma^1_{11} = \alpha = 0$, avem pentru $v$ ecuaţia

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v^2\ , \tag{22}$$

de unde

$$v = \frac{-1}{\varphi(y) + x}\ . \tag{22'}$$

Considerînd, la fel ca mai înainte, ca $\varphi$ (y) depinde efectiv de $y$ sau că este o constantă determinată nenulă $C$, obţinem cazurile

$$1^\circ.\ v = \frac{-1}{x+y}\ ,\quad 2^\circ.\ v = \frac{-1}{x+C}\ .$$

Ţinînd seama de ecuaţia $\dfrac{\partial Lu}{\partial x} = v$, găsim că

$$u = \frac{\psi(y)}{x+y}\ ,\ (\psi \text{ arbitrară})\ . \tag{23}$$

In cazul $1^0$, este uşor de văzut că trebuie să avem $\psi$ (y) $= -1$. In adevăr, deoarece $\beta = \dfrac{\psi}{x+y} + \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{\psi'}{\psi}$ egalitatea $\dfrac{\partial \beta}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - uv$ se reduce la

$$\frac{\psi(y)}{(x+y)^2} = -\frac{1}{(x+y)^2}\ .$$

Rezultă atunci

$$u = \frac{-1}{x+y} = v\ ,\ \beta = 0\ ,\ (\alpha = 0) \tag{24}$$

şi conexiunea spaţiului nostru nu conţine nici-o arbitrară.

Avem astfel următorul rezultat:

*Un spaţiu $A_2$ local euclidian, raportat la coordonate auto-paralele $x$, $y$, pentru care $\Gamma^1_{11} = 0$, are conexiunea de forma*

$$\Gamma^2_{22} = 0\ ,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{-1}{x+y}\ . \tag{24'}$$

Trecînd la cazul $2^0$, vom avea

$$u=\frac{\psi(y)}{x+C}, \beta=\frac{\psi}{x+C}-\frac{\psi'}{\psi}.$$

Cum însă $\frac{\partial\beta}{\partial x}=-uv$, găsim că $\psi$ (y) = 0, așa încît

$$u=0, \quad \beta=\beta(y).$$

*Conexiunea spațiului se obține și acum explicit, fără nici un fel de cuadratură și are una din următoarele forme:*

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{11}=0.$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{-1}{x+C}, \Gamma^2_{22}=y; C_1(=1); 0, \tag{25}$$

*constanta C putînd fi luată egală cu 1.* După cum se vede, nici în cazul $2^0$ nu intervine vre-o arbitrară.

*Obs.* Este clar că am fi obținut rezultatele întru total asemănătoare cu cele de mai sus, dacă am fi presupus $\Gamma^2_{22}$ funcție numai de $y$; rolul lui $v$ ar fi fost jucat atunci de către $u$.

7. Vom examina, mai departe, ipoteza în care

$$\Gamma^1_{11}=\alpha(x), \Gamma^2_{22}=\beta(y).$$

Un calcul pe care l-am mai făcut ne dă atunci, punînd $\alpha(x)=\sigma'(x)$,

$$v=\frac{e^{-\sigma(x)}}{\varphi(y)-\int e^{-\sigma(x)}\,dx}, \quad u=\psi(y)\,e^{\int v\,dx}. \tag{26}$$

Cum însă în acest caz avem relația

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

ajungînd la concluzia că $\psi$(y) trebuie să fie nulă. Dar, avînd $u = 0$, urmează că $\frac{\partial v}{\partial y}=0$. Prinurmre trebuie ca și $\varphi$ (y) = 0 și prinurmare

$$v=\frac{-e^{-\sigma(x)}}{\int e^{-\sigma(x)}\,dx}, \quad u=0, \quad \alpha=\sigma'(x), \quad \beta=\beta(y). \tag{26'}$$

Dacă $\beta$ nu este o constantă, putem lua

$$\beta(y)=y, \quad \alpha=\sigma'(y)=2x$$

așa încît conexiunea spațiului $A_2$ are forma

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{11}=0, \quad \Gamma^1_{11}=2x$$

$$\Gamma^2_{22}=y, \quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{-e^{-x^2}}{\int e^{-x^2}\,dx} \tag{27}$$

deci se determină printr-o cuadratură și nu conține nimic arbitrar.

Cînd $\beta$ este o constantă nenulă $\beta = C$, putem avea $\beta = 1$, deci $\Gamma^2_{22} = 1$, celelalte componente ale conexiunei avînd tot expresiile din (27). Aceleaşi valori rămîn încă valabile şi în cazul că $\beta = 0$.

Prinurmare avem teorema:

*Dacă spaţiul $A_2$ locul euclidian este raportat la coordonate autoparalele $x$, $y$, iar $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{11}(x)$, $\Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{22}(y)$, conexiunea sa se obţine prin cuadraturi şi nu depinde de nici-o arbitrară.*

8. Să vedem încă ce consecinţe decurg, atunci cînd am presupune că avem $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22}$, **adică** $u = \beta$.

În cazul acesta rezultă că $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, deci $u = u(x)$. Invers, dacă $u$ depinde numai de variabile $x$, urmează că $u = \beta$.

Referindu-ne la sistemul (3), care devine acum

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha v - v^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + uv = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - uv = 0 \tag{28}$$

şi adunînd ultimile două ecuaţii, deducem că

$$\frac{\partial}{\partial y}(\alpha + v) = 2\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Deoarece am presupus însă că $u$ depinde de $x$, ne putem aranja aşa fel ca să avem $u = \frac{x^2}{2}$, deci

$$\frac{\partial}{\partial y}(\alpha + v) = x\,; \quad \alpha + v = xy + \varphi'(x) \tag{28'}$$

$\varphi'(x)$ fiind o funcţie arbitrară.

Pe de altă parte, observînd ca prima ecuaţie (28) ne dă

$$\alpha - v + \frac{\partial L v}{\partial x} = 0$$

obţinem pentru $v$ ecuaţia Bernoulli

$$\frac{\partial v}{\partial x} + [xy + \varphi'(x)]\, v - 2v^2 = 0 \tag{29}$$

cu soluţia

$$v^{-1} = e^{\frac{x^2}{2}y + \varphi(x)} \left[\psi(y) - 2\int e^{-\left[\frac{x^2}{2}y + \varphi(x)\right]} dx\right]. \tag{29'}$$

Presupunînd că funcţia $\psi(y)$ —care este arbitrară— nu este o constantă, luînd $\psi(y) = y$, în expresia lui $v$ deci a lui $\alpha$ nu va interveni decît funcţia rbitrară $\varphi(x)$. Acelaşi lucru se întîmplă şi dacă

$\psi(y) = C$ și cînd putem face $\psi(y) = 0$. În concluzie avem rezultatul:

*Conexiunea unui spațiu $A_2$ local euclidian, pentru care $x$, $y$ sunt curbe auto-paralele, iar $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22}\ (= \Gamma^1_{21})$, se obține prin cuadraturi și depinde numai de o singură funcție arbitrară de variabila $x$.*

*Obs.* Este ușor de văzut că această teoremă rămîne valabilă și în cazul în cre coeficientul de conexiune $\Gamma^1_{12}\ (= \Gamma^1_{21})$ depinde numai de $x$.

9. Ne vom ocupa cum de ipoteza $u = v$, dică

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12}\,.$$

Din sistemul (3), care acum se scrie

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} - u^2 = 0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u - u^2 = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} - u^2 = 0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y} + \beta u - u^2 = 0\,, \end{aligned} \tag{30}$$

obținem, egalînd valoarea lui $\frac{\partial u}{\partial x}$ din primele două ecuații și pe a lui $\frac{\partial u}{\partial y}$ din cele de al doilea,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha u = 0\,,\quad \frac{\partial \beta}{\partial x} + \beta u = 0$$

de unde deducem

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} + (\beta - \alpha)\, u = 0\,. \tag{31}$$

Deasemenea, prin scăderea celei de a treea ecuații (30) din prima, găsim ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0\,. \tag{31'}$$

Să derivăm acum a doua din ecuațiile (30) în raport cu $y$ și pe a patra în raport cu $x$, egalînd apoi valorile lui $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ Ajungem atunci la relația

$$u\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) + \beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} - 2u\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

care, în virtutea lui (31), (31'), devine

$$\beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} + 3u^2(\alpha - \beta) = 0\,. \tag{32}$$

Dar, prin înmulţirea cele de a treea ecuaţii (30) cu $\beta$ şi a celei de a patra cu $\alpha$ şi scăderea lor, deducem

$$\beta\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial u}{\partial y}+u^2(\alpha-\beta)=0 \tag{32'}$$

şi cum se observă, din (32), (32') urmează că

$$u^2(\alpha-\beta)=0\,.$$

Vom avea deci de deosebit două cazuri şi anume:

1°. $u=0\,(=v)\,,\quad \alpha\neq\beta\,;$

2°. $u=v\neq 0\,,\quad \alpha=\beta\,.$

In cazul 1° avem

$$\alpha=\alpha(x)\,,\quad \beta=\beta(y)$$

şi un raţionament pe care l-am mai folosit anterior, permite să dăm coeficienţilor $\Gamma^1_{11}$, $\Gamma^2_{22}$ una din formele canonice

$$\begin{aligned}&\alpha=x\,,\ \beta=y\,;\ \alpha=x\,,\ \beta=1\,;\ 0\\ &\alpha=1\,;\ 0\,,\ \beta=y\,;\ \alpha=1\,;\ 0\,,\ \beta=1\,;\ 0\,.\end{aligned} \tag{33}$$

Pentru cazul 2°, din (31) şi (31') scoatem

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{34}$$

şi prin urmare

$$\alpha=f(x+y)\,,\quad u=\varphi(x+y)\,.$$

Scriind însă că $\alpha$ şi $u$ trebuie să verifice ecuaţiile (30), ajungem la sistemul diferenţial de primul ordin nelinear

$$\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{d\xi}-\frac{df}{d\xi}-\varphi^2=0\,,\\ &\frac{d\varphi}{d\xi}+\varphi f-\varphi^2=0\end{aligned} \tag{34'}$$

unde am notat $\xi=x+y$.

Eliminarea lui $f$ şi $f'$ ne conduce la ecuaţia de ordinul doi în $\varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}-\frac{1}{\varphi}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2-\varphi^3=0\,, \tag{34'}$$

care prin transformarea

$$\frac{d\varphi}{d\xi}=p\,,\quad \frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=p\frac{dp}{d\varphi}$$

devine, în $p$ ca funcție necunoscută și $\varphi$ ca variabilă independentă, de forma

$$p\frac{dp}{d\varphi}-\frac{1}{\varphi}p^2-\varphi^3=0\,. \tag{35}$$

Prin integrare obținem

$$p=\pm\varphi(\varphi^2+C_1^2)^{1/2}$$

cu $C_1$ o constantă arbitrară și apoi, din $\frac{d\varphi}{d\xi}=p$,

$$L\left|\frac{C_1+\sqrt{\varphi^2+C_1^2}}{\varphi}\right|=\pm\xi+LC_2\,,$$

$C_2$ fiind o altă constantă de integrare.

În cele din urmă se găsește că

$$\varphi=\frac{2C_1C_2e^{\pm(x+y)}}{C_2^2e^{\pm 2(x+y)}-1}\left(=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{12}^2\right)\,. \tag{35'}$$

Cît privește $f(\xi)$, ea se obține fără nici-o cuadratură, din a doua ecuație (34′).

$$f=\varphi-\frac{dL\varphi}{d\xi}\left(=\Gamma_{11}^1=\Gamma_{22}^2\right)\,. \tag{36}$$

Cele de mai sus ne conduc astfel la teorema următoare:

*Un spațiu $A_2$ local euclidian, raportat la coordonate $x$, $y$ curbe autoparalele ale lui, pentru care $\Gamma_{12}^1=\Gamma_{12}^2$, este cu conexiune lineară sau constantă de forma (33), dacă $\Gamma_{12}^1=\Gamma_{12}^2=0$ și cu conexiune de forma (35′), (36), cînd $\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^2\neq 0$.*

10. Pentru a încheia aceste considerații, vom mai examina încă ipoteza

$$\alpha=\beta=0\,,$$

Sistemul (3) se reduce acum la

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial x}-v^2=0\,,\quad \frac{\partial v}{\partial y}-uv=0\\ &\frac{\partial u}{\partial y}-u^2=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial x}-uv=0\end{aligned} \tag{37}$$

așa încît, integrînd cea de a doua ecuația sub formă $\frac{\partial Lu}{\partial y}=u$, prin substituția $u=e^z$, deducem

$$e^{-z}=-y+\varphi(x)$$

cu $\varphi(x)$ oarecare, deci

$$u=\frac{1}{\varphi(x)-y}\,. \tag{38}$$

A patra ecuaţie din (37) ne da atunci pentru $v$ expresia

$$v = \frac{-\varphi'(x)}{\varphi(x) - y}. \tag{39}$$

Introducînd însă în prima ecuaţie (37) obţinem $\varphi''(x) = 0$ şi prin-urmare

$$\varphi(x) = ax + b \tag{39'}$$

$a$ şi $b$ fiind două constante arbitrare. Cît priveşte cea de a trei ecuaţie a sistemului (37) ea este verificată identic.

Cu aceasta putem scrie acum

$$u = \frac{1}{ax - y + b}, \quad v = \frac{-a}{ax - y + b}. \tag{40}$$

Deoarece avem însă posibilitatea de a face o transformare de forma (2), presupunînd a fi luat drept nouă variabilă $x$ chiar pe $ax + b$, ne putem reduce la situaţia.

$$u = -v = \frac{1}{x - y}, \ (\alpha = \beta = 0). \tag{40'}$$

În consecinţă, avem rezultatul următor:

*Dacă un spaţiu $A_2$ local euclidian este raportat la coordonate $x$, $y$ auto-paralele, iar $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = 0$, conexiunea sa se obţine explicit, fără nici o cuadratură.*

## BIBLIOGRAFIE

1. *G. Vrănceanu,* Spaţii $A_2$ local euclidiene, Comunicările Academiei Republicii Populare Romîne, T. IV, Nr. 7—8, 1954
2. *G. Vrănceanu,* Asupra reducerii la o formă canonică a ecuţiilor curbelor auto-paralele ale unui spaţiu $A_2$, Idem, T. II, Nr. 9—10, 1952, p. 479.

## О МЕСТНЫХ ЕВГЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $A_2$

(Краткое содержание)

Работа ставит своей целью определение соединения местного евклидового пространства $A_2$, отнесенного к координатам $x$, $y$ его авто-параллельным кривым, предполагая, что определение условия для коеэффициентов соединения выполнены.

## SUR LES ESPACE $A_2$ LOCALEMENT EUCLIDIENS

(Résumé)

Le travail a comme but de déterminer la connexion d'un espace $A_2$ localement euclidien, rapporté á des coordonnées x, y courbes auto-paralleles, dans l'hypothese que certaines conditions soient remplies pour les coefficients de connexion.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4



# O PROPRIETATE A CURBELOR PLANE

de C. COŞNIŢĂ

1.— Se ştie că locul geometric al punctelor de unde se pot duce la o curbă plană (Γ) două tangente cari fac un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ este o curbă numită *ortoptica* acestei curbe; dacă în loc de $\frac{\pi}{2}$ luăm un unghi oarecare $\omega$ curba loc geometric se numeşte *izoptica* de unghi $\omega$ a curbei (Γ). În cazul cînd (Γ) este o conică cu centru, ortoptica este un cerc (cercul *ortoptic*, sau cercul lui *Monge* al conicei); iar cînd (Γ) este o parabolă, ortoptica este directoarea ei.

Ne propunem să rezolvăm problema inversă, adică *să determinăm curbele plane* (Γ) *cari au ca ortoptică un cerc dat, sau o dreaptă dată.*

Vom determina curba (Γ) prin tangentele sale, adică înfăşurătoarea dreptei:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p(\alpha) = 0 \tag{1}$$

O tangentă perpendiculară pe aceasta are ecuţia:

$$x \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + y \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - p\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = 0 \tag{2}$$

sau

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha - p\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = 0\,. \tag{2'}$$

Dacă ortoptica este cercul:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0\,, \tag{3}$$

va trebui ca dreptele (1), (2) să se taie pe cerc.

Rezolvînd sistemul format de (1), (2) avem:

$$x = p(\alpha) \cos \alpha + p\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\,;\; y = p(\alpha) \sin \alpha + \\ + p\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \tag{4}$$

Înlocuind în (3), obţinem următoarea ecuaţie funcţională:

$$p^2(\alpha)+p^c\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+A\left[p(\alpha)\cos\alpha+p\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]+$$

$$+B\left[p(\alpha)\sin\alpha+p\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]+C=0\,, \tag{5}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+f(\alpha)=0 \tag{6}$$

unde am notat:

$$f(\alpha)=p^2(\alpha)+(A\cos\alpha+B\sin\alpha)\,p(\alpha)+\frac{C}{2}\,. \tag{7}$$

Ecuaţia funcţională (5), care nu este liniară, se transformă astfel în ecuaţia liniară şi omogenă cu diferenţe finite (6).

În loc de a scrie soluţia generală a ecuaţiei (6) sub forma obişnuită, prefer să caut soluţii elementare de forma:

$$f(\alpha)=\cos r\alpha \quad \text{şi} \quad f(\alpha)=\sin r\alpha\,.$$

Un calcul simplu dă r = 2 (2 k + 1), deci avem şirurile dublu infinite de soluţii elementare:

$$f(\alpha)=\cos 2(2k+1)\alpha\,;\; f(\alpha)=\sin 2(2k+1)\alpha\,, \tag{8}$$

k fiind un număr natural.

Cu aceste soluţii elementare, se poate construi soluţia mai generală:

$$f(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[A_{2k+1}\cos 2(2k+1)\alpha+B_{2k+1}\sin 2(2k+1)\alpha\right]\,, \tag{9}$$

unde $A_{2k+1}$, $B_{2k+1}$ sînt constante periodice de perioadă $\frac{\pi}{2}$ Se vede uşor că avem şi soluţii elementare de forma:

$$f(\alpha)=\cos^{2h+1}2(2k+1)\alpha\,;\; f(\alpha)=\sin^{2h+1}2(2k+1)\alpha\,,$$

h şi k fiind numere naturale, cu cari putem construi o soluţie mai generală ca (8).

Am scris soluţiile ecuaţiei (6) sub aceste forme, pentru a pune în evidenţă diverse clase de curbe cari au proprietatea enunţată; este dovedit astfel că această proprietate nu caracterizează conicele.

Să analizăm cîteva din aceste curbe.

Să luăm $k = 0$ şi soluţia particulară:

$$f(\alpha)=m\cos 2\alpha+n\sin 2\alpha\,,\ (m,n \text{ constante}).$$

Ducînd în (7), avem ecuaţia:

$$p^2(\alpha)+(A\cos\alpha+B\sin\alpha)\,p(\alpha)-m\cos 2\alpha-n\sin 2\alpha+\frac{C}{2}=0 \tag{10}$$

Se știe că dacă ecuația punctuală a unei conice este:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+a_{23}x+a_{33}=0\,, \tag{11}$$

atunci ecuația ei tangențială este:

$$A_{11}v^2+2A_{12}uv+A_{22}v^2+2A_{13}uw+2A_{23}vw+A_{33}w^2=0 \tag{12}$$

unde $A_{ik}$ este complementul algebric al lui $a_{ik}$ în determinantul $|a_{ik}|$.

Pentru a exprima că dreapta x cos $\alpha + y$ sin $\alpha$ — p ($\alpha$) = 0 este tangentă acestei conice, înlocuim în (12) pe $u$, $v$, $w$ respectiv prin cos $\alpha$, — p și avem:

$$A_{33}p^2-2(A_{13}\cos\alpha+A_{23}\sin\alpha)p+A_{11}\cos^2\alpha+A_{12}\sin 2\alpha+A_{22}\sin^2\alpha=0 \tag{10'}$$

Dacă conica are centru, $A_{33} \neq 0$, deci împărțind pe (10') cu $A_{33}$ avem o ecuație de forma (10), care deci caracterizează o conică cu centru.

Identificînd ecuațiile (10), (10'), obținem:

$$A_{33}=1\ ;\ 2A_{13}=-A\ ;\ 2A_{23}=-B\ ;\ A_{11}-A_{22}=2m\ ;$$
$$A_{12}=-n\ ;\ A_{11}=-m\ ;\ A_{11}+A_{22}=C$$

Ecuația tangențială a conicei este:

$$\frac{1}{2}C(u^2+v^2)-mu^2-2nuv+mv-Avw-vw+w^2=0 \tag{13}$$

Se arată ușor că ecuția:

$$A_{32}(x^2+y^2)-2A_{13}x-A_{23}y+A_{11}+A_{22}=0$$

reprezintă cercul ortoptic al conicei (12), dacă $A_{33} \neq 0$.

Dacă însă $A_{33} = 0$, ecuația rămasă:

$$2A_{13}x+A_{22}y-A_{11}-A_{22}=0$$

reprezintă directoarea parabolei corespunzătoare.

În cazul de față ecuația cercului ortoptic al conicei (13) devine:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0\,.$$

adică tocmai cercul dat. Verificarea este făcută.

Mai sistematic, pentru a găsi ecuația tangențială a curbei ($\Gamma$), după ce am determinat funcția p ($\alpha$), eliminăm pe $\alpha$ din ecuațiile:

$$\cos\alpha=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\ ;\ \sin\alpha=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\ ;\ -p(\alpha)=\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}} \tag{14}$$

sau din ecuațiile echivalente:

$$\frac{\cos\alpha}{u}=\frac{\sin\alpha}{v}=\frac{-p(\alpha)}{w}\,. \tag{14'}$$

Dacă luăm soluția particulară:

$$f(\alpha) = m \cos 6\alpha + n \sin 6\alpha$$

și presupunem A = B = 0, ecuația (7) devine:

$$p^2(\alpha) = -\frac{C}{2} + m \cos 6\alpha + n \sin 6\alpha$$

Punem C = — $R^2$ și alegem pe m și n astfel ca:

$$m = \frac{1}{2} R^2 \cos 2\varphi \; ; \; n = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\varphi$$

unde $\varphi$ este un unghi dat. Rezultă:

$$p^2(\alpha) = \frac{1}{2} R^2 [1 + \cos 2(\varphi - 3\alpha)] ,$$

$$p(\alpha) = R \cos (\varphi - 3\alpha) ,$$

sau

$$p(\alpha) = k_1 \cos 3\alpha + k_2 \sin 3\alpha \qquad (15)$$

unde $k_1 = R \cos \varphi$ , $k_2 = R \sin \varphi$

Pe de altă parte, o ecuție de forma:

$$w(u^2 + v^2) - (Au^3 + Bv^3 + Cu^2 v + Duv^2) = 0$$

reprezintă o ipocicloidă cu trei rebrusmente;
pentru ca dreapta $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ să fie tangentă acestei ipocicloide, va trebui exprimat că u = cos α, v = sin α, w = — p satisfac ecuația precedentă, deci:

$$p(\alpha) = A \cos^3 \alpha + B \sin^3 \alpha + C \cos^2 \alpha \sin \alpha + D \cos \alpha \sin^2 \alpha \qquad (15')$$

Se vede ușor că polinomul din partea dreaptă este reductibil la o formă lineară inraport cu cos 3 α, sin 3 α deci soluția (15) corespunde ipocicloidei cu trei rebrusmente.

Dacă vrem să determinăm curbele plane cari au ca ortoptică dreapta $Ax + By + C = 0$, eliminăm pe $x,y$ între această ecuație și ecuațiile (4); se obține următoarea ecuație funcțională:

$$A\left[p(\alpha) \cos \alpha + p\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] + B\left[p(\alpha) \sin \alpha + \right.$$

$$\left. + p\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] + C = 0 ,$$

sau dacă notăm:

$$f(\alpha) = (A \cos \alpha + B \sin \alpha) p(\alpha) + \frac{C}{2} , \qquad (16)$$

avem:

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + f(\alpha) = 0 \qquad (17)$$

adică tot ecuația (6) de mai sus.

Aici funcția $p(\alpha)$ s edetermină din ecuația (16) care este de gradul I. De exemplu, dacă $f(\alpha) = m \cos 2\alpha + n \sin 2\alpha$, m și n fiind niște constante avem :

$$p(\alpha)(A \cos \alpha + B \sin \alpha) - m \cos 2\alpha - n \sin 2\alpha + \frac{C}{2} = 0 \qquad (18)$$

Dacă în (12) presupunem $A_{33} = 0$ avem o parabolă ;

înlocuind în această ecuație pe $u, v, w$ prin $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $-p$ respectiv obținem :

$$-2(A_{13} \cos \alpha + A_{23} \sin \alpha)p(\alpha) + A_{11} \cos^2 \alpha + A_{12} \sin 2\alpha + A_{22} \sin^2 \alpha = 0$$

Ecuația (18) este de această formă, deci ea caracterizează o parabolă. Identificînd cele 2 ecuații, avem :

$$A_{11} = \frac{C}{2} - m \; ; \; A_{22} = \frac{C}{2} + m \; ; \; A_{12} = -n \; ; \; 2A_{13} = -A \; ; \; 2A_{23} = -B \; .$$

Ecuația tangențială a parabolei este :

$$\left(\frac{C}{2} - m\right)u^2 - 2nuv + \left(\frac{C}{2} + m\right)v^2 - Auw - Bvw = 0 \; .$$

Se verifică ușor că directoarea parabolei este chiar dreapta dată :

$$Ax + By + C = 0$$

Se ajunge la acelaș rezultat utilizînd teoria înfășurătoarelor ; se caută înfășurătoarea dreptei :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \frac{m \cos 2\alpha + n \sin 2\alpha - \frac{C}{2}}{A \cos \alpha + B \sin \alpha} = 0$$

Se găsește ecuația :

$$(Ax - By - 2m)^2 + (Bx + Ay - 2n)^2 = (Ax + By + C)^2 \; ,$$

care reprezintă o parabolă, cum se vede ușor calculînd determinantul $\delta$. Cele 3 paranteze egalate cu *0* dau laturile unui triunghi conjugat față de parabolă. Primele două laturi fiind perpendiculare, rezultă că ele sînt conjugate față cu tangentele din punctul lor de intersecție. Aceste tangente sînt deci izotrope deci punctul este focarul parabolei, iar latura opusă va fi directoarea parabolei.

Luînd soluția particulară :

$$p(\alpha) = \frac{m \cos 6\alpha + n \sin 6\alpha - \frac{C}{2}}{A \cos \alpha + B \sin \alpha}$$

şi utilizînd formulele (14′) găsim ecuaţia tangenţială a curbei căutate sub forma:

$$w(Au+Bv)(u^2+v^2)^2-\frac{1}{2}C(u^2+v^2)^3+m(u^6-15u^4v^2+$$

$$+15u^2v^4-v^6)+n(6u^5v-20u^3v^3+6uv^5)=0\ .$$

Se vede că avem o curbă de clasa 6-a, avînd dreapta de la infinit ca tangentă multiplă de ordinul 5.

2. — Dacă în loc de cerc sau dreaptă, vrem ca ortoptica să fie o curbă oarecare F (x,y) = 0, vom înlocui în această ecuaţie pe x,y daţi de formulele (4); se ajunge astfel la următoarea ecuaţie funcţională:

$$F\left[p(\alpha)\cos\alpha+p\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right);\ p(\alpha)\sin\alpha+\right.$$

$$\left.+p\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=0 \qquad (19)$$

sau:

$$F\left[p(\alpha)\cos\alpha-p\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\alpha\ ;\ p(\alpha)\sin\alpha+\right.$$

$$\left.+p\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\alpha\right]=0\ , \qquad (19')$$

a cărei rezolvare rămîne de văzut în ce condiţii se poate face.

De asemenea, dacă înlocuim ortoptica prin izoptica de unghi ω dat, va trebui ca în locul ecuaţiilor (2), (2′) să considerăm ecuaţiile:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p(\alpha)=0$$

$$x\cos(\omega+\alpha)+y\sin(\omega+\alpha)-p(\omega+\alpha)=0\ . \qquad (20)$$

Eliminînd pe x,y între aceste ecuaţii şi ecuaţia izopticei $F(x,y)=0$, care este dată, se obţine ecuaţia funcţională următoare:

$$F\left[\frac{p(\alpha)\sin(\omega+\alpha)-p(\omega+\alpha)\sin\alpha}{\sin\omega}\ ;\right.$$

$$\left.\frac{p(\omega+\alpha)\cos\alpha-p(\alpha)\cos(\omega+\alpha)}{\sin\omega}\right]=0 \qquad (21)$$

Rezolvarea ei este de asemenea o problemă de studiat. Chiar în cazuri cu totul simple, cînd izoptica este o curbă particulară, rezolvarea acestei ecuaţii prezintă interes. Să presupunem, de exemplu că izoptica este axa *Oy*. Ecuaţia funcţională este în acest caz:

$$p(\alpha)\sin(\omega+\alpha)-p(\omega+\alpha)\sin\alpha=0\ ,$$

sau

$$\frac{p(\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{p(\omega+\alpha)}{\sin(\omega+\alpha)}$$

Rezultă că raportul $\frac{p(\alpha)}{\sin \alpha}$ este o funcție periodică arbitrară $\varphi(\alpha)$ de perioadă $\omega$ deci soluția generală a ecuației este

$$p(\sigma) = \varphi(\alpha) \sin \alpha .$$

Dacă luăm, de exemplu funcția periodică particulară $\sin \frac{2\pi\alpha}{\omega}$ avem:

$$p(\alpha) = \sin \frac{2\pi\alpha}{\omega} \sin \alpha$$

Variind pe $\omega$ avem diverse curbe cari au ca izoptică axa $Oy$. Particularizînd de exemplu $\omega = \frac{2\pi}{3}$ avem curba înfășurată de dreapta:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha = 0 .$$

Ecuația tangențială a acestei curbe se obține, utilizînd formulele (14'); se găsește:

$$w^2 (u^2 + v^2)^2 = v^4 (3u^2 - v^2)^2 .$$

Se vede că este o curbă de clasa 8-a, avînd dreapta de la infinit ca tangentă multiplă de ordinul 6.

Este instructiv de verificat că din orice punct al axei $Oy$ se pot duce duce la curbă două tangente cari fac un unghi egal cu $\frac{2\pi}{3}$ Fie $y - \lambda = m x$ ecuația unei drepte trecînd prin punctul $(0, \lambda)$ al axei $Oy$.

Punînd condiția ca dreapta să fie tangentă la curbă, se obține ecuația:

$$\lambda^2 (m^2 + 1)^3 = (3m^2 - 1)^2 \qquad (22)$$

Condiția ca 2 direcții $m_1$, $m_2$ să facă un unghi egal cu $\frac{2\pi}{3}$ este ca:

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = -\sqrt{3}$$

de unde rezultă:

$$m_1 = \frac{m_2 - \sqrt{3}}{1 + m_2 \sqrt{3}}$$

La fiecare rădăcină $m$ a ecuației (22), va corespunde rădăcina $\frac{m - \sqrt{3}}{1 + m\sqrt{3}}$, adică va trebui ca ecuația (22) să fie invariantă prin înlocuirea lui $m$ cu $\frac{m - \sqrt{3}}{1 + m\sqrt{3}}$.

Un calcul simplu, pe care-l omitem, confirmă imediat acest lucru. Se vede din acest exemplu banal interesul pe care-l prezintă curbele de mai sus.

## ОДНО СВОЙСТВО ПЛОСКИХ КРИВЫХ

(Краткое содержание)

В этой работе рассматривается функциональное свойство плоских кривых. Известно, что место точек, через которые можно провести перпендикулярные касательные к данному конусу является кругом или прямой.

Если исследовать все кривые, обладающие этим свойством, то придём к функциональному уравнению, которое можно преобратить в уравнение прямой и решение которого может быть представлено в виде тригонометрического ряда.

## SUR UNE PROPRIÉTÉE DES COURBES PLANES

(Résumé)

Dans ce travail on étudie une propriété fonctionnelle des courbes planes ; on sait que le lieu des points par lesquels on peut mener des tangentes perpendiculaires á une coinque donnée est un cercle ou une droite.

Si l'on cherche toutes les courbes ayant cette propriété on est conduit á une équation fonctionnelle qu'on peut transformer en une équantion linéaire et dont les solutions peuvent être représentées par une série trigonométrique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

512.9

# ASUPRA SUBSTITUȚIEI OMOGRAFICE

de C. COȘNIȚĂ

Dacă se consideră relația omografică:

$$Z' = \frac{aZ+b}{cZ+d} \tag{1}$$

între variabilele complexe $Z$, $Z'$ ($a$, $b$, $c$, $d$ fiind numere complexe sau reale) se știe că această relație se poate reduce la forme canonice și anume:

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta} : \frac{Z-\alpha}{Z-\beta} = h = \frac{-a+c\beta}{-a+c\alpha} = \frac{d+c\alpha}{d+c\beta}, \tag{I}$$

unde $\alpha,\beta$ sînt rădăcinile (presupuse distincte) ale ecuației care dă punctele duble ale substituției:

$$cZ^2+(d-a)Z-b=0 \tag{2}$$

Dacă însă $\alpha=\beta$, avem forma canonică:

$$\frac{1}{Z'-\alpha} - \frac{1}{Z-\alpha} = h = \frac{2c}{d+d} \tag{II}$$

Presupunînd $c = 0$ și $d = \frac{b}{d-a}$ cînd substituția se reduce la forma $Z' = \frac{a}{a}Z + \frac{b}{d}$ avem forma canonică:

$$\frac{Z'-\alpha}{Z-\alpha} = h = \frac{d}{a} \tag{III}$$

Infine, dacă $c = 0$, d—a=0 substituția este:

$$Z'-Z = h = \frac{b}{a} \tag{IV}$$

Să presupunem că plecînd de la un punct oarecare $Z$, construim prin iteraţie, cu ajutorul lui (1), punctele $Z_1$, $Z_2$,... $Zn$. Se deduce imediat prin înmulţirea relaţiilor cari leagă doi $Z$ de indici consecutivi, relaţia:

$$\frac{Zn-\alpha}{Zn-\beta}=h^n.\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}, \qquad (I)$$

corespunzătoare cazului (I)

În mod analog, obţinem pentru cazurile (II), (III), (IV) relaţiile următoare:

$$\frac{1}{Z_n-\alpha}=\frac{1}{Z-\alpha}+nh \qquad (II')$$

$$Zn-\alpha=h^n(Z-\alpha \qquad (III')$$

$$Zn=Z+nh \qquad (IV')$$

Voi trata acum următoarea problemă de închidere:
*În ce caz poligonul iteratelor se închide după n iteraţii?* Va trebui deci ca $Zn = Z$; pentru cazurile (I), (IIII) răspunsul este imediat, avem $h^n = 1$, unde h este respectiv egal cu una din valorile indicate mai sus. În cazurile (II) şi (IV) se vede că problema nu este posibilă, căci ar trebui ca $h = 0$, lucru imposibil.

Condiţia necesară şi suficientă de închidere, pentru cazurile (I) şi (III) este deci:

$$h^n=1 \qquad (3)$$

În celelalte două cazuri poligonul iteratelor nu se închide. Dacă $\omega$ este o rădăcină de ordinul $n$ a unităţii, condiţia (3) se scrie: $h = \omega$, sau:

$$\frac{a-c\beta}{a-c\alpha}=\omega\ ,\ \text{respectiv}\ \frac{d}{a}=\omega$$

Eliminînd pe $\alpha$, $\beta$ între relaţia precedentă şi relaţiile:

$$c(\alpha+\beta)=a-d\ ;\ c\alpha\beta=-b\ , \qquad (2)$$

cari rezultă din (2), condiţiile de închidere sînt respective:

$$\delta(\omega^2+1)-\omega[(a+d)^2-2\delta]=0 \qquad (4)$$

$$\omega a-d=0 \qquad (5)$$

unde $\delta=ad-bc$ este modulul substituţiei (1), $\delta\neq 0$.

O rădăcină a ecuţiei (3) este, oricare ar fi $n$, $h = 1$; dar această rădăcină nu este acceptabilă căci conduce la condiţiile inacceptabile: $\alpha=\beta$, respetiv $a = d$.

Dacă $n$ este par, condiţia (3) admite şi rădăcina $h = -1$ care deasemenea este inacceptabilă, căci conduce la condiţia $a + d = 0$; în acest caz relaţia (1) este involutivă, poligonul se închide după 2 iteraţii. Excludem din discuţie acest caz banal. Ecuaţia (3) neavînd alte rădăcini reale, în afară de $h = \pm 1$, rezultă că $\omega$ este o rădăcină complexă de ordinul $n$ a unităţii.

Să luăm cîteva cazuri particulare.

Dacă $n = 2$, avem $h = +1$, cazuri pe care le-am exclus.

Dacă $n = 3$, avem $h = 1$ și $h^2 + h + 1 = 0$; primul caz a fost exclus, iar al doilea conduce la:

$$\left(\frac{a-c\beta}{a-c\alpha}\right)^2+\left(\frac{a-c\beta}{a-c\alpha}\right)+1=0,$$

sau ținînd seama de relațiile (2):

$$a^2+d^2+ad=bc=0 \tag{6}$$

În celalt caz, se găseste condiția:

$$a^2+d^2+ad=0, \tag{6}$$

care se deduce din precedenta făcînd $c = 0$.

Dacă $n=4$, excluzînd rădăcinile $h = \pm 1$, rămîne condiția $h^2+1=0$, respectiv:

$$a^2+d^2=0. \tag{7}$$

2. Să considerăm în mod special cazul cînd coeficienții $a$, $b$, $c$, $d$, sînt numere reale. Relația (1) se scrie:

$$\left(Z'-\frac{a}{c}\right)\left(Z+\frac{d}{c}\right)=-\frac{\delta}{c^2},\ (c\neq 0) \tag{8}$$

Partea a doua fiind reală, rezultă că numerele complexe $z'-\frac{a}{c}$, $z+\frac{d}{c}$ au argumentele egale și de semne contrare; tot din (8) mai rezultă că:

$$\left|Z'-\frac{a}{c}\right|\left|Z+\frac{d}{c}\right|=\frac{|\delta|}{c^2}=\text{constant}.$$

Deci rezultă următoarele:

*Dacă a, b, c, d, sînt reale, substituția (1) este produsul unei inversiuni I printr-o simetrie S; inversiunea I are ca pol punctul A și ca modul* $\frac{\delta}{c^2}$ *iar simetria S, are ca axă mediatoare a segmentului AB, unde A și B sînt puncte ale axei reale și avînd ca obscise respective* $-\frac{d}{c}$, $\frac{a}{c}$.

Se poate ajunge la acest rezultat și cu ajutorul coodonatelor; punînd: $Z = x + iy$; $Z' = x' + iy'$, (8) ne dă:

$$x+\frac{d}{c}=\frac{-\frac{\delta}{c^2}\left(x'-\frac{a}{c}\right)}{\left(x'-\frac{a}{c}\right)^2+y'^2}$$

$$y=\frac{\frac{\delta}{c^2}y'^2}{\left(x'-\frac{a}{c}\right)^2+y'^2}$$

De aici se deduc relaţiile:

$$\sqrt{\left(x+\frac{d}{c}\right)^2+y^2}\cdot\sqrt{\left(x'-\frac{a}{c}\right)^2+y'^2}=\frac{\delta}{c^2}$$

$$\frac{y}{x+\frac{d}{c}}=-\frac{y'}{x'-\frac{a}{c}},$$

cari conduc la aceleaşi concluzii.

Rădăcinile $\alpha$, $\beta$ ale ecuaţiei (2) pot fi în acest caz complexe, sau reale, distincte sau confundate; punctele $D_\alpha$, $D_\beta$ cari au ca afixe $\alpha$ şi $\beta$ sînt punctele duble ale substituţiei.

Dacă $\alpha$, $\beta$ sînt complexe, punctele $D_\alpha$, $D_\beta$ se află pe mediatoarea ($\Delta$) a segmentului $\overline{AB}$, *căci* $\alpha+\beta=-\frac{d}{c}+\frac{a}{c}$, simetrice faţă de axa reală; dacă $\alpha, \beta$ sînt reale, punctele $D_\alpha$, $D_\beta$ se află pe axa reală, iar segmentele $D_\alpha D_\beta$, $\overline{AB}$ au acelaş mijloc. În fine, dacă $\alpha=\beta$, cele două puncte coincid cu mijlocul lui $\overline{AB}$.

Am presupus că punctele $A$ şi $B$ sînt distincte, deci $a+d\neq 0$; dacă însă $a+d=0$, aceste puncte coincid, transformarea este involutivă şi se vede uşor că:

$$IS=SI,$$

adică produsul celor două transformări cari formează transformarea (1) este comutativ.

3. Să ne ocupăm acum de aşezarea punctelor $Z$, $Z_1$, $Z_2$,... $Z$ în plan.

Dacă $a, b, c, d$ sînt reale, iar $A$ şi $B$ distincte ($a+d\neq 0$) să luăm puntele $Z$, $Z_1$, $Z_2$ şi să ducem cercul ($\Gamma$) circumscris triunghiului format de ele; acest cerc mai tae dreapta $AZ$ în $Z'$, care este omologul lui $Z$ în raport cu $I$ şi omologul lui $Z_1$ în raport cu $S$. Centrul cercului ($\Gamma$) se află deci pe ($\Delta$) şi acest cerc este invariant faţă cu $I$, cît şi faţă cu $S$; el este un cerc invariant al transformării. Rezultă că toate punctele iterate se află pe acest cerc, deoarece trecerea de la $Z_k$ la $Z_{k+1}$ se face cu ajutorul transformărilor $I$ şi $S$, cari păstrează cercul.

Dacă punctele duble $D_\alpha, D_\beta$ se află pe axa reală, adică: $(a-d)^2+4bc\geq 0$, avem

$$\overline{AD_\alpha}\cdot\overline{AD_\beta}=\left(\alpha+\frac{d}{c}\right)\left(\beta+\frac{d}{c}\right)=\alpha\beta+\frac{d}{c}(\alpha+\beta)+\frac{d^2}{c^2},$$

$$\overline{AD_\alpha}\cdot\overline{AD_\beta}=\frac{\delta}{c^2},$$

deci cercul ($\Gamma$) trece prin $D_\alpha$, $D_\beta$.

Se arată că dacă $D_\alpha=D_\beta$, cercul este tangent la axa reală în $D_\beta$ iar dacă $D_\alpha$, $D_\beta$ se află pe dreapta ($\Delta$) ele sînt punctele limită ale cercurilor ($\Gamma$).

In rezumat, *iteratele unui punct arbitrar sînt așezate pe un cerc invariant al transformării; acest cerc trece prin punctele duble, sau are punctele duble ca puncte limită.*

Se ajunge la același rezultat și cu ajutorul relației (I'); în adevăr dacă *a, b, c, d* sînt reale, *h* este cîtul a două numere complexe conjugate, deci $|h| = 1$ și (I) dă:

$$\left|\frac{Zn-\alpha}{Zn-\beta}\right| = \left|\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\right|$$

Această relație exprimă că raportul distanțelor punctului $Zn$ la punctele duble $\alpha$, $\beta$ este constant și egal cu raportul corespunzător punctului inițial.

Se știe că în acest caz punctele iterate $Zn$ se află pe un cerc cu centrul pe dreapta $D_\alpha D_\beta$, adică pe $(\Delta)$ dacă $\alpha$, $\beta$ sînt complexe. Dacă $\alpha$, $\beta$ sînt reale, atunci *h* este real și *(I)* dă:

$$\arg\frac{Zn-\alpha}{Zn-\beta} = \arg\frac{Z-\alpha}{Z-\beta};$$

rezultă că din orice punct iterat $Zn$, cele două puncte fixe $\sigma$, $\beta$ de pe axa reală, se văd sub un unghi constant, deci iteratele se află pe un cerc trecînd prin $\alpha$, $\beta$ (sau $D_\alpha$, $D_\beta$).

Să considerăm cazul general, cînd *a, b, c, d* sînt numere complexe oarecari. Vom cerceta așezarea punctelor iterate în plan, pentru fiecare din cazurile (I'), (II'), (III'), (IV').

In cazul (I') să notăm:

$$\frac{Zn-\alpha}{Zn-\beta} = \varrho\, e^{i\theta};\quad \frac{Z-\alpha}{Z-\beta} = r_0\, e^{i\alpha_0};\quad h = r\, e^{i\alpha}, \text{ deci:}$$

$$\varrho\, e^{i\theta} = r_0\, r^n\, e^{i(\alpha_0 + n\alpha)},\quad \varrho = r_0\, r^n,\quad \theta = \alpha_0 + n\alpha.$$

Eliminînd pe *n* între aceste relații și notînd:

$$a = r_0\, r^{-\frac{\alpha_0}{\alpha}};\quad r^{\frac{1}{\alpha}} = e^m$$

avem:

$$\varrho = a\, e^{m\theta}$$

Dacă deci însemnăm prin *M* un punct iterat oarecare, aceste puncte se află pe o curbă caracterizată prin:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = a\, e^{m\cdot \widehat{AMB}}$$

In cazul (II'), avem:

$$\frac{Zn-Z}{Zn-\alpha} = n\,h\,(\alpha - Z),$$

deci :

$$\arg\left(\frac{Zn-Z}{Zn-\alpha}\right)=\arg h(\alpha-Z)=\text{constant}$$

Această relaţie exprimă că din orice punct iterat $Zn$, segmentul care uneşte punctul iniţial $Z$ cu punctul dublu $\alpha$ se vede sub acelaş unghi, deci *toate iteratele se află pe un cerc trecînd prin punctul dublu.*

În cazul (III'), mutînd prin translaţie origina în punctul $\alpha$, relaţia devine $Zn = h^n Z$. Dacă notăm :

$$Z_n=\varrho e^{i\theta}\ ;\ Z=r_0 e^{i\omega_0}\ ;\ h=re^{i\omega}\ ,$$

avem :

$$\varrho e^{i\theta}=r_0 r^n e^{i(\omega+n\omega)}\ ,\ \varrho=r_0 r^n\ ,\ \theta=\omega_0+n\omega$$

Eliminînd pe $n$ între ultimele două relaţii şi notînd :

$$r_0 r^{-\frac{\omega_0}{\omega}}=a\ ,\ r^{\frac{1}{\omega}}=e^m\ ,$$

rezultă :

$$\varrho=a e^{m\theta}\ ,$$

*deci iteratele se află în cazul (III') pe o spirală logaritmică cu polul în punctul dublu.*

În fine, în cazul (IV'), avem :

$$\arg(Zn-Z)=\arg h=\text{constant}\ ,$$

*deci iteratele se află pe o dreaptă a cărei direcţie nu depinde de punctul iniţial.*

4. Vom face cîteva consideraţii de Geometrie elementară în legătură cu problema de închidere de la început.

Am văzut că dacă $n = 3$, condiţia necesară şi suficientă de închidere este :

$$a^2+d^2+ad+bc=0\ .$$

Să regăsim această relaţii prin Geometrie. Transformarea $T$ (sîntem în cazul cînd $a, b, c, d$ sînt reale) este produsul inversiunii $I_A$ de pol $A$ şi modul $\frac{\delta}{c^2}$ prin simetria S în raport cu ($\Delta$) mediatoarea segmentului $\overline{AB}$ de pe axa reală, sau este produsul simetriei $S$ prin inversiunea $I_B$ de pol $B$ şi modul $\frac{\delta}{c^2}$, adică :

$$T=I_A\ S=SI_B\ .$$

Să considerăm punctele $Z, Z_1, Z_2, Z_3 = Z$ ; de la $Z$ trecem la $Z$ fie prin $I_A\ S$, fie prin $SI_B$ şi tot aşa de la $Z_1$ trecem la $Z_2$, de exemplu prin $SI_B$, deci $Z_2$ se află pe dreapta $B\ Z_1'$ ($Z_1'$ fiind omologul lui $Z$ în $I_A$), astfel ca : $\overline{BZ_2}\cdot\overline{BZ_1}=\frac{\delta}{c^2}$ .

De la $Z_2$ trecem la $Z_3 = Z$ prin $I_A S$; $I_A$ ne dă punctul $Z_3'$ situat pe $BZ_1$ astfel ca $\overline{AZ_2}\cdot\overline{AZ_3'} = \frac{\delta}{c^2}$ punctele $Z'_3$, $Z_3$,... , $Z$ fiind omoloage prin $S$. Din relația: $\overline{BZ_2}\cdot\overline{BZ_1'} = \overline{BZ_1}\cdot\overline{BZ_3'}$ rezultă:

$$\sphericalangle AZ_3'B = \sphericalangle BZ_1'Z_1 = \sphericalangle Z_1'BA ,$$

deci dreapta $AB$ este tangentă în $B$ cercului $BZ_2\ Z'_3$ și deci:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AZ_2}\cdot\overline{AZ_3'}, \text{ sau } \left(\frac{a+d}{c}\right)^2 = \frac{\delta}{c^2} ,$$

$$(a+d)^2 = ad - bc ,$$

$$a^2 + d^2 + ad + bc = 0 .$$

Reciproc, dacă are loc această relație, rezultă:

$$\overline{AB} = \overline{AZ}\cdot\overline{AZ_1'} = \overline{BZ_2}\cdot\overline{BZ_1'} ,$$

deci $AB$ este tangentă cercurilor $AZ_2\ Z'_1$ și $BZZ'_1$ și deci avem egalitățile de unghiuri:

$$\sphericalangle AZ_1'B = \sphericalangle Z_2\,AB = \sphericalangle ZBA$$

Punctul $N$ unde $AZ_2$ tae pe $BZ^1$ este deci simetricul lui $Z$ față cu $(\Delta)$, iar din relațiile:

$$\overline{BN}\cdot\overline{BZ_1} = \overline{AZ}\cdot\overline{AZ_1'} = \overline{BZ_2}\ \overline{BZ_1'} = \frac{\delta}{c^2}$$

reese că:

$$\sphericalangle ANB = \sphericalangle BZ_1'Z_1 = \sphericalangle ABZ_1'$$

adică $AB$ este tangentă în $B$ cercului $BZ_2N$ și deci $AZ_1$. $AN = \overline{AB}^2 = \frac{\delta}{c^2}$

Rezultă că $N = Z'_3$ și $Z_3 = Z$.

Fie $Z'_2$ omologul lui $Z$ în $I_B$; deoarece:

$$\overline{BZ}\cdot\overline{BZ_2'} = \overline{AZ_2}\cdot\overline{AZ_3'} = \frac{\delta}{c^2} \text{ și } \overline{BZ} = \overline{AZ_3'},$$

rezultă $BZ_2' = AZ_2$ adică $Z_2, Z_2'$ sînt simetrice în raport cu $(\Delta)$. Deci dela $Z$ la $Z_2$ trecem prin transformarea $T' = I_B S$, care este tocmai transformarea inversă $T^{-1}$, ceace rezultă de altfel imediat din relația $T^3 = 1$, scrisă sub forma $T^2 = T^{-1}$.

Din relațiile:

$$Z_1 = \frac{aZ+b}{cZ+d} : Z_2 = \frac{-dZ+b}{cZ-a} ,$$

rezultă :

$$Z - Z_1 = \frac{c\,Z^2 + (d-a)\,Z - b}{cZ + d},$$

$$Z - Z_\alpha = \frac{c\,Z^2 + (d-a)\,Z - b}{cZ - a},$$

$$Z_1 - Z_2 = (a+d)\,\frac{c\,Z^2 + (d-a)\,Z - b}{(cZ+d)(cZ-a)},$$

deci

$$\frac{Z - Z_1}{Z - Z_2} = \frac{Z - \frac{a}{c}}{Z + \frac{d}{c}}$$

Adică *triunghiurile* $Z\,Z_1\,Z_2$, $ZBA$ sînt direct asemenea.

5. Relaţiile (I'), (II'), (III'), (IV') ne permit să rezolvăm şi alte tipuri de probleme.

Fie $M_1\ (x_1, y_1) \ldots .\ Mn\ (x_n, y_n)$ iteratele punctului $M$ prin aplicarea omografiei (a, b, c, d) fiecăreia din cele 2 coordonate,

adică :

$$x_1 = \frac{a\,x + b}{c\,x + d},\quad y_1 = \frac{a\,y + b}{c\,y + d}, \ldots .$$

Să vedem distribuţia punctelor $M, M_1, .. Mn$ în plan ; în cazul (I'), avem relaţiile :

$$\frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta} = h^n \frac{x - \alpha}{x - \beta};\quad \frac{y_n - \alpha}{y_n - \beta} = h^n \frac{y - \alpha}{y - \beta},$$

deci

$$\frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta} : \frac{y_n - \alpha}{y_n - \beta} = \frac{x - \alpha}{x - \beta} : \frac{y - \alpha}{y - \beta},$$

deci *punctele se află pe o iperbolă echilateră.*

In cazul (II'), găsim uşor relaţia :

$$(y - x)(x_n - \alpha)(y_n - \alpha) = (x - \alpha)(y - \alpha)(y_n - x_n),$$

deci *punctele se află tot* pe o *iperbolă echilateră.*

In cazul (III') avem :

$$\frac{x_n - \alpha}{y_n - \alpha} = \frac{x - \alpha}{y - \alpha},$$

de *iteratele se află pe o dreaptă.*

In fine în cazul (IV), avem relaţia :

$$x_n - y_n = x - y\ .$$

deci *iteratele se află tot pe o dreaptă.*

In mod analog se stabilește o teoremă în spațiu: dacă $M_1$ $(x_1, y_1)$ $M$ $(x, y, z)$ .... $Mn$ $(x_n, y_n, z_n)$ *sin titeratele unui punct* $M$ $(x, y, z)$, *prin aplicarea unei omografii* $(a, b, c, d)$, *asupra fiecărei coordonate, aceste puncte sint situate fie pe o cubică echilateră strimbă, fie pe o dreaptă.*

P. S. Problema de închidere de la începutul acestei lucrări mi-a fost sugerată de Prof. *M. Ghermănescu.* Deasemenea penultima aplicație aparține tot D-sale.

## ОБ ОМОГРАФИЧЕСКОЙ ЗАМЕНЕ

(Краткое содержание)

В данной работе рассматриваются следующие вопросы:

Если $z_1$, $z_2$... $z_n$ являются повторными точки $z_0$ вследствие данного омографического замещения—в каком случае многоугольник $z_0$ $z_1$ $z_2$... $z_n$ замыкается т. е. $z_n = z_0$.

Изучается вопрос о размещении точек на поверхности и другие связанные с этим вопросы.

## SUR UNE SUBSTITUTION HOMOGRAPHIQUE

(Résumée)

Dans ce travail on résoud le probléme suivant:

Si $Z_1$, $Z_2$, . . . $Zn$ sont les iterés d'un point $Z_8$, par une substitution homographique donnée, dans quel cas le polygone $Zo$, $Z_1$ $Z_2$ . . . $Zn$ se ferme, c'est-à-dire $Zn = Zo$?

On étudie la distribution des points dans le plan et d'autres questions annexes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

512.9

# ASUPRA UNOR TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

de C. COȘNIȚA

Omotetia și inversiunea în plan (cași în spațiu) sunt transformări caracterizate prin relația:

$$\overline{OM'} \cdot \overline{OM''} = K, \tag{1}$$

unde $O$ este polul, K modulul, $M$, $M'$ două puncte omoloage colineare cu $O$, iar $n = 1$.

În cazul omotitei, tangentele în $M,M'$ la curbele omoloage sînt paralele, iar în cazul inversiunii aceste drepte sînt antiparalele față cu raza vectoare $OMM'$. Fie $m,m'$ punctele unde normalele în $M,M'$ la cele 2 curbe tae perpendiculara în $O$ pe raza vectoare. Se constată ușor prin Geometria elementară că avem, în mărime și semn, relațiile:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = \pm \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} \tag{2}$$

Vom generaliza acest rezultat, pentru transformările de tipul (1), unde $n$ este un număr rațional oarecare. Vom dovedi relația generală:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -n \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}}, \tag{3}$$

care pentru $n = \mp 1$ ne dă relațiile (2).

Amintim următoarele rezultate cunoscute din Geometria infinitezimală: Dacă o dreaptă înfășoară o curbă $(A)$, punctul de contact fiind $A$ și tae o curbă $(B)$ în punctul $B$, avem:

$$d(\overline{AB}) = \overline{ab} \cdot d\alpha \tag{4}$$

unde $a$ este centrul de curbură în $(A)$, iar $b$ este intersecția normalei în $B$ la $(B)$ cu normala în $A$ la prima curbă; în fine $\alpha$ este unghiul de contingență în $A$.

Dacă se mai ia o curbă $(C)$, pe care tangenta $AB$ o tae în $C$, avem analog:

$$d(\overline{AC}) = \overline{ac} \cdot d\alpha \tag{4'}$$

Din (4), (4′) se deduce:

$$\frac{\mathrm{d}(\overline{AB})}{\mathrm{d}(\overline{AC})} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}}. \tag{5}$$

În cazul cînd curba $(A)$ se reduce la un punct fix $O$, dreapta $BC$ devine o dreaptă care trece prin $O$; revenind la notaţiile iniţiale, vom avea:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = \frac{\mathrm{d}(OM)}{\mathrm{d}(\overline{OM})} \tag{5'}$$

Dacă relaţia dintre curbele $(M)$, $(M')$ este dată prin:

$$\overline{OM'} = f(\overline{OM}),$$

(5′) devine:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = f'(\overline{OM}). \tag{6}$$

Această relaţie fundamentală va fi utilizată în tot cursul lucrării.

În cazul transformărilor (1), avem:

$$f(\overline{OM}) = \frac{k}{\overline{OM}^n}; \quad f'(\overline{OM}) = -\frac{kn}{\overline{OM}^{n+1}},$$

deci

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -n\frac{k}{\overline{OM}^{n+1}} = -n\frac{\overline{OM'}\cdot\overline{OM}^n}{\overline{OM}^{n+1}} = -n\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}},$$

adică tocmai relaţia (3).

Dacă (x,y); (x,y′) sînt coordonatele carteziene dreptunghiulare faţă cu un sistem avînd origina $O$, avem formularele de transformare:

$$x' = K\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}; \quad y' = k\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{7}$$

$$x = k^{\frac{1}{n}}\frac{x'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{n+1}{2n}}}; \quad y = k^{\frac{1}{n}}\frac{y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{n+1}{2n}}} \tag{7}$$

cari generalizează formulele de transformare prin omotetie şi inversiune.

Construcţia grafică a tangentei în $M'$, cînd se cunoaşte tangenta în $M$, rezultă imediat din (3):

*Pe raza vectoare $0MM'$ se ia punctul $M$, astfel ca $\overline{OM}_1 = -n\overline{OM'}$. Prin $M_1$ se deduce antiparalela, faţă cu raza vectoare, la $mM$ şi se determină la intersecţia cu dreapta $(\Delta)$ (perpendiculara în $O$ pe raza vectoare) punctul căutat $m'$.*

Justificarea construcţiei nu prezintă dificultate.

2. Să considerăm transformările de tipul:

$$\overline{OM'}^p + \overline{OM}^q = k \text{ (constant)}, \tag{8}$$

$p$, $q$ fiind două numere raționale, iar $M$, $M'$ două puncte omologe coliniare cu 0.

Formulele de transformare sînt în acest caz:

$$x' = \frac{\left[k-(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}x;\ y' = \frac{\left[k-(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}y.$$

$$x = \frac{\left[k-(x'^2+y'^2)^{\frac{p}{2}}\right]^{q}}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}}x';\ y = \frac{\left[k-(x'^2+y'^2)^{\frac{p}{2}}\right]^{q}}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}}y' \tag{9'}$$

Aplicînd formula (6), găsim:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -\frac{q}{p}\cdot\frac{\overline{OM}^{q-1}}{\overline{OM'}^{p-1}} \tag{10}$$

Această formulă permite construcția tangentei în $M'$ (respectiv construcția punctului $m'$), în anumite cazuri particulare, din cari enumerăm cîteva:

Dacă $p=q=1$, avem transformarea:

$$\overline{OM'}+\overline{OM}=K, \tag{11}$$

iar (10) devine: $\dfrac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -1$

adică *punctele $m$,$m'$ sînt simetrice în raportul cu $O$.*

Transformarea se poate defini geometric astfel:

*Fie $(C)$ un cerc cu centrul $O$; unui punct $M$ îi corespunde puntcul $M'$ simetricul lui $M$ în raport cu unul din punctele unde dreapta $OM$ tae cercul $(C)$.*

Transformata unei drepte $Ax+By+C=0$ este:

$$(Ax+By-C)^2(x^2+y^2)=k^2(Ax+By)^2,$$

adică o cuartică circulară, avînd o asimptotă reală dublă paralelă cu dreapta dată, origina fiind un punct dublu.

Dacă $p=q=2$, avem transformarea:

$$\overline{OM'}^2+\overline{OM}^2=k, \tag{12}$$

iar (10) devine:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -\frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}}$$

de unde rezultă următoarea construcţie a punctului $m'$: *Antiparalela din $M$ la $M'm$, faţă cu raza vectoare, tae pe $(\Delta)$ în $m'$.*

Dacă $p = q = 3$, avem transformarea:

$$\overline{OM'^3} + \overline{OM^3} = k, \tag{13}$$

iar (10) devine:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -\frac{\overline{OM^2}}{\overline{OM'^2}},$$

de unde rezultă următoarea construcţie a punctului $m'$:

*Perpendiculara în $M'$ pe dreapta $mM'$ tae pe $(\Delta)$ în $m_1$; fie $m'_1$ simetriul lui $m_1$ faţă cu $O$.*

*Perpendiculara în $M$ pe dreapta $m'_1M$ tae pe $(\Delta)$ în punctul căutat $m'$.*

Dacă $p = q, -1$, avem transformarea:

$$\frac{1}{\overline{OM'}} + \frac{1}{\overline{OM}} = k, \tag{14}$$

iar (10) devine:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -\frac{\overline{OM'^2}}{\overline{OM^2}}$$

de unde rezultă următoarea construcţie a punctului $m'$:

*Perpendiculara în $M$ pe dreapta $mM$ tae pe $(\Delta)$ în punctul $m_1$; fie $m'$ simetricul lui $m_1$ faţă cu $O$.*

*Perpendicualra în $M'$ pe dreapta $m'_1M'$ tae pe $(\Delta)$ în $m'$.*

Dacă $\mu$ este conjugatul armonic al punctului 0 faţă cu $M$, $M'$, avem:

$$\frac{2}{\overline{O\mu}} = \frac{1}{\overline{OM'}} + \frac{1}{\overline{OM}},$$

deci $\overline{O\mu} = \frac{2}{k} =$ constant, adică $\mu$ descrie un cerc cu centrul în 0.

Transformarea poate fi deci definită şi astfel:

*Se dă un cerc cu centrul $O$; unui punct $M$ îi corespunde punctul $M'$, conjugatul armonic al lui $M$ faţă cu $O$ şi cu unul din punctele de intersecţie ale cercului cu dreapta $OM$.*

Se mai poate deduce, din cele precedente, că:

*Tangentele în $M$, $M'$, $\mu$ la curbele descrise de aceste puncte sînt concurente.*

Transformata unei drepte $Ax+By+C=0$ este:

$$(Ax+By-C)^2=k^2C^2(x^2+y^2),$$

adică o conică cu focarul $O$ și având ca directoare corespunzătoare simetrică dreptei date față cu $O$.

Tăind conica cu cercul $x^2+y^2=\frac{4}{k^2}$ se obține dreptele:

$$Ax+By+C=0\ ;\quad Ax+By-3C=0\ ,\quad \text{deci:}$$

*Fie $O$ un focar al unei conice, $(D)$ directoarea corespunzătoare, iar $(D')$ simetrica dreptei $(D)$ față cu $O$. Se deduce cercul cu centrul $O$ și trecînd prin intersecțiile conicei cu dreapta $(D')$. Tangenta într-un punct $M$ la conică tae $(D')$ în $N$; perpendiculara din $N$ pe $OM$ este tangentă la cerc.*

3. Mai general, să considerăm transformările:

$$\alpha\cdot\overline{OM'}^p+\beta\cdot\overline{OM}^q=\gamma\ , \tag{15}$$

$p$, $q$ fiind numere raționale date, iar $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ fiind constante oarecari.

Formulele de transformare sînt în acest caz:

$$x'=\frac{\left[\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{q}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}x\ ;\ y'=\frac{\left[\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{q}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}y \tag{16}$$

$$x=\frac{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{q}}}x'\ ;\ y=\frac{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{q}}}y' \tag{16'}$$

Formula (6) devine în acest caz:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}}=-\frac{q\beta}{p\alpha}\cdot\frac{\overline{OM}^{q-1}}{\overline{OM'}^{p-1}} \tag{15'}$$

care permite în anumite cazuri, construcția punctului $m'$ și deci a tangentei în $M'$.

Iată cîteva cazuri particulare:

Dacă $\alpha=-\beta=1$, $p=q=1$, avem transformarea concoidală:

$$\overline{OM'}-\overline{OM}=\text{constant}=k\ ,\quad \text{sau}\quad \overline{MM'}=k \tag{17}$$

Relația (15') devine $\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}}=1$, $m'=m$,

rezultat cunoscut (normalele în $M$, $M'$ se tae pe normala în $O$ la raza vectoare $OMM'$).

Dacă $\alpha = -\beta = 1$, $p = q = 2$, avem transformarea:

$$\overline{OM'}^2 - \overline{OM}^2 = k, \tag{18}$$

iar (15′) devine $\dfrac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OM'}}$

de unde rezultă construcţia punctului $m'$:

*Paralela din $M$ la dreapta $mM$ tae pe $(\Delta)$ în $m'$.*

Dacă $\alpha = -\beta = 1$, $p = q = 3$, avem transformarea:

$$\overline{OM'}^3 - \overline{OM}^3 = k, \tag{19}$$

iar (15′) devine:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM'}^2},$$

deci avem următoarea construcţie:

*Perpendiculara în $M'$ pe dreapta $m M'$ tae pe $(\Delta)$ în $m_1$; perpendiculara în $M$ pe $m_1 M$ tae pe $(\Delta)$ în $m'$.*

În fine, dacă $\alpha = -\beta = 1$, $p = q = -1$, avem transformarea:

$$\frac{1}{OM'} - \frac{1}{OM} = K, \tag{20}$$

iar (15′) devine:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = \frac{\overline{OM'}^2}{\overline{OM}^2}$$

de unde rezultă următoarea construcţie:

*Perpendiculară în $M$ pe dreapta $mM$ tae pe $(\Delta)$ în $m_1$; perpendiculara în $M'$ pe $m_1 M'$ tae pe $(\Delta)$ în $m'$.*

4. Transformările precedente pot fi încă generalizate; în loc să presupunem că dreapta care uneşte două puncte analoage $M$, $M$ tae printr-un punct fix, putem presupune că această dreaptă înfăşoară o curbă $(\Gamma)$ de clasa $n$.

În locul formulei (5′), avem formula:

$$\frac{\overline{am'}}{\overline{am}} = \frac{\mathrm{d}(\overline{AM'})}{\mathrm{d}(AM)} \tag{21}$$

$a$ fiind centrul de curbură în $A$ la curbura înfăşurată $(\Gamma)$, iar $M$, $M'$ fiind două puncte omoloage ca şi pînă acum ($m, m'$ sînt intersecţiile normalelor în $M$, $M'$ cu normala în $A$ la curbele respective).

Construcțiile date pentru diferitele transformări rămîn valabile și pentru transformările astfel generalizate, înlocuind punctul $O$ cu a, care acum este variabil.

Dacă, de exemplu, considerăm transformările:

$$\overline{AM'} \cdot \overline{AM}^n = K , \tag{22}$$

unde A este un punct variabil pe cercul $x^2 + y^2 = R^2$, atunci a coincide tot timpul cu punctul $O$. Un calcul pe care nu-l mai facem arată că formulele cari leagă coordonatele a două puncte anologe sînt:

$$(x'^2 + y'^2 - R^2)(x' + y^2 - R^2)^n = k^2 \tag{22'}$$

$$R^2[(x' - x)^2 + (y' - y)^2] = (x'y - y'x)^2 .$$

Aceste formule pot fi utilizate pentru a găsi transformatele a diverse curbe.

Pentru $R = 0$, regăsim transformările (1).

Construcția punctului m' se face prin relația:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -n \frac{\overline{AM'}}{\overline{AM}} .$$

Dacă considerăm transformările:

$$\alpha \cdot \overline{AM'}^p + \beta \cdot \overline{AM}^q = \gamma \tag{23}$$

curba ($\Gamma$) fiind acelaș cerc ca în cazul precedent, rezultă formulele de transformare sub formă implicită:

$$\alpha (x'^2 + y'^2 - R^2)^{\frac{p}{2}} + \beta (x^2 + y^2 - R^2)^{\frac{q}{2}} = \gamma$$

$$R^2[(x' - x)^2 + (y' - y)^2] = (x'y - y'x)^2 , \tag{23'}$$

iar construcția punctului $m'$ se face cu relația:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -\frac{q\beta}{p\alpha} \cdot \frac{\overline{AM}^{q-1}}{\overline{AM'}^{p-1}} \tag{23''}$$

Să examinăm cîteva cazuri particulare.

Dacă $\alpha = \beta = p = q = 1$, avem transformarea:

$$\overline{AM'} + \overline{AM} = \text{constant} , \tag{24}$$

$$\overline{A\mu} = \text{constant} ,$$

$\mu$ fiind mijlocul lui $MM'$.

Transformarea se poate defini și astfel:

*Se dau 2 cercuri concentrice fixe; două puncte omologe $M, M'$ se află pe o tangentă a cercului mic și sînt simetrice în raport cu unul din punctele în care dreapta $MM'$ taie cercul mare.*

Relaţia (23″) dă acum: $\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -1$,

deci *normalele în M,M′ tae normala în A la cercul de bază în 2 puncte simetrice faţă cu* O.

Dacă $\alpha = -\beta = 1$, $p = q = 1$, avem transformarea concoidală generalizată:

$$\overline{AM'} - \overline{AM} = \text{constant}, \tag{25}$$

sau

$$\overline{M'M} = \text{constant},$$

Formulele de transformare rezultă din (23′); construcţia punctului $m'$ este dată acum de $\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = 1, m' = m$, *deci normalele în M, M′ la curbele respective se tae pe normala* OA *la cerc.*

În fine, dacă $\alpha = \beta = 1$, $p = p = -1$, avem transformarea:

$$\frac{1}{\overline{AM'}} + \frac{1}{\overline{AM}} = \text{constant},$$

$$\overline{A\mu} = \text{constant},$$

$\mu$ fiind conjugatul armonic al lui *A faţă cu M, M′.*

Transformarea se poate defini geometric astfel:

*Se dau 2 cercuri concentrice fixe; două puncte M,M′ se află pe aceeaşi tangentă a cercului mic şi sînt conjugate armonic faţă cu* A *şi* $\mu$, *A fiind punctul de tangenţă al dreptei MM′ cu cercul mic, iar* $\mu$ *unul din punctele în care această drepată tae cercul mare.*

Construcţia punctului $m'$ se face prin relaţia:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = -\frac{\overline{AM'^2}}{\overline{AM^2}}$$

5. — Construcţiile indicate în exemplele de mai sus pentru tangentă caracterizează aceste transformări; să considerăm, de exemplu relaţia:

$$\frac{\overline{Om'}}{\overline{OM}} = k\frac{\overline{OM}^p}{\overline{OM}^q},$$

notaţiile fiind cele de pînă acum.

Deoarece avem: $\frac{\overline{Om'}}{\overline{Om}} = \frac{d(\overline{OM'})}{d(\overline{OM})}$, rezultă:

$$\frac{d(\overline{OM'})}{d(\overline{OM})} = k\frac{\overline{OM'}^p}{\overline{OM}^q}$$

Separînd variabilele și integrînd:

$$\frac{\overline{OM'}^{1-p}}{1-p} = k\frac{\overline{OM}^{1-q}}{1-q} + k_1,$$

adică o transformare de forma (15).

Am presupus $p \neq 1$ ; $q \neq 1$. Dacă $p = q = 1$, avem:

$$\frac{\mathrm{d}(\overline{OM'})}{\mathrm{d}(\overline{OM})} = k\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}},$$

și integrînd: $\overline{OM'} = k_1 \cdot \overline{OM}^K$,

adică transformări de tipul (1).

## О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИН ПРЕВРАЩЕНИЯХ

(Краткое содержание)

В этом труде рассматриваются с точки зрения бесконечности, некоторые геометрические преобразования, которые обобщают хорошо известные преобразования какими являются: инверсия, тождественность, и т. г.

Указываются геометрические построения касательных разных классов кривых.

## SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS GÉOMETRIQUES

(Résumé)

Dans ce travail on étudie, au point de vue infinitésimal quelques transformations géométriques qué généralisent des transformations bien connues comme: L'inversion; l'homothétie etc.

On y donne des constructions géométriques pour les tangentes à diverses classes de courbes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

# ASUPRA MULŢIMII CÎMPURILOR BISCALARE

de M. GUTMANN

1. Un cîmp biscalar (complex) definit într-un domeniu (D) tridimensional e prin definiţie, un cîmp de vectori $\mathbf{v} = \mathbf{v}(M)$ $(M \epsilon D)$, pentru care

$$\mathbf{v} = \varphi \cdot \nabla \psi \quad *) \tag{1}$$

sau

$$\mathbf{v} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{v} \equiv 0 \tag{2}$$

şi unde $\varphi$, $\psi$ sînt funcţii complexe de punctul $M$, iar

$$\nabla \psi = \nabla R\psi + i \nabla I\psi$$

2. Mulţimea cîmpurilor biscalare $(\overset{\vee}{\mathcal{B}})$ nu formează un spaţiu vectorial, întrucît suma a două cîmpuri biscalare nu este totdeauna un cîmp biscalar, în opoziţie cu mulţimea cîmpurilor irotaţionale $(\mathcal{G})$ sau solenoidale $(\mathcal{R})$ care sînt subspaţii vectoriale ale lui $\overrightarrow{E_3}$ (complex); ne propunem să vedem în ce condiţii suma a două cîmpuri biscalare este încă un cîmp biscalar; avem

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \epsilon \overset{\vee}{\mathcal{B}} : \mathbf{v}_1 = \varphi_1 \nabla \psi_1 \quad \text{şi} \quad \mathbf{v}_2 = \varphi_2 \nabla \psi_2 \tag{3}$$

de unde pentru ca suma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ să fie conţinută în $\mathcal{B}$, rezultă că e necesar şi suficient ca $\mathbf{v} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{v} \equiv 0$; însă cum $\mathbf{v} = \varphi_1 \nabla \psi_1 + \varphi_2 \nabla \psi_2$ (4) rezultă că

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \nabla \varphi_1 \times \nabla \psi_1 + \nabla \varphi_2 \times \nabla \psi_2 \tag{5}$$

şi deci

$$\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \varphi_2 \nabla \varphi_1 \nabla \psi_1 \nabla \psi_2 - \varphi_1 \nabla \varphi_2 \nabla \psi_1 \nabla \psi_2 \tag{6}$$

sau

$$\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\mathbf{v} = -\varphi_1^2 \left( \nabla \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \nabla \psi_1, \nabla \psi_2 \right) \tag{7}$$

*) Vezi observaţiile dela punctele 8 şi 9.

Din relația (7) rezultă că, pentru ca $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ să fie biscalar e necesar și suficient ca

$$\left( \nabla \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \nabla \psi_1, \nabla \psi_2 \right) = \frac{D\left( \frac{\varphi_2}{\psi_1}, \psi_1, \psi_2 \right)}{D(x, y, z)} = 0$$

adică

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = F(\psi_1, \psi_2) \tag{3}$$

adică raportul coeficienților $\varphi_1$ și $\varphi_2$ trebuie să depindă numai de suprafețele ortogonale ($\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = C_2$) cîmpurilor $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$.

De asemenea, dacă $\lambda = \lambda(M)$ este o funcție complexă, derivabilă pe $(D)$, atunci

$$\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v} \in \overset{\vee}{\mathcal{B}} \quad , \quad \text{dacă} \quad \mathbf{v} \ni \overset{\vee}{\mathcal{B}} \tag{9}$$

căci dacă

$$\mathbf{v} = \varphi \bigtriangledown \psi, \text{ atunci } \mathbf{v}_1 = \varphi_1 \bigtriangledown \psi_1 \quad (\varphi_1 = \lambda \varphi \, , \, \psi_1 = \psi)$$

3. Se poate spune așadar că mulțimea cîmpurilor biscalare formează un *cuasi-spațiu vectorial*, adică o mulțime în care numai anumite perechi se pot însuma, suma fiind însă asociativă, elementul nul fiind $\mathbf{v}=0$ și inversul aditiv fiind $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}$ care, evident, sînt biscalare; așadar $\overset{\vee}{\mathcal{B}}$ formează față de adunarea vectorială un cuasigrup, iar produsul $\lambda \mathbf{v}$ este asociativ față de scalari, distributiv față de suma scalară și vectorială, iar pentru $\lambda = 1$, $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$. Mulțimea $(\overset{\vee}{\mathcal{B}})$ organizată în acest mod se zice că formează un cuasi-spațiu vectorial, „subspațiu" al lui $\overrightarrow{E_3}$ și conținînd mulțimea $(\mathcal{G})$ ca subspațiu vectorial:

$$\mathcal{G} \subset \overset{\vee}{\mathcal{B}} \subset \overrightarrow{E_3} \tag{10}$$

4. De asemenea, dacă definim pe $\overset{\vee}{\mathcal{B}}$ o normă, cît și convergența, prin

$$\| \mathbf{v} \| = | \varphi | \cdot | \bigtriangledown \varphi | = | \varphi | \cdot \left[ (\bigtriangledown \mathcal{R} \psi)^2 + (\bigtriangledown I \psi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

și $$\lim_{n \to \infty} \mathbf{v}_n = \mathbf{v} \quad , \quad \text{dacă} \quad \| \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \| < \varepsilon \quad {}_n > N(\varepsilon) \tag{12}$$

atunci spunem că $\overset{\vee}{\mathcal{B}}$ formează un *cuasi-spațiu Banach.*

5. Cuasi-spațiul vectorial $\overset{\vee}{\mathcal{B}}$ conține subspații Banach $(B)$ determinate printr-o pereche de suprafețe $\psi_1 = C_1, \psi_2 = C_2$ și de un cîmp de scalari $\varphi_1$; avem

$$B = B[\psi_1, \psi_2 ; \varphi_1] = E(\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = F(\psi_1, \psi_2)\, \varphi_1 \cdot \bigtriangledown \psi_2) \tag{13}$$

unde $F$ este o funcțiune definită pe $D$ și derivabilă.

6. O altă proprietate a unor subcuasi-spații Banach ale lui $\overset{\vee}{\mathcal{B}}$ este aceea că există asemenea subcuasi-spații ale căror elemente sînt potențiali vectori pentru un cîmp solenoidat dat (și care determină subcuasi-spațiul asociat).

Ne vom folosi de proprietatea că *orice cîmp solenoidal* se poate scrie într-o infinitate de moduri ca un produs vectorial de cîmpuri irotaționale:

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi \times \nabla\psi \quad **) \qquad (14);$$

cum $\mathbf{v}$ este un cîmp de rotori, punînd în evidență un rotor în relația (14), avem

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\varphi \nabla\psi) \quad \text{sau} \quad \mathbf{v} = \nabla \times (-\psi \nabla\varphi) \qquad (15);$$

de aici rezultă că

$$\mathbf{w}_1 = \varphi \nabla\psi + \nabla\varphi_1 \qquad (16)$$

sau

$$\mathbf{w}_2 = -\psi \nabla\varphi + \nabla\varphi_2 \qquad (17)$$

[unde $\varphi_1$ și $\varphi_2$ sînt scalari arbitrari-derivabili în (D).], reprezintă o familie de potențiali vectori ai lui $\mathbf{v}$.

7. Proprietăți analoage se pot stabili și pentru cîmpurile irotaționale, solenoidale, biscalare de speța 1, 2, prin introducerea operatorilor asociați $\nabla_1$ și $\nabla_2$:

$$\nabla_1 = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{r}^{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad \nabla_2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{r}^{\alpha+2} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left( \nabla_0 = \nabla = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{r}_\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right) \qquad (18)$$

unde $u^\alpha$ sînt coordonate curbilinii, iar $\mathbf{r}^\alpha$ sînt reciprocii lui $\mathbf{r}_\alpha = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}$

[$\alpha = 1, 2, 3$; avem de asemenea de observat că $\mathbf{r}^\alpha = \mathbf{r}^\beta$, dacă $\alpha \equiv \beta \pmod 3$]

Avem atunci respectiv:

$$\nabla_1 \times \mathbf{v} \equiv 0 \quad , \quad \nabla_2 \times \mathbf{v} \equiv 0$$

$\mathbf{v} \cdot (\nabla_1 \times \mathbf{v}) \equiv 0$, $\mathbf{v} \cdot (\nabla_2 \times \mathbf{v}) \equiv 0$ ; toate aceste definiții conduc la proprietăți analoage cu cele precedente, ce se demonstrează prin simpla permutare a operatorilor ce intervin în demonstrații.

De remarcat că operatorul scalar

$$\mathcal{D} = \nabla_0 \nabla_1 \nabla_2 \qquad (19)$$

reprezintă o extensiune în coordonate curbilinii *oarecari* a operatorului lui Devisme, căci pentru $u^\alpha = x, y, z$ ($\alpha = 1, 2, 3$) avem

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} = \sum \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3}{\partial x, \partial y, \partial z} \qquad (20)$$

**) Vezi observația dela punctul 10.

8. *Suficiența condiției* $\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v} \equiv 0$, pentru ca $\mathbf{v}$ *să fie biscalar* este deobiceiu demonstrată analitic ; deși suprafețele de vîrtej **ale lui** $\mathbf{v}$ sînt puse în legătură cu existența suprafețelor ortogonale lui $\mathbf{v}$, spre exemplu prin metoda lui Bertrand, totuși o demonstrație intrinsecă, vectorială a suficienței condiției nu a fost încă dată, în opoziție cu necesitatea condiției, care e evidentă ; vom da de aceea, o demonstrație vectorială directă, care este de altfel mult mai scurtă decît demonstrațiile analitice.

Fie $\mathbf{v} \cdot \mathbf{dr} = 0$ ecuația suprafețelor ortogonale lui $\mathbf{v}$, unde $\mathbf{v} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{v} \equiv 0$; să arătăm că ecuația $\mathbf{v} \cdot \mathbf{dr} = 0$ este complet integrabilă. Observăm că $\mathbf{rotv}$ și $\mathbf{dr}$ sînt ambii *ortogonali lui* $\mathbf{v}$, deci suprafețele integrale *dacă există*, sînt în legătură cu poziția lui $\mathbf{rotv}$. Să considerăm atunci direcțiile lui $\mathbf{rotv}$ date de ecuația liniilor sale de cîmp

$$\mathbf{rotv} \times \mathbf{dr} = 0 \tag{21}$$

cu integralele prime

$$\varphi_1 = C_1 \quad , \quad \varphi_2 = C_2 \tag{22}$$

Dar $\mathbf{rotv}$ fiind tangent intersecției suprafețelor $(\varphi_1 = c_1)$ și $(\varphi_2 = c_2)$, rezultă că este ortogonal lui $\mathbf{grad}\,\varphi_1$ și $\mathbf{grad}\,\varphi_2$ în $M$, după cum rezultă și din definiția integralelor prime.

Avem atunci relațiile

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{grad}\,\varphi_1 \cdot \mathbf{rotv} = 0 \\ \mathbf{grad}\,\varphi_2 \cdot \mathbf{rotv} = 0 \end{array} \right. \tag{23};$$

cum

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{rotv} \equiv 0 \tag{24},$$

rezultă că: sau

$$A \cdot \qquad \mathbf{rotv} \equiv 0$$

sau

$$B \cdot \qquad \mathbf{v}\,,\ \mathbf{grad}\,\varphi_1\,,\ \mathbf{grad}\,\varphi_2 \text{ sînt coplanari};$$

A. Dacă $\mathbf{rotv} \equiv 0$, atunci $\mathbf{v} =$ irotațional $= \mathbf{grad}\,\psi$ (suprafețele ortogonale sînt suprafețele echipotențiale).

B. Dacă $\mathbf{v}$, $\mathbf{grad}\,\varphi_1$ , $\mathbf{grad}\,\varphi_2$ sînt coplanari, atunci

$$\mathbf{v} = \lambda_1\,\mathbf{grad}\,\varphi_1 + \lambda_2\,\mathbf{grad}\,\varphi_2 \tag{25},$$

unde $\lambda_1(M)$ și $\lambda_2(M)$ sînt determinați, (căci $\mathbf{v}$ și deci $\varphi_1$ și $\varphi_2$ sînt cunoscuți) ·

Ecuația $\mathbf{v}\,\mathbf{dr} = 0$ devine atunci $\mathbf{v}\,\mathbf{dr} = \lambda_1\,\mathrm{d}\,\varphi_1 + \lambda_2\,\mathrm{d}\varphi_2 = 0$ (16)

iar condiția $\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v} \equiv 0$ devine :

$$\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v} \equiv (\lambda_1 \nabla \varphi_1 + \lambda_2 \nabla\varphi_2) \cdot (\nabla\lambda_1 \times \nabla\psi_1 + \nabla\lambda_2 \times \nabla\varphi_2) \equiv 0 \tag{27}$$

sau

$$\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v} \equiv \lambda_1 \nabla\varphi_1\ \nabla\lambda_2\ \nabla\varphi_2 + \lambda_2 \nabla\varphi_2\ \nabla\lambda_1\ \nabla\varphi_1 = 0 \tag{28}$$

adică

$$\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v} \equiv \lambda_2^2 \left( \nabla \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,,\ \nabla\ \varphi_1\,,\ \nabla\varphi_2 \right) \equiv 0 \quad (\lambda_2 \neq 0) \tag{29};$$

rezultă că expresia $\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ este proporțională cu determinantul funcțional al funcțiilor $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, astfel că avem

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = F(\varphi_1, \varphi_2) \tag{30}$$

(A se vedea și compunerea aditivă a cîmpurilor biscalare);

În aceste condiții, ecuația (26) se scrie

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,\mathrm{d}\varphi_1 + \mathrm{d}\,\varphi_2 = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}\,\varphi_2}{\mathrm{d}\,\varphi_1} + F(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \tag{31}$$

care se integrează întotdeauna și care dă integrala primă unică

$$\psi(\varphi_1, \varphi_2) = C \tag{32}$$

Dacă $\lambda_2 = 0$, ecuația devine $\lambda_1\,\mathrm{d}\varphi_1 = 0$, $\varphi_1 = t^t$, iar $\mathbf{v} = \lambda_1 \nabla \varphi$ (biscalar).

Dacă $\lambda_2 \neq 0$, atunci forma lui $\mathbf{v}$ este:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \nabla \varphi_1 + \lambda_2 \nabla \varphi_2 = \lambda_2 \left[ F(\varphi_1, \varphi_2) \nabla \varphi_1 + \nabla \varphi_2 \right] \tag{33};$$

Cum $\psi = C$ (ecuația 32) reprezintă integrala ecuației (31), avem

$$F\,\mathrm{d}\,\varphi_1 + \mathrm{d}\,\varphi_2 \equiv \lambda_3\,\mathrm{d}\,\psi \tag{34}$$

$\lambda_3$ fiind un multiplicator care există totdeauna; această identitate (34) în $\varphi_1$ și $\varphi_2$ se mai scrie

$$F(\varphi_1, \varphi_2) \nabla \varphi_1 + \nabla \varphi_2 \equiv \lambda_3 \nabla \psi \tag{35}$$

astfel că $\mathbf{v}$ dat de (33) devine:

$$\mathbf{v} = \lambda_2, \lambda_3 \nabla \psi = \varphi \nabla \psi \qquad (\varphi_M = \lambda_2 \lambda_3) \tag{36}$$

adică aceiași concluzie ca și în cazul $\lambda_2 = 0$.

9. O altă problemă în legătură cu teoria cîmpurilor biscalare (sau care admit suprafețe ortogonale: $\varphi = \text{const}$ $\mathbf{v} \parallel \nabla \psi$, $\mathbf{v} = \varphi \nabla \psi$), este semnificația ecuației

$$f(M) = \mathbf{v} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0 \tag{37}$$

în cazul cînd $\mathbf{v}$ nu este biscalar.

Vom arăta că în ansamblul suprafețelor $f(M) = 0$ (ce reprezintă suprafețe izolate) se poate afla atît o suprafață ortogonală lui $v$ (suprafață de altfel excepțională) cît și o suprafață ortogonală lui rot $\mathbf{v}$, deci tangentă lui $\mathbf{v}$; deasemenea pot fi suprafețe de ambele categorii sau din niciuna; pentru a vedea că suprafața (sau ansamblul de suprafețe)

$f(M) = 0$ nu reprezintă numai anumite situații față de $v$ — infirmînd astfel o eventuală teoremă —, vom da cîteva contra-exemple:

9 A. Fie $$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} f_k\,(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{A}_k \tag{38}$$

unde $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{A}_k$ = constante, iar $f_k\ (t)$ = funcții arbitrare-derivabile.

Avem

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \sum_k \dot{f}_k\,\mathbf{a}_k \times \mathbf{A}_k \tag{39}$$

iar

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{v} = \sum_{\alpha,\beta} \dot{f}_\alpha\, f_\beta\,(\mathbf{a}_\alpha\,\mathbf{A}_\alpha\,\mathbf{A}_\beta) \tag{40}$$

Pentru 2 factori, spre exemplu, avem

$$f\,(M) = \dot{f}_1\, f_2\,(\mathbf{a}_1\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2) = 0$$

Suprafața $f_2 = 0$, *de normală* $\mathbf{n}_2 = \mathbf{a}_2$ dă:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v} = f_1\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \operatorname{rot}\mathbf{v} = \dot{f}_1\,\mathbf{a}_1\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{a}_2 \end{cases} \tag{41}$$

expresii care de obiceiu nu sînt nule. Dacă $\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{A}_1$ sînt coplanari, iar $\mathbf{A}_1 \perp \mathbf{a}_2$ atunci $f_2, = 0$ este o suprafață excepțională simultan ortogonală atît lui $\mathbf{v}$ cît și lui rot $\mathbf{v}$.

9 B. Fie cîmpul $$\mathbf{v} = (\mathbf{a}\,\mathbf{r})^2\,\mathbf{b} + (\mathbf{b}\,\mathbf{r})^2\,\mathbf{c} \tag{42}$$

unde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sînt constante.

Avem

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\,(\mathbf{ar})\;\mathbf{a} \times \mathbf{b} + 2\,(\mathbf{br})\;\mathbf{b} \times \mathbf{c} \tag{43}$$

și

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\,(\mathbf{ar})\;(\mathbf{br})^2\,\mathbf{abc} = f\,(M) \tag{44}$$

Dacă $(\mathbf{abc}) = 0$, atunci $\mathbf{v}$ = biscalar

Dacă $\mathbf{ar} = 0$, atunci $\mathbf{v} \perp \operatorname{rot}\mathbf{v}$

Normala la plan este dată de $\mathbf{n}_1 = \mathbf{a}$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{br})^2\,\mathbf{ac}$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\,(\mathbf{br})\,\mathbf{abc} \neq 0$$

Deci pentru $\mathbf{ac} = 0$, planul $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 0$ este o suprafață de cîmp a lui $\mathbf{v}$ deci ortogonală lui $\mathbf{rot v}$.

Dacă $\mathbf{br} = 0$, atunci $\mathbf{n}_2 = \mathbf{b}$, iar

$$\mathbf{n}_2 \, \mathbf{v} = (\mathbf{ar})^2 \mathbf{b}^2 \neq 0$$

$\mathbf{n}_2 \, \mathrm{rot}\mathbf{v} = 0$, deci planul $\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} =$ este o suprafață de vîrtej, deci ortogonală lui $\mathbf{v}$.

9C. Cîmpurile $\mathbf{v}$ si $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ $(\lambda \neq 0)$ sînt simultan biscalare, căci

$$\mathrm{rot}\mathbf{w} = \nabla\lambda \times \mathbf{v} + \lambda \, \mathrm{rot}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{w} = \lambda^2 \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{rot}\mathbf{v} \tag{45}$$

Să luăm

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{|\mathbf{v} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{v}|}} = \lambda(M) \tag{46}$$

$$(\mathbf{v} \, \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \not\equiv 0) \, ;$$

atunci

$$\mathbf{w} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{w} = \frac{c^2}{|\mathbf{v} \, \mathrm{rot}\, \mathbf{v}|} \mathbf{v} \, \mathrm{rot}\, \mathbf{v} = c^2 \, \mathrm{semn}\, (\mathbf{v} \, \mathrm{rot}\, \mathbf{v}) \neq 0 \tag{47}$$

Deasemenea, dacă $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ este o suprafață arbitrară atunci luînd

$$\lambda = \frac{\varphi(\mathbf{r})}{\sqrt{|\mathbf{v} \, \mathrm{rot}\mathbf{v}|}} \tag{48}$$

putem introduce suprafața $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ printre suprafețele date de $f = 0$, căci

$$\mathbf{w} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{w} = \varphi^2(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{semn}\, (\mathbf{v} \, \mathrm{rot}\, \mathbf{v})$$

10. Orice cîmp solenoidal $(\mathbf{v})$ se reprezintă într-o infinitate de moduri ca un produs vectorial de cîmpuri irotaționale, perechile de potențiali relativi la două descompuneri fiind în corespondență areolară.

În adevăr, dacă $\mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0$ și dacă

$$\mathbf{v} = \lambda \, \nabla\varphi_1 \times \nabla\varphi_2 \tag{49}$$

(unde $\lambda = \lambda(M)$, $\varphi_1 = c_1$ și $\varphi_2 = c_2$ sînt liniile de cîmp ale lui $\mathbf{v}$) este descompunerea lui $(\mathbf{v})$ relativă la liniile sale de cîmp, atunci

$$\mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 = (\nabla\lambda \;\; \nabla\varphi_1 \;\; \nabla\varphi_2) = \frac{D(\lambda, \varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y, z)} = 0 \tag{50}$$

și deci

$$\lambda = F(\varphi_1, \varphi_2) \tag{51}$$

Cîmpul $\mathbf{v}$ se scrie $\mathbf{v} = F(\varphi_1, \varphi_2) \, \nabla\varphi_1 \times \nabla\varphi_2$ (52)

sau încă

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1} \nabla\varphi_1 \times \nabla\varphi_2 = \nabla\varphi \times \nabla\varphi_2 \tag{53}$$

dacă punem

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_1}, \text{ adică } \varphi = \varphi(\varphi_1, \varphi_2) = \int_a^{\varphi_1} F(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 + G(\varphi_2),$$

unde G = arbitrar.

Un calcul analog, dar relativ la $\varphi_2$, conduce la:

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2}, \psi = \psi(\varphi_1, \varphi_2) = \int_b^{\varphi_2} F(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_2 + H(\varphi_1),$$

unde $H$ = arbitrar; atunci $\mathbf{v}$ se poate scrie:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2} \nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2 = \nabla \varphi_1 \times \nabla \psi. \tag{54}$$

Pentru a stabili acum partea din teoremă, relativă la legătura dintre potențialii $(F_1, F_2)$ și $(G_1, G_2)$, vom scrie invarianța lui $\mathbf{v}$, relativă la schimbarea potențialilor; avem

$$\mathbf{v} = \nabla F_1 \times \nabla F_2 = \nabla G_1 \times \nabla G_2 \tag{55}$$

unde

$$\begin{cases} G_1 = G_1(F_1, F_2) \\ G_2 = G_2(F_1, F_2) \end{cases} \tag{56}$$

căci din (55) rezultă

$$\begin{cases} \nabla G_1 \cdot \mathbf{v} = (\nabla G_1 \nabla F_1 \nabla F_2) \equiv (\nabla G_1 \nabla G_1 \nabla G_2) \equiv 0 \\ \nabla G_2 \cdot \mathbf{v} = (\nabla G_2 \nabla F_1 \nabla F_2) \equiv (\nabla G_2 \nabla G_1 \nabla G_2) \equiv 0 \end{cases} \tag{57}$$

Înlocuind $G_1$ și $G_2$ din (56) în (55), se obține

$$\mathbf{v} = \left[\frac{\partial G_1}{\partial F_1} \nabla F_1 + \frac{\partial G_1}{\partial F_2} \nabla F_2\right] \times \left[\frac{\partial G_2}{\partial F_1} \nabla F_1 + \frac{\partial G_2}{\partial F_2} \nabla F_2\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial G_1}{\partial F_1} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial F_2} - \frac{\partial G_1}{\partial F_2} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial F_1}\right] \nabla F_1 \times \nabla F_2 \tag{58}$$

sau încă

$$\mathbf{v} = \frac{D(G_1, G_2)}{D(F_1, F_2)} \nabla F_1 \times \nabla F_2 \tag{59}$$

Comparînd cu (55), reiese că

$$\frac{D(G_1, G_2)}{D(F_1, F_2)} = 1 \tag{60}$$

Așadar perechile de potențiali reprezintă o schimbare de variabile cu *aria ca invariant* (în trecerea de la sistemul $F_1$, $F_2$ la sistemul $G_1, G_2$): fiecare transformare *areolară* reprezintă o pereche echivalentă de potențiali, dînd deci naștere aceluiaș cîmp.

## О МНОЖЕСТВЕ ДВУХ-СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

(Краткое содержание)

Указывается необходимое и достаточное условие для того, чтобы совокупность бискалярных полей образовали полное, векториальное и нормированное пространство, т. е. гространство Банаха. Совокупность бискалярных полей является примером т. н. пространства Банаха, определение и некоторые свойства которого были даны в связи с подпространствами Банаха относительно соленоидальных полей и некоторых операторов связанных с ними.

Далее дается прямое векторное доказательство достаточности условий $\mathbf{V}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{V} \equiv 0$, для которого $\mathbf{V}$ будет бискалярным. Изучается также положение плоскости $f(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{V}\ \mathrm{rot} = 0$ по отношению к $\mathbf{V}$ и roto, для тех случаев, когда условия интегрируемости $\mathbf{V}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v} \equiv 0$ не проверены идентично.

## SUR L'ENSEMBLE DES CHAMPS BISCALAIRES

(Résumé)

On démontre la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble (B) de champs biscalaires forme un espace vectoriel, normé, complet, c'est à dire un espace de Banach. L'ensemble des champs biscalaires $\overset{v}{(B)}$ est un exemple de *quasi-espace de Banach,* dont on donne la définition et quelques propriétés en liaison avec le sousespace Banach des champs solénoïdaux et avec quelques opérateurs qui s'y rattachent.

On donne ensuite une démonstration directement vectorielle pour la *suffisance* de la condition $\mathbf{v} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{v} \equiv 0$, pour que v soit biscalaire ; on étudie aussi la situation des surfaces $f(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = 0$ par rapport à $\mathbf{v}$ et à $\mathrm{rot}\mathbf{v}$, dans le cas oú la condition d'intégrabilité $\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\mathbf{v} \equiv 0$ n'est pas vérifiée identiquement.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

# CÎTEVA FORMULE STOKIENE

de M. GUTMANN

1. Există o clasă de probleme de teoria electromagnetismului și mecanica fluidelor în care intervin integrale vectoriale relative la două cîmpuri și anume, integrale de forma

$$\oint_c \mathbf{u}(\mathbf{v}\,d\mathbf{r}) \quad \text{și} \quad \oint_c \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times d\mathbf{r}) \qquad (1),\ (2)$$

$$\oint_s \mathbf{u}(\mathbf{v}\,d\mathbf{S}) \quad \text{și} \quad \oint_s \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times d\mathbf{S}) \qquad (3),\ (4)$$

(și unde $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ sînt cîmpuri diferențiabile); deasemenea intervin integrale de forma

$$\oint_c \varphi\, d\mathbf{r} \quad \text{și} \quad \oint_c \mathbf{v}\times d\mathbf{r} \qquad (5),\ (6)$$

analoage integralelor de suprafață ce intervin în formulele gradientului și rotorului.

Stabilirea unor formule pentru calculul acestor integrale are evident un interes practic, de calcul și deaceea pentru stabilirea lor ne putem referi fie la definiția acestor integrale — în condiții suficient de restrictive, dar uzuale — fie la formulele lui Stokes și Ostrogradski; de observat că formulele relative la expresiile (1), (2), respectiv (3), (4) sînt *echivalente* cu formulele lui Stokes și Ostrogradski.

2. Fie

$$\mathbf{R}=\oint_c \mathbf{u}(\mathbf{v}\,d\mathbf{r}) \qquad (7)$$

unde $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ sînt cîmpuri oarecari, dar cu derivate parțiale continue, iar C o curbă oarecare rectificabilă, închisă.

Dacă $\mathbf{c}$ este un vector constant, atunci aplicînd formula integrală a lui Stokes (scalară), integralei scalare $\mathbf{c}\cdot\mathbf{R}$, se obține

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{R}=\oint_c (\mathbf{c}\mathbf{u})\,\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_s \operatorname{rot}\,[(\mathbf{c}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}]\cdot d\mathbf{S} \qquad (8)$$

unde $d\mathbf{S}=\mathbf{n}\cdot dA$ este elementul de suprafață relativ la (S)

Avem însă

$$(\nabla\cdot\mathbf{c}\mathbf{u})\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{v}\times\mathbf{n}\cdot\nabla(\mathbf{c}\mathbf{u})=\mathbf{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{n}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} \qquad (9)$$

astfel că

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{R}=\int_s\left[(\nabla\cdot\mathbf{c}\mathbf{u})\times\mathbf{v}+\mathbf{c}\mathbf{u}\cdot\nabla\times\mathbf{v}\right]\mathbf{n}\,dA \qquad (10)$$

devine

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{R}=\int_s\left[\mathbf{c}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\lambda}+\mathbf{c}\mathbf{u}\,(\mathbf{n}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v})\right]dA \tag{11},$$

unde s-a pus

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{n}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\lambda}\ \text{(operator de derivare relativ la } \mathbf{v}\times\mathbf{n}).$$

Dar vectorul $\mathbf{c}$ e constant și de orientare arbitrară, astfel că rezultă din relația (11).

$$\mathbf{R}=\int_s\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\lambda}+\mathbf{u}\,(\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\ \mathbf{v})\right]dA \tag{12}$$

(căci din $\mathbf{c}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{c}\cdot\overline{\mathcal{R}}$, pentru orice $\mathbf{c}$, rezultă $\mathbf{R}=\overline{\mathcal{R}}$).

3. In cazul particular $\mathbf{u}=\mathbf{a}$ = const., rezultă formula lui Stokes:

$$\oint_c\cdot\mathbf{a}\,(\mathbf{v}\,d\mathbf{r})=\int_s\mathbf{a}\,(\mathbf{n}\cdot\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v})\,dA \tag{13}$$

căci se poate elimina vectorul constant arbitrar $\mathbf{a}$ din relația (13) $\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\lambda}\equiv 0\right)$.

4. Dacă $\mathbf{v}$ este irotațional, atunci identitatea de la (12) devine

$$\oint_c\mathbf{u}\,(\mathbf{v}\,d\mathbf{r})=\int_s(\mathbf{v}\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{u}\,dA \tag{14}$$

5. Avem deasemenea și identitatea vectorială

$$\oint_c\sum_{k=1}^{n}\mathbf{u}_k\,(\mathbf{v}_k\,d\mathbf{r})=\int_s\sum_{k=1}^{n}\left[(\mathbf{v}_k\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{u}_k+\mathbf{u}_k\,(\mathbf{n}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v}_k)\right]dA \tag{15}$$

unde $\mathbf{u}_k$ și $\mathbf{v}_k$ sînt cîmpuri oarecari, cu derivate parțiale continue, (C) o curbă oarecare rectificabilă, închisă, frontieră a lui (S), suprafață măsurabilă, de normală cu variație continuă. Relația (15) este o consecință a relației (12) și a proprietății de aditivitate a ntegralei relativă la elementele de integrat.

6. Fie acum

$$\mathbf{R}=\oint_c\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times d\mathbf{r}) \tag{16}$$

unde $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$, satisfac aceleași condițiuni ca și la punctul (2).

Avem

$$\mathbf{R}=\oint_c\mathbf{v}\,(\mathbf{u}\,d\mathbf{r})-\oint_c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,d\mathbf{r} \tag{17}$$

astfel că, ținînd seama de relația (12),

$$\oint_c\mathbf{v}\,(\mathbf{u}\,d\mathbf{r})-\int_s[(\mathbf{u}\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{v}+\mathbf{v}\,(\mathbf{n}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u})]\,dA \tag{18}$$

În privința integralei $\oint_c (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{dr}$ vom folosi și o „formulă a gradientului" pentru integrale curbilinii*)

$$\oint_c \varphi\,\mathbf{dr} = \int_s \mathbf{dS}\times \operatorname{grad}\varphi \qquad (19);$$

astfel că rezultă pentru $\mathbf{R}$ definit de relația (16):

$$\mathbf{R} = \oint_c \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{dr}) = \int_s [(\mathbf{u}\,\mathbf{n}\,\nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{u}) + \operatorname{grad}(\mathbf{u}\mathbf{v})\times\mathbf{n}]\,dA \qquad (20)$$

7. Un caz particular, important în aplicații, este acela în care $\mathbf{u}$ este un cîmp biscalar, iar (S) este o suprafață ortogonală lui $\mathbf{u}$.

Avem atunci $\mathbf{u}\times\mathbf{n}=0$ și $\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}\equiv 0$,

astfel că

$$\oint_c \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{dr}) = -\oint_c \varphi\,(\operatorname{grad}\psi\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{dr} \qquad (21)$$

întrucît $\mathbf{u}$ fiind biscalar, are forma $\mathbf{u}=\varphi\cdot\operatorname{grad}\varphi$.

8. În privința integralei $\oint_c \mathbf{v}\times\mathbf{dr}$, avem

$$\oint_c \mathbf{v}\times\mathbf{dr} = \int_s \left[\mathbf{n}\cdot\operatorname{div}\mathbf{v} + \operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{n} - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial n}\right] dA \qquad (22)$$

unde C = fr.S, $\mathbf{n}\,dA = \mathbf{dS}$ este elementul de suprafață, cît și

$$\oint_c \mathbf{v}\times\mathbf{dr} = \int_s \left[\bar{\alpha}\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\beta} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\alpha}\times\bar{\beta}\right] dA \qquad (23)$$

cu $\mathbf{n}=\bar{\alpha}\times\bar{\beta}$, $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}=\bar{\alpha}\nabla$, $\dfrac{\partial}{\partial\beta}=\bar{\beta}\cdot\nabla$

Astfel, pentru relația (23), putem să folosim relația (20) unde $\mathbf{u}=\mathbf{c}=$ const.; o simplă desvoltare a relației (20), dă

$$\mathbf{c}\times\left[\oint_c \mathbf{v}\times\mathbf{dr}\right] = \int_s \left[(\mathbf{cn}\,\nabla)\,\mathbf{v} + (\nabla\,\mathbf{cv})\times\mathbf{n}\right] dA = \int_s \left[\mathbf{c}\bar{\beta}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\alpha} - \right.$$

$$\left. - \mathbf{c}\bar{\alpha}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\beta} - \bar{\beta}\,\mathbf{c}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\alpha} + \bar{\alpha}\,\mathbf{c}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\beta}\right] dA \qquad (24)$$

sau încă

$$\mathbf{c}\times\left[\oint_c \mathbf{v}\times\mathbf{dr}\right] = \int_s \left[\mathbf{c}\times\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\alpha}\times\bar{\beta}\right) + \mathbf{c}\times\left(\bar{\alpha}\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\beta}\right)\right] dA \qquad (25),$$

care dă relația (23).

Pentru relația (22) se fac calcule analoage; putem să o stabilim însă și direct, prin metode analoage.

---

*) Avem $\mathbf{c}\oint_c \varphi\,\mathbf{dr} = \oint_c \varphi\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{dr} = \int_s \operatorname{rot}(\varphi\,\mathbf{c})\cdot\mathbf{dS}$, unde $\mathbf{c}$ este o constantă vectorială arbitrară; așadar

$$\mathbf{c}\oint_c \varphi\,\mathbf{dr} = \int_s \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{dS} = \mathbf{c}\cdot\int_s \mathbf{dS}\times\operatorname{grad}\varphi,$$

care dă tocmai relația (19),

Avem într-adevăr :

$$\mathbf{a}\cdot\bar{\Gamma}=\mathbf{a}\cdot\oint_c \mathbf{v}\times d\mathbf{r}=\int_s \operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{v})\,d\mathbf{S} \tag{26}$$

cu $\mathbf{a}=\text{const}$ şi $\bar{\Gamma}=\oint_c \mathbf{v}\times d\mathbf{r}$, $d\mathbf{S}=\mathbf{n}\,dA$

Cum

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{v})=\mathbf{a}\cdot\operatorname{div}\mathbf{v}-(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{v},$$

iar

$$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{v}=\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})-\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{v},\ \text{rezultă}$$

$$\mathbf{a}\cdot\bar{\Gamma}=\int_s\left[\mathbf{a}\cdot\operatorname{div}\mathbf{v}+\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}-\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\right]d\mathbf{S} \tag{27}$$

Dacă ţinem seamă că

$$(\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}(\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{n})$$

şi

$$\left(\mathbf{n}\nabla\right)\mathbf{a}\,\mathbf{v}=\mathbf{a}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial n}\right)\quad(\mathbf{a}=\text{constantă arbitrară}),$$

atunci relaţia (27) devine

$$\mathbf{a}\cdot\bar{\Gamma}=\int_s\left[\mathbf{a}\cdot\operatorname{div}\mathbf{v}+\mathbf{a}(\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{n})-\mathbf{a}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial n}\right]dA \tag{28}$$

care este tocmai relaţia (22), multiplicată scalar cu vectorul **a**.

9. În privinţa integralelor de suprafaţă, avem

$$\oint_s \mathbf{u}(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S})=\int_V\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial v}+\mathbf{u}\cdot\operatorname{div}\mathbf{v}\right]dV \tag{29}$$

unde **u** şi **v** sînt oarecari, dar cu derivate parţiale continue, S este o suprafaţă măsurabilă, de normală continuă **n**, frontieră a domeniului (V); operatorul $\frac{\partial}{\partial v}$ este dat de $\frac{\partial}{\partial v}=(\mathbf{v}\cdot\nabla)$

Fie

$$\mathbf{R}=\oint_s \mathbf{u}(\mathbf{v}\,d\mathbf{S}) \tag{30};$$

Dacă înmulţim scalar cu constanta vectorială arbitrară **c**, obţinem

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{R}=\oint_s(\mathbf{c}\,\mathbf{u})\mathbf{v}\,d\mathbf{S}=\int_V\operatorname{div}\left[(\mathbf{c}\,\mathbf{u})\mathbf{v}\right]dV \tag{31}$$

Această relație se mai poate scrie

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{R}=\int_V\left[\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{c}\,\mathbf{u}+\mathbf{c}\,\mathbf{u}\cdot\operatorname{div}\mathbf{v}\right]dV \tag{32}$$

și cum

$$\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{c}\,\mathbf{u}=\mathbf{c}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial v},$$

rezultă

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{R}=\int_V\mathbf{c}\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial v}+\mathbf{u}\cdot\operatorname{div}\mathbf{v}\right]dV \tag{33}$$

care nu este altveva decît relația (29), multiplicată scalar cu vectorul constant arbitrar $\mathbf{c}$ și care se poate neglija.

10. În cazul particular $\mathbf{u}=\mathbf{a}=$ const, se obține formula lui Ostrogradski, căci $(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{a}=0$ și $\mathbf{a}$ poate fi ulterior eliminat.

11. Deasemenea mai avem:

$$\oint_s\sum_{k=1}^{n}\mathbf{u}_k\,(\mathbf{v}_k\,d\mathbf{S})=\int_V\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial\mathbf{u}_k}{\partial v_k}+\mathbf{u}_k\ \operatorname{div}\ \mathbf{v}_k\right]dV \tag{34}$$

unde $\mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_k$ au derivate parțiale continue, dar altfel oarecari.

Această relație este consecința relației (29) și a aditivității integralei. Suma poate fi redusă la 3 termeni, dar pentru a aplica formula nu mai e necesar să mai facem reducerea la o sumă de 3 diade.

12. Relativ la integrale de tipul $\oint_s\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times d\mathbf{S})$, există identitatea

$$\oint_s\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times d\mathbf{S})=\int_V\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u}+\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{u}-\operatorname{grad}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\right]dV \tag{35}$$

unde $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ și S satisfac la condițiuni analoage ca și la punctul (9).

Fie

$$\mathbf{R}=\oint_s\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times d\mathbf{S}) \tag{36}$$

care desvoltată devine:

$$\mathbf{R}=\oint_s\mathbf{v}\,(\mathbf{u}\,d\mathbf{S})-\oint_s(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,d\mathbf{S} \tag{37}$$

Primei integrale îi aplicăm formula (29), iar celei de a doua integrale, formula gradientului pentru integrale de suprafață, astfel că se obține

$$\mathbf{R}=\int_V\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u}+\mathbf{v}\ \operatorname{div}\ \mathbf{u}\ -\ \operatorname{grad}\ (\mathbf{uv})\right]dV\text{, adică}$$

tocmai relația (35).

13. **(Anexă)** În legătură cu formulele lui Stokes și Ostrogradski, trebuie observat că în timp ce analiza clasică scalară demonstrează aceste formule în mod constructiv, dar neintrinsec, analiza vectorială pleacă de la noțiunile de divergență și rotor ca derivate polidimensionale, pentru a demonstra formulele Stokes și Ostrogradski; așadar în loc ca aceste noțiuni să fie încoronarea demonstrației, ca în analiza scalară, ele apar fie ca o simplă transcriere a rezultatelor analizei scalare, fie ca exprimarea puțin modificată chiar a teoremelor lui Stokes și Ostrogradski; în acest caz, demonstrațiile au caracter vicios. Este deci necesar, ca păstrînd stilul constructiv și inductiv al analizei scalare să se dea demonstrații vectoriale intrinseci, noțiunile de divergență și rotor constituind o parte finală a demonstrațiilor și nicidecum un punct de plecare. Reprezentarea acestor demonstrații în coordonate curbilinii oarecari, ne va permite astfel și o definiție riguroasă a operatorului $\nabla$, al lui Hamilton, al cărui formalism nu este fundamentat strict și pe care mulți îl evită din această cauză (eliminînd astfel unele dependențe ale acestor două metode).

14. Stabilirea formulei lui Ostrogradski, ținînd seama de observațiile de la punctul precedent se poate face folosind variația integralei care reprezintă fluxul prin (S).

Fie un sistem de coordonate curbilinii $(u_1, u_2, u_3)$ relativ la care se face calculul integralei fluxului.

Avem

$$\Phi = \oint_{c_1} \oint_{c} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}_1\mathbf{r} \times \mathrm{d}_2\mathbf{r} \quad (\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}_{12}\mathbf{S} = \mathrm{d}_1\mathbf{r} \times \mathrm{d}_2\mathbf{r}) \tag{38}$$

unde $C_1$, $C_2$ sînt curbe din rețeaua de coordonate oarecari care definesc calculul integralei pe S, $\left(\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}_1\mathbf{r} \times \mathrm{d}_2\mathbf{r}\text{, cu } \mathrm{d}_1\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 = \mathbf{r}_1\,\mathrm{d}u_1\right.$, $\left.\mathrm{d}_2\mathbf{r} = \mathbf{r}_2\,\mathrm{d}u_2\right)$. Calculînd variația integralei $\Phi$ cînd suprafața $S$ este mobilă între $S_1$ și $S_2$, avem

$$\Phi_{S_2} - \Phi_{S_1} = \int_{c_3} \mathrm{d}_3\Phi = \int_{u_3=\alpha_3}^{u_3=\beta_3} \mathrm{d}_3\Phi \tag{39}$$

unde mișcarea lui $S$ este determinată de variația coordonatei $u_3$ $(u_3 = \alpha_3,\ S = S_1;\ u_3 = \beta_3,\ S = S_2)$.

Pentru calculul lui $\mathrm{d}_3\Phi$, avem

$$\mathrm{d}_3\Phi = \mathrm{d}_3 \int_{c_1}\int_{c_2} \mathbf{v}\,\mathrm{d}_1\mathbf{r}\,\mathrm{d}_2\mathbf{r} = \int_{c_1}\int_{c_2} \left[\mathrm{d}_3\mathbf{v}\,\mathrm{d}_1\mathbf{r}\,\mathrm{d}_2\mathbf{r} + \mathbf{v}\,\mathrm{d}_1\mathrm{d}_3\mathbf{r}\,\mathrm{d}_2\mathbf{r} + \mathbf{v}\,\mathrm{d}_1\mathbf{r}\,\mathrm{d}_2\,\mathrm{d}_3\mathbf{r}\right] \tag{40}$$

căci $\mathrm{d}_\alpha\,\mathrm{d}_\beta = \mathrm{d}_\beta\,\mathrm{d}_\alpha$ ca operatori independenți aplicați lui $\mathbf{r}$ cu derivate continue. Integrînd prin părți ultimii doi termeni, pe curbele *închise* mobile $C_1$ și $C_2$ se obține:

$$\mathrm{d}_3\Phi = \int_{c_1}\int_{c_2} \mathrm{d}_3\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}_1\mathbf{r}\,\mathrm{d}_2\mathbf{r} + \int_{c_2} \left[\mathbf{v}\,\mathrm{d}_3\mathbf{r}\,\mathrm{d}_2\mathbf{r}\right]_{c_1} - \int_{c_2}\int_{c_1} \mathrm{d}_1\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}_3\mathbf{r}\,\mathrm{d}_2\mathbf{r} +$$

$$+ \int_{c_1} \left[\mathbf{v}\,\mathrm{d}_1\mathbf{r}\,\mathrm{d}_3\mathbf{r}\right]_{c_2} - \int_{c_1}\int_{c_2} \mathrm{d}_2\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}_1\mathbf{r}\,\mathrm{d}_3\mathbf{r} \tag{41}$$

Avem însă

$$\left[\mathbf{v}\, d_3\mathbf{r}\, d_2\mathbf{r}\right]_{c_1} = 0 \quad \text{și} \quad \left[\mathbf{v}\, d_1\mathbf{r}\, d_3\mathbf{r}\right]_{c_2} = 0 \tag{42}$$

dacă $c_1$ și $c_2$ sînt curbe închise și $\mathbf{v}$ este un cîmp *uniform*, căci $d_\alpha \mathbf{r}$ sînt variații uniforme.

Astfel că relația (39) se scrie — folosind (41) și (42) —

$$\Phi_{s_2} - \Phi_{s_1} = \int_{c_3} d_3\Phi = \int_{c_1}\int_{c_2}\int_{c_3}\left[\Sigma\, d_1\mathbf{r}\, d_2\mathbf{r}\, d_3\mathbf{v}\right] \tag{43}$$

unde $\Sigma\, d_1\mathbf{r}\, d_2\mathbf{r}\, d_3\mathbf{v}$ reprezintă expresia

$$d_1\mathbf{r}\, d_2\mathbf{r}\, d_3\mathbf{v} + d_1\mathbf{v}\, d_2\mathbf{r}\, d_3\mathbf{r} + d_1\mathbf{r}\, d_2\mathbf{v}\, d_3\mathbf{r} \tag{44}$$

Relația (43) se mai poate scrie

$$\Phi_{s_2} - \Phi_{s_1} = \int_V \Sigma\, \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u_1}\, du_1 \cdot du_2\, du_3 \tag{45}$$

folosind ca termen generic pentru (44), termenul de la mijloc și ținînd seama că $d_2\mathbf{r} \times d_3\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3\, du_2\, du_3$, $d_1\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial u_1}\, du_1$

(Se mai putea scrie $\sum_{\alpha=1}^{3} d_\alpha \mathbf{r} d_{\alpha+1}\mathbf{r} d_{\alpha+2}\mathbf{v}$, cu $d_\alpha = d_\beta$, $\alpha \equiv \beta$, mod 3) — V este domeniul tridimensionat mărginit de $S_1$ și $S_2$, $S_1$ fiind interior lui $S_2$ —.

Rezultă că

$$\Phi_s = \int_V \left[\Sigma\, \mathbf{r}^1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u_1}\right](\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_2\, \mathbf{r}_3)\, du_1\, du_2\, du_3 \ ^*) \tag{46}$$

unde $\mathbf{r}^1$ este primul vector reciproc al triedrului $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]$ care este propriu, $u_\alpha$ fiind independente $[(\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_2\, \mathbf{r}_3) \neq 0]$ : $\mathbf{r}^1 = \dfrac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{(\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_2\, \mathbf{r}_3)}$ (Se scrie la fel și cu indicii consecutivi $\alpha$, $\alpha+1$, $\alpha+2$)

Expresia $\sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{r}^\alpha \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial u_\alpha}$ este div $\mathbf{v}$ și $(\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_2\, \mathbf{r}_3)\, du_1\, du_2\, du_3 = d\,V = d_{123}\,V$, $S$ fiind reuniunea lui $S_1$ și $S_2$, (normala luată corespunzător).

Expresia $\Sigma\ \mathbf{r}^\alpha \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial u_\alpha}$ pune în evidență operatorul $\Sigma \mathbf{r}^\alpha \dfrac{\partial}{\partial u_\alpha} = \nabla$ într-un sistem *carecare*, deci poate constitui o definiție pentru acest operator. Vom vedea cum *mai rezultă* și altfel.

---

*) Cu indici : $\Phi_s = \int_V \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u_\alpha}\, \mathbf{r}_{\alpha+1} \times \mathbf{r}_{\alpha+2}\, du_\alpha\, du_{\alpha+1}\, du_{\alpha+2} = \int_V \left[\sum_\alpha \mathbf{r}^\alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u_\alpha}\right] \cdot \mathbf{r}_\alpha\, \mathbf{r}_{\alpha+1}\, \mathbf{r}_{\alpha+2}\, du_\alpha\, du_{\alpha+1}\, du_{\alpha+2}$

15. Pentru formula lui Stokes, avem un calcul analog:

$$\delta\Gamma = \delta \oint_c \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \oint_c \left[\delta\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{v}\,\delta\cdot d\mathbf{r}\right] = \left[\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r}\right]_c + \int_c \left[\delta\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r}\right] \tag{47}$$

simbolul de variație „$\delta$", referindu-se la o familie de curbe $C'$, iar „$d$" la curbele $C$ pe care are loc integrarea respectivă. Rețeaua $(C, C')$ permite definirea unei integrale de suprafață $(S)$, cînd curba $C$ mobilă alunecă pe curbele $C'$ între 2 poziții extreme $C_1$ și $C_2$ ce mărginesc domeniul $(S)$ al integralei de suprafață.

Avem

$$\Gamma_{c_2} - \Gamma_{c_1} = \int_{c'} \delta\Gamma = \int_{c'}\int_c \left[\delta\mathbf{v}\,d\mathbf{r} - d\mathbf{v}\,\delta\mathbf{r}\right] \tag{48}$$

$$\left\{\text{termenul } \left[\mathbf{v}\,\delta\mathbf{r}\right]_c = 0\text{, pentru } \mathbf{v} = \sim \text{uniform pe } C \text{ (închisă)}\right\}.$$

Expresia $\Gamma_{c_2} - \Gamma_{c_1} = \Gamma_{fr\ s}$, unde mișcarea pe $C_1$ și $C_2$ se face corespunzător orientării lui $S$, respectiv lui $fr.\ S$.

Avem pentru $\delta\,\mathbf{v}\,d\mathbf{r} - d\mathbf{v}\,\delta\,\mathbf{r}$ de făcut transformarea ce dă elementul de suprafață $d\mathbf{S}$ al integralei de suprafață:

$$\delta\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r} = \sum_\alpha \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u_\alpha}\,\delta u_\alpha\,d\mathbf{r} - \sum_\alpha \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u_\alpha}\,du_\alpha\,\delta\mathbf{r} \tag{49}$$

sau încă ($du_\alpha = \mathbf{r}^\alpha\,d\mathbf{r}$ $\mathbf{r}^\alpha =$ vectorii reciproci $= \nabla u_\alpha$; $\delta u_\alpha = \mathbf{r}^\alpha\,\delta\mathbf{r}$)

$$\delta\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r} = \sum_\alpha \begin{vmatrix} \delta u_\alpha & du_\alpha \\ \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial u_\alpha}\,\delta\mathbf{r} & \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial u_\alpha}\,\delta\mathbf{r} \end{vmatrix} = \sum_\alpha \begin{vmatrix} \mathbf{r}^\alpha\,\delta\mathbf{r} & \mathbf{r}^\alpha\,d\mathbf{r} \\ \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial u_\alpha}\,\delta\mathbf{r} & \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial u_\alpha}\,d\mathbf{r} \end{vmatrix} \tag{50}$$

$$= \sum_\alpha \left(\mathbf{r}^\alpha \times \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u_\alpha}\right)\cdot\left(\delta\mathbf{r}\times d\mathbf{r}\right)$$

În definitiv avem pentru (48).

$$\Gamma_{fr\ s} = \int_s \left[\sum_\alpha \mathbf{r}^\alpha \times \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u_\alpha}\right]\cdot\left[\delta\mathbf{r}\times d\mathbf{r}\right] \tag{51}$$

epxresia $\sum_\alpha \mathbf{r}^\alpha \times \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial u_\alpha}$ este rotorul lui $\mathbf{v}$, iar $\delta\mathbf{r}\times d\mathbf{r} = d\mathbf{S}$, este elementul de suprafață pentru orientarea corespunzătoare lui $C_2$ exterioară și $C_1$ interioară. Expresia rotorului introduce iarăși operatorul $\sum_\alpha \mathbf{r}^\alpha \dfrac{\partial}{\partial u_\alpha} = \nabla$. (*deci* rot $\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v}$ folosind pentru $\nabla$ *această definiție*).

Introducerea operatorului $\nabla$ se poate face și direct, ca un operator asociat *operatorului d* — în sistemul $u_1, u_2, u_3$ —. Avem $\mathrm{d} = \Sigma\, \mathrm{d}u_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_\alpha}$ exprimat ca un produs scalar : $\mathrm{d} = \left(\Sigma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_\alpha}\, \mathrm{d}u_\alpha\right) \cdot \left(\Sigma\, \mathbf{r}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\right)$, unde $\mathbf{r}^\alpha$ sînt reciprocii lui $\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_\alpha}$; se recunoaște așadar produsul $\mathrm{d} = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \nabla$.

## НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА СТОКСА

(Краткое содержание)

Устанавливаются некоторые формулы типа Стокса, встречающеся в теории электромагнитного поля и в механике житкостей.

Формулы Стокса и Остроградского могут быть выведены из этих отношений.

Имеем :

$$(\alpha) \qquad \oint_c \mathbf{u}\,(\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{r}) = \int_s \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} + \mathbf{u}\,(\mathbf{n}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v})\right] \mathrm{d}A\,, \text{ где}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla)\,,\ \mathrm{d}A = |\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,|\,,\ \mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}A,\ C = \text{граница } S$$

$$(\beta) \qquad \oint_c \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathrm{d}\mathbf{r}) = \int_s \left[(\mathbf{u}\,\mathbf{n}\,\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}\,(\mathbf{n}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u}) + \mathrm{grad}\ (\mathbf{u}\,\mathbf{v}) \times \mathbf{n}\right] \mathrm{d}A$$

$$(\gamma) \qquad \oint_c \mathbf{v} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_s \left[\mathbf{n}\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} + \mathrm{rot}\ \mathbf{v} \times \mathbf{n} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n}\right] \mathrm{d}A$$

$$= \int_s \left[\bar{\alpha} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \times \bar{\beta}\right] \mathrm{d}A \qquad \left(\mathbf{n} = \bar{\alpha} \times \bar{\beta}\,,\ \frac{\partial}{\partial \alpha} = \bar{\alpha}\,\nabla\,,\ \frac{\partial}{\partial \beta} = \bar{\beta}\,\nabla\right)$$

$$(\delta) \qquad \oint_s \mathbf{u}\,(\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{S}) = \int_V \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v} + \mathbf{u}\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}\right] \mathrm{d}V\,, \text{ где } \frac{\partial}{\partial v} = \mathbf{v}\,\nabla\,,\ S = \text{граница } V$$

$$(\varepsilon) \qquad \oint_s \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathrm{d}\mathbf{S}) = \int_V \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u} + \mathbf{v}\ \mathrm{div}\ \mathbf{u} - \mathrm{grad}\,(\mathbf{u}\mathbf{v})\right] \mathrm{d}V,$$

Даются индуктивные и присущие векторные доказательства формулам Стокса и Остроградского. При этом, имеем в виду недостаточности доказательства скалярного анализа (не присущий характер), и векторного анализа (порочный характер), соотношения которых определяют „div“ и „rot“ как многоразмерные производные, включающие в измененном виде эти формулы

# QUELQUES FORMULES STOKIENNES

## (Résumé)

Dans cette note, on établit quelques formules stokiennes, qui interviennent dans la théorie du champ élétromagnétique et en mécanique des fluides. Les formules de Stokes et d'Ostrogradski peuvent être déduites aussi de ces formules.

On a ainsi

$$(\alpha) \qquad \oint_c \mathbf{u}\,(\mathbf{v}\,d\mathbf{r}) = \int_s \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} + \mathbf{u}\,(\mathbf{n}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v})\right] dA\,, \quad o\mathbf{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = (\mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \nabla)\,, \quad dA = |\,d\mathbf{S}\,|\,, \quad d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dA,\ C = \mathrm{fr.}\,S.$$

$$(\beta) \qquad \oint_c \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times d\mathbf{r}) = \int_s \left[(\mathbf{u}\,\mathbf{n}\,\nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{v}\,(\mathbf{n}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u}) + \mathrm{grad}\ (\mathbf{u}\,\mathbf{v}) \times \mathbf{n}\right] dA$$

$$(\gamma) \qquad \oint_c \mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \int_s \left[\mathbf{n}\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} + \mathrm{rot}\ \mathbf{v} \times \mathbf{n} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n}\right] dA$$

$$= \int_s \left[\bar{\alpha} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \times \bar{\beta}\right] dA \quad \left(\mathbf{n} = \bar{\alpha} \times \bar{\beta}\,,\ \frac{\partial}{\partial \alpha} = \bar{\alpha}\,\nabla\,,\ \frac{\partial}{\partial \beta} = \bar{\beta}\,\nabla\right)$$

$$(\delta) \qquad \oint_s \mathbf{u}\,(\mathbf{v}\,d\mathbf{S}) = \int_V \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v} + \mathbf{u} \cdot \mathrm{div}\ \mathbf{v}\right] dV\,, \quad o\mathbf{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \mathbf{v}\,\nabla\,, \quad S = \mathrm{fr}\ V$$

$$(\varepsilon) \qquad \oint_s \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times d\mathbf{S}) = \int_V \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{div}\ \mathbf{u} - \mathrm{grad}\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\right] dV$$

De même on donne des démonstrations vectorielles inductives et intrinsèques pour les formules de Stokes et Ostrogradski, en tenant compte des déficiences de démonstration tant de l'analyse scalaire (caractére non intrinsèque), que de l'analyse vectorielle (caractère vicieux, les définitions de div et rot, comme dérivées polydimensionnelles comprenant, sous une forme déguisée, ces formules.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

517.9

# ASUPRA UNEI CLASE DE TRANSFORMĂRI FUNCŢIONALE

de FL. BUCUR

*Noţiuni introductive.* Se numeşte spaţiu Banach, un spaţiu vectorial (în raport cu scopul numerelor reale sau complexe), normat şi complet.

Fie $X$ un spaţiu Banach. Pe $X$ pot fi definite două importante topologii: *topologia tare* $\tau$ *sau topologia normei şi topologia slabă* $\sigma$ (1). Topologia tare $\tau$ este topologia de spaţiu metric dedusă din distanţa $d(x,y) = \|x-y\|$.

Topologia slabă $\sigma$ se defineşte în modul următor: Fie $x_0 \epsilon X \varepsilon > O$ şi $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$, un număr oarecare, dar finit de funcţionale liniare definite pe $X$ şi continui în topologia normaei. Se numeşte vecinătate a lui $x_0$ în această topologie, mulţimea:

$$V(x_0, \varepsilon, f_1, f_2, \cdots, f_n) = \{x \mid \mid f_i(x-x_0) \mid < \varepsilon_0 \; i=1,2,\cdots,n\}$$

Topologia slabă nu satisface — în general — nici una din axiomele de numerabilitate. Din această cauză studiul convergenţei în topologia slabă se face exclusiv pe baza teoriei filtrelor sau a şirurilor generalizate (2).

Spaţiul topologic definit pe mulţimea $X$ cu ajutorul topologiei $\tau$ (respectiv $\sigma$) îl vom nota $(X,\tau)$. respectiv $(X,\sigma)$.

Fie acum $E$, $F$ două spaţii Banach. Îmi propun în cele ce urmează să studiez familia $G(E,F)$ a tuturor transformărilor $f: E \to F$, caracterizate prin proprietatea: $f$ este o transformare continuă definită pe spaţiul topologic $(E,\sigma)$ cu valori în spaţiul topologic $(F,\tau)$.

*Teorema.* Orice transformare complet continuă definită pe spaţiul Banach $E$ cu valori în spaţiul Banach $F$, aparţine familiei $G(E,F)$.

*Demonstraţie.* Este necesar şi suficient să arătăm că imaginea unui filtru $U$ convergent către $X_0 \epsilon E$ în topologia slabă a acestuia, este un filtru convergent către $f(x_0) \epsilon F$ în topologia tare, îndată ce $f$ este complet continuu.

Dar pentruca un filtru $U$ să conveargă către un element $X_0$ în topologia slabă, este necesar ca cel puţin o mulţime $A \epsilon U$ să fie mărginită (în distanţa normei).

Cum imaginea lui $A$ este o mulţime relativ compactă a lui $F$ deoarece $f$ este complet continuu- rezultă că urma filtului $f(U)$ pe $\overline{(f\,A)}$ are un punct aderent şi deci $f(U)$ este convergent.

Cum $F$ este separat, rezultă că el converge către $f(X_0)$, c, c, t, d.

*Teorema.* Dacă $E$ este un spațiu Banach reflexiv și $F$ un spațiu Banach oarecare, atunci clasa transformărilor $G(E,F)$ este identică cu clasa transformărilor complet continui definite pe $E$ cu valori în $F$.

*Demonstrație.* Se știe că un spațiu Banach este reflexiv dacă și numai dacă $E = E^{**}$. Dar în baza unui rezultat a lui Dieudonné, spațiile reflexive sînt caracterizate prin faptul că sfera lor unitate este relativ compactă în topologia slabă.

Va fi deci suficient, în baza teoremei precedente — pentru a demonstra teorema — să arăt că imaginea printr-o transformare continuă $f: (E, \sigma) \to (F, \tau)$ a unei mulțimi relativ compacte este relativ compactă.

Fie pentru aceasta $ACE$ relativ compact în $(E, \sigma)$. Rezultă $A$ compact. Dar $(F, \tau)$ fiind separat rezultă $f(\bar{A})$ compact și deci închis în $(F, \tau)$.

Dar atunci avem relațiile:

$$f(A) \subset f(\bar{A})$$

$$\overline{f(A)} \subset \overline{f(\bar{A})} = f(\bar{A})$$

Dar $f(\bar{A})$ fiind compact, rezultă că $\overline{f(A)}$ este compact și deci $f(A)$ relativ compact, c, c, t, d.

În cazul general cînd spațiile $E, F$ nu sînt supuse la condiții speciale, mulțimea $G(E,F)$ nu coincide cu mulțimea transformărilor complet continui ale lui $E$ în $F$. Pentru aceasta e suficient să considerăm spațiile $C(O,1)$ și $L_2$ și transformarea

$$f: [C(0,1), \sigma] \to (L_2, \tau)$$

definită în modul următor: $x \in C(0,1) \to f(x) = x \in L_2$

Transformarea aceasta este, după cum ușor se poate verifica, continuă de la $(C(0,1), r)$ la $L_2(\tau)$ dar nu este complet continuă.

Rămîne deschisă problema caracterizării spațiilor pentru care aceste mulțimi de transformări coincid și problema extinderii teoremelor lui Fredholm la operațiile din $G(E,F)$.

## BIBLIOGRAFIE

1. *F. Riesz* et *B. Sz. Nagy* — „Leçons d'Analyse functionelle, Budapest, 1953.
2. *N. Bourbaki* — Topologie Générale, Paris, 1940.

## О КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

(Краткое содержание)

Рассматривается множество $g(E, F)$ всех превращений $f: E \leftarrow F$, характеризуемых следующими свойсмвом: $f$ определенное превращение в монологическом пространстве $(E, \sigma)$ с величинами в топологическом пространстве $(F, \tau)$. Доказывается:

Теорема I. Любое совершенно постоянное и определенное превращение в пространстве Банаха $E$ с величнами в пространстве Банаха $F$, принадлежит к сямейству $G(E, F)$.

Теорема II. Если $E$ в пространстве Банаха рефлехивно и $F$ в пространстве Банаха является неопределенным, тогда класс превращений $G(E, F)$ подобно классу совершенно непрерывных превращений определенных на $E$ как величины в $F$.

## SUR UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS FONCTIONELLES

(Résumé)

On considère l'ensemble $G(E.F)$ des transformations $f: E \to F$, caractèrisés par la proprieté suivante: $f$ est une transformation continue définie sur l'éspace topologique $(E, \sigma)$ avec des valeurs dans l'éspace topologique $(F, \tau)$ On demontre:

1. — *Théorème I.* Chaque transformation complètement continue définie sur l'éspace Banach $E$ avec des valeurs dans l'éspace Banach $F$. appartient à la famille $G(E,F)$.

*Théorème II.* Si $E$ est un éspace Banach réflexif et$F$ un éspace Banach quelqonuqe, alors la classe des transformations $G(E,F)$ est identique à la classe des transformations completement continues définies sur $E$ à valeurs en $F$,

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

517.9

# ASUPRA UNEI ECUAŢII N-METAARMONICE

de V. MAGER

Intr-o lucrare [1] M. Ghermănescu, tratează ecuaţia

$$\Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \cdots + \lambda_n u = 0, \; \Delta^n u = \Delta\,(\Delta^{n-1} u) \qquad (1)$$

în cazul conturului circular, — cerc de rază $R$ cu centrul în origine — şi demonstrează unicitatea soluţiei, care ia valori date, împreună cu $\Delta u, \Delta^2 u, \cdots \Delta^{n-1} u$ pe cerc, în cazul că ecuaţia caracteristică asociată — (7) din această lucrare — admite toate rădăcinile distincte, dînd soluţia sub forma de la (9). În lucrarea de faţă îmi propun a da o formă condensată soluţiei, iar în partea a doua de a trata cazul cînd ecuaţia caracteristică admite rădăcinei multiple.

Consider, deci, ecuaţia (1), în care nu toate constantele $\lambda_i$ sînt nule, căreia îi caut soluţia continuă, împreună cu derivatele de primele $2n$ ordine, cunoscîênd valorile $u, \Delta u, \ldots \Delta^{n-1} u$ pe cercul de rază $R$. Presupun, deci, cunoscute valorile

$$\Delta^i u\,|_c = f_i(\alpha) = \frac{a_{io}}{2} + \sum_1^\infty{}_m \,(a_{im} \cos m\alpha + b_{im} \operatorname{sim} m\alpha)\,, \qquad (2)$$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots n-1)$$

funcţiuni continue, mărginite, periodice şi dezvoltabile pe cercul $C$, de rază $R$, în serii trigonometrice uniform convergente.

Căutînd soluţia ecuaţiei (1), de forma

$$u\,(x,y) = A_0\,(\varrho) + \sum_1^\infty{}_m \,[A_m\,(\varrho) \cos m\varphi + B_m\,(\varrho) \sin m\,\varphi]\,, \qquad (3)$$

se obţin, pentru determinarea coeficienţilor $A_m$ şi $B_m$, două ecuaţii diferenţiale de forma

$$\Delta^n v_1 + \lambda_1 \Delta^{n-1} v + \cdots + \lambda_n v = 0 \qquad (4)$$

în care

$$\Delta v = \left(\frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{d}{d\varrho} - \frac{m^2}{\varrho^2}\right) v$$

Se caută integrala regulată a acestei ecuații, de forma

$$\Delta v = \eta x \tag{5}$$

în care $\eta$ este o constantă ce rămîne a fi determinată. Făcînd, în ecuația (5), substituția $\varrho_1 = \mu\varrho$, unde $\eta = -\mu^2$ aceasta devine ecuația de tip Bessel

$$\frac{d^2 v}{d\varrho_1^2} + \frac{l}{\varrho_1}\frac{dv}{d\varrho_1} + \left(1 - \frac{m^2}{\varrho_1^2}\right) v = 0 , \tag{6}$$

a cărei soluție regulată este $v_m(\varrho) = c_m J_m(\varrho_1) = c_m J_m(\mu\varrho)$, unde $c_m$ sînt constante. Pentru ca integrala ecuației (6) să satisfacă și ecuația (5), trebuie să avem

$$\eta^n + \lambda_1 \eta^{n-1} + \cdots + \lambda_n = 0 \tag{7}$$

care va fi ecuația caracteristică a ecuației (4). Însemnînd cu $-\mu_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ cele n rădăcini distincte ale acuației (7), ele ne vor da $n$ integrale regulate ale ecuației (4), astfel încît integrala generală a ecuației (4) va fi

$$v_m(\varrho) = \sum_1^n{}_k c_{mk} J_m(\mu_k \varrho) , \tag{8}$$

unde $c_{mk}$ sînt constante arbitrare, ce se determină prin $n$ condiții la limită.

I. Se poate determina o integrală a ecuației (1), dîndu-se, de pildă, valorile lui $u$, $\Delta u \cdots \Delta^{n-1} u$, pentru $\varrho = R$. S-a demonstrat [1] că soluția este unică și că este dată de

$$u(x, y) = \sum_0^\infty{}_m \sum_1^m{}_k J_m(\mu_k \varrho)\left[ c_{mk} \cos m\varphi + d_{mk} \operatorname{sim} m\varphi \right]. \tag{3'}$$

Constantele $c_{mk}$ și $d_{mk}$ se determină, pe baza condițiilor la limită (2) din sistemele

$$\Delta^i v_m(R) = \sum_1^n{}_k \left(-1\right)^i c_{mk} \mu_k^{2i} J_m\left(\mu_k R\right) = a_{im}$$

$$\Delta^i v_m(R) = \sum_1^n{}_k \left(-1\right)^i d_{mk} \mu_k^{2i} J_m\left(\mu_k R\right) = b_{im} \tag{9}$$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots n-1)$$

Aceste sisteme admit fiecare soluții unice, deoarece determinantul sistemului

$$D=\left(-1\right)^{n}\prod_{1}^{n}{}_{k}\,J_m\left(\mu_k R\right)\begin{vmatrix}1 & 1\cdots\cdots 1\\ \mu_1^2 & \mu_2^2\cdots\cdots\mu_n^2\\ \mu_1^4 & \mu_2^4\cdots\cdots\mu_n^4\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mu_1^{2(n-1)} & \mu_2^{2(n-1)}\quad \mu_{\mu}^{2(n-1)}\end{vmatrix}=\left(-1\right)^{n}\prod_{1}^{n}{}_{k}J_m(\mu_k R)\,\delta \quad (10)$$

nu se anulează, dacă rădăcinile $\mu$ sînt distincte (în afară de o infinitate nenumărabilă de valori, zerourile lui $J_m\ (\mu_k R)$. Considerînd și determinanții coeficienților $D_j$, în care înlocuim, pe rînd, cîte o coloană prin termenii liberi corespunzători, se obține

$$D_j=\frac{\left(-1\right)^{n}\prod_{1}^{n}{}_{k}\ J_m\left(\mu_k R\right)}{J_m\left(\mu_j R\right)}\,\delta_j$$

unde

$$\delta_j=\left(-1\right)^{j-1}\begin{vmatrix}a_{om} & 1\cdots 1\\ -a_{1m} & \mu_1^2\cdots\mu_n^2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ (-1)^{n-1}a_{n-1m} & \mu_1^{2(n-1)}\quad \mu_n^{2(n-1)}\end{vmatrix}=(-1)^{j-1}\left(a_{om}A_{oj}+\right.$$
$$\left.+\,a_{1m}A_{1j}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\,a_{n-1\,m}\ A_{n-1\,j}\right)$$

și obținem pentru coeficienții $c_{mk}$ și $d_{mk}$ următoarele expresii

$$C_{mj}=\frac{(-1)^{j-1}\delta_i}{I_m\left(\mu_j R\right)\delta}=\frac{(-1)^{j-1}\left(a_{om}A_{oj}+a_{1m}A_{1j}+\cdots a_{n-1m}A_{n-1j}\right)}{\delta\ J_m\ (\mu_j\ R)}\quad (11)$$

și

$$d_{mj}=\frac{(-1)^{j-1}\delta_j^{*}}{J_m\left(\mu_j R\right)\delta}=\frac{(-1)^{j-1}\left(b_{om}A_{oj}+b_{1m}A_{1j}+\cdots+b_{n-1m}A_{n-1\,j}\right)}{\delta\ J_m\left(\mu_j R\right)}\quad (11')$$

Introducînd aceste valori în (3′) și dacă ținem seamă de faptul că $a_{im}$ și $b_{im}$ sînt coeficienții Fourier ai funcțiunilor $f_i(\alpha)$, dați de formulele cunoscute

$$a_{im}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_i\ (\alpha)\ \cos\ m\alpha\ \mathrm{d}\alpha\ ,\ b_{im}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_i\ (\alpha)\ \mathrm{sim}\ m\alpha\ \mathrm{d}\,\alpha$$

și notînd

$$G_k\ (\varrho,\varphi\,;\ R,\alpha)=\left(-1\right)^{k-1}\sum_{0}^{\infty}{}_{m}\frac{J_m\left(\mu_k\varrho\right)}{J_m\left(\mu_k R\right)}\cos m\left(\varphi-\alpha\right),$$

se obține soluția problemei în următoarea formă integrală

$$u(x,y)=\frac{1}{\delta\pi}\int_0^{2\pi}\sum_1^n{}_k G_k(\varrho,\varphi;R,\alpha)\Big[f_0(\alpha)A_{ok}+f_1(\alpha)A_{1k}+ \tag{12}$$

$$+\cdots+f_{n-1}(\alpha)A_{n-1\,k}\Big]d\alpha\cdot$$

(Convergența seriilor de tipul de mai sus a fost demonstrată în [1], formula (17) cu referință la (15) și (15′) loc. cit.).

II. În cazul cînd ecuația caracteristică admite $l$ rădăcini distincte pe care le vom nota cu $-\mu_l^2$, în care rădăcina $-\mu_l^2$ este multiplă de ordinul $p_l$, astfel ca să avem $\sum_1^l p_k = n$, putem aplica raționamentul care se face, în general, în cazul rădăcinilor multiple. Fie $J_m(\mu_l\varrho)$ integrala regulată, corespunzătoare rădăcinii $-\mu_l^2$, a doua se va obține prin metoda lui d'Alembert, considerînd-o ca limita expresiei

$$\lim_{\mu_l^x\to\mu_l}\frac{J_m(\mu_l^x\varrho)-J_m(\mu_i\varrho)}{\mu_l^x-\mu_e}=\frac{\partial}{\partial\mu_l}J_m(\mu_l\varrho)$$

sau, în general, în cazul cînd rădăcina $-\mu_l^2$ este multiplă de ordinul $p_l$, se obțin cele $p_l$ integrale distincte, date de

$$\frac{\partial^p}{\partial\mu_l^p}J_m(\mu_l\varrho)\quad(p=0,1,\cdots p_1-1)$$

încît integrala generală a ecuației diferențiale (4) va fi, în acest caz, dată de

$$u_m(\varrho)=\sum_1^l{}_i\sum_0^{P_l-1}{}_j\,c_m^{ij}\frac{\partial^j}{\partial\mu_i^j}J_m(\mu_i\varrho), \tag{13}$$

iar drept soluție a ecuației (1) se obține

$$u(x,y)=\sum_0^\infty{}_m\sum_1^l{}_i\sum_0^{P_l-1}{}_j\frac{\partial^j}{\partial\mu_i^j}J_m(\mu_i\varrho)\Big[c_m^{ij}\cos m\varphi+d_m^{ij}\sin m\varphi \tag{14}$$

În acest caz, din cauza expresiei complicate a soluției, este dificil de dat o formă condensată soluției problemei la limită propuse pentru ecuația (1). Unicitatea soluției rezultă, ca în cazul rădăcinilor distincte, din faptul că determinanții coeficienților $e_{mk}$ și $d_{mk}$ nu sînt nuli și deci, nu există soluție regulată care să ia pe conturul $C$, împreună cu $\Delta u$, $\Delta^2 u$, $\cdots\Delta^{n-1}u$, valoarea zero, fără a fi identic nulă pretutindeni în $C$. Este suficient deci a considera două soluții $v$ și $w$, ale ecuației (1) care

împreună cu laplacienii de primele $n-1$ ordine să aibe aceleași valori, diferența $u=v-w$, care este deasemenea o soluție a ecuației (1), împreună cu $\Delta u, \cdots \Delta^{n-1} u$, va fi nulă pe contur și deci identic nulă și în $C$, de unde rezultă, imediat că $v$ și $w$ sînt identice pretutindeni în $C$.

Pentru ilustrarea celor expuse la §II îmi propun a găsi soluția ecuației.

$$\Delta^2 u + 2\lambda \Delta u + \lambda^2 u = 0 ,$$

cînd $u=f_1(x,y)$ și $\Delta u = f_2(x,y)$ sînt cunoscute și dezvoltabile în serie Fourier uniform convergentă pe cercul $C$ de rază $R$. Avem deci

$$u \mid_{\rho=R} = f_0(\alpha) = \frac{a_{00}}{2} + \sum_1^\infty{}_m \left( a_{om} \cos m\alpha + b_{om} \operatorname{sim} m\alpha \right)$$

$$\Delta u \mid_{\rho=R} = f_1(\alpha) = \frac{a_{10}}{2} + \sum_1^\infty{}_m \left( a_{1m} \cos m\alpha + b_{1m} \sin m\alpha \right)$$

Ecuația caracteristică, devine,

$$\eta^2 + 2\lambda\eta + \lambda^2 = 0 , \qquad \eta_{12} = -\lambda = -\eta^2$$

și avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} C_m^{11} J_m(\mu R) + C_m^{12} \left[ J_{m-1}(\mu R) - J_{m+1}(\mu R) \right] \dfrac{R}{2} = a_{om} \\ -\mu^2 C_m^{11} J(\mu R) + C_m^{12} \left[ (2 - m^2 + 4m - R^2\mu^2) J_{m-1}(\mu R) - \right. \\ \left. - (2 - m^2 - 4m - R^2\mu^2) J_{m-1}(\mu R) \right] \dfrac{1}{2R} = a_{1m} \end{cases}$$

și unul analog, în care în loc de $c_m^{ij}$ și $a_{mk}$ punem $d_m^{ij}$ respectiv $b_{mk}$. Se obțin, următoarele expresii pentru coeficienții $c_m^{ij}$ și $d_m^{ij}$

$$C_m^{11} = \frac{\left[ a_{om} (2 - m^2 - R^2\mu^2) - R^2 a_{1m} \right] J'_m(\mu R) + \dfrac{4m^2}{R^2\mu^2} J_m(\mu R)}{J_m(\mu R) \left[ J'_m(\mu R) - \dfrac{4}{R(m^2-2)} J_m(\mu R) \right]}$$

$$d_m^{11} = \frac{\left[ C_{om} (2 - m^2 - R^2\mu^2) - R^2 b_{1m} \right] J'_m(\mu R) + \dfrac{4m^2}{R^2\mu^2} J_m(\mu R)}{J_m(\mu R) \left[ J'_m(\mu R) - \dfrac{4m}{R(m^2-2)} J_m(\mu R) \right]}$$

$$C_m^{12} = \frac{a_{1m} + \mu^2 a_{om}}{J'_m(\mu R) - \frac{4}{R(m^2-2)} J_m(\mu R)}$$

$$d_i^{12} = \frac{b_{1m} + \mu^2 b_{om}}{J'_m(\mu R) - \frac{4m}{R(m^2-2)} J_m(\mu R)} \qquad \left( {}_m(\mu R) = \frac{\alpha}{a\mu} J_m(\mu R) \right)$$

Inlocuind aceste valori în (14), se obține soluția căutată.

*Catedra de matematică*
*Institutul de Construcții București*

## BIBLIOGRAFIE

1. *M. Ghermănescu* — Asupra ecuației $\Delta u - \lambda u$. Buletinul științific al Școlii Politehnice din Timișoara, t. 5, fasc. 3—4, 1935.

## К ВОПРОСУ О Н-МЕТАГОРМОНИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

(Краткое содержание)

Автор продолжает изучение в предельных условиях уравнения (1), котор е уже рассм тривалось товарищем М. Германеску, и которого ра-зрешение в условиях различных корней характерного уравнения (7) было дано в форме (9) и дается сейчас под форм ой (12).

Во второй части работы рассматривается случай, когда характерное уравнение допускает множество корней и дает решение в форме (17).

В конце работы рассматривается частный случай упавнения, характерное уравнение которого допускает, только только два корня были слижными (одинаковыми).

## SUR UNE ÉQUATION N-METHAARMONIQUE.

(Résumé)

L'auteur reprend l'étude de l'équation (1), dans les conditions aux limites (2), qui a été traité déja par M. Ghermanesco en [1], et dont la solution — dans le cas des racines distinctes de l'équation caractéristique (7) a été donné sous la forme (9) et dont la solution est maintenant donné sous la forme intégrale (12). Dans la deuxième partie du travail on traite le cas quand l'équation caractéristique admet des racines multiples et donne la solution sous la forme (14). A la fin est traité le cas particulier d'une équation dont l'équation caractéristique n'admet que deux racines confondues.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

517.4

# SPAȚIILE CU CONEXIUNE AFINĂ $A_2$ CARE ADMIT GRUPUL ORTOGONAL SAU PSEUDO-ORTOGONAL DE TRANSFORMĂRI DE CONGRUENȚE

de I. MATEI

Studiul unui spațiu cu coexiune afină $A_2$, admițînd grupul ortogonal sau pseudo-ortogonal de transformări de congruențe se reduce [1] la studiul unui spațiu riemannian.

Într-adevăr să presupunem spațiul $A_2$, raportat la un sistem de congruențe, independente, adus la forma canonină,

$$ds^1 = \lambda\,(x^1, x^2)\,dx^1 \tag{1}$$

$$ds^2 = \mu\,(x^1, x^2)\,dx^2$$

Notînd cu $\gamma^a_{bc}$ componentele conexiunii pe congruențele (1), cu $\gamma^a_{bcd}$ componentele tensorului de curbură și cu $r_{cd} = \gamma^a_{acd}$, $\gamma_{bd} = \gamma^a_{bad}$ componentele tensorilor de curbură contractați, se asociază spațiului formele invariante.

$$f = r_{cd}\,ds^c\,\delta\,s^b \tag{2}$$

$$\psi = \gamma_{bd}\,ds^b\,d\,s^d$$

Dacă spațiul este fără torsiune, formele (2) devin

$$f = (\gamma_{12} - \gamma_{21})(ds^1\,\delta\,s^2 - ds^2\,\delta\,s^1) \tag{2'}$$

$$\psi = \gamma_{11}\,(ds^1)^2 + (\gamma_{12} + \gamma_{21})\,ds^1\,ds^2 + \gamma_{22}\,(ds^2)^2$$

Printr-o transformare de congruențe de forma

$$d\bar{s}^1 = a\,ds^1 + b\,ds^2 \tag{3}$$

$$d\bar{s}^2 = \alpha\,ds^1 + \beta\,ds^2$$

unde $a, b, \alpha, \beta$ sînt funcțiuni de $x^1, x^2$ și $a\,\beta - \alpha\,b \neq 0$ putem reduce forma pătratică $\psi$ la forma

$$\psi = \pm\,(ds^1)^2 \pm (ds^2)^2 \tag{4}$$

și grupul (3) care conservă această situație, este grupul ortogonal.

$$d\bar{s}^1 = \cos\,\theta\,ds^1 + \sin\,\theta\,ds^2 \tag{5}$$

$$d\bar{s}^2 = -\sin\,\theta\,ds^1 + \cos\,\theta\,ds^2$$

sau grupul pseudo-ortogonal.

$$d\bar{s}^1 = \operatorname{ch}\theta\, ds^1 + \operatorname{sh}\theta\, ds^2 \tag{5'}$$

$$d\bar{s}^2 = \operatorname{sh}\theta\, ds_1 + \operatorname{ch}\theta\, ds^2$$

$\theta$ fiind o funcție orbitrară de $x^1$, $x^2$.

Rezultă că conexiunea spațiului $A_2$, este dată de simbolii lui Christoffel de a doua speță ai metricei,

$$ds^2 = \pm (ds^1)^2 \pm (ds^2)^2 \tag{6}$$

Componentele tenesorului fundamental al spațiului riemannian $V_2$, cu metrica (6) sînt

$$a_{11} = \pm \lambda^2, \quad a_{22} = \pm \mu^2, \quad a_{12} = a_{21} = 0$$

Imi propun să dau condiția necesară și suficientă pentru ca spațiul $A_2$, să admită grupul (5) sau (5') și să determin forma canonică a conexiunii în acest caz.

In ipoteza că spațiul admite grupul ortogonal, calculînd simbolii lui Christoffel de a doua speță și schimbîndu-i de semn găsim:

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^1} \qquad \Gamma^2_{11} = \frac{\lambda}{\mu^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \tag{7}$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \qquad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{\mu}{\lambda^2}\frac{\partial \mu}{\partial x^1} \qquad \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x^2}$$

Deoarece coeficienții metricei (6) sînt componente ale tensorului de curbură contractat pe congruențele (1), deducem condiția.

$$\lambda\mu\,(\mu\,\mu''_{x^1 x^1} + \lambda\,\lambda''_{x^2 x^2}) - \lambda^2 \mu'_{x^2}\,\lambda'_{x^2} - \mu^2 \lambda'_{x^1}\,\mu'_{x^1} + \lambda^3 \mu^3 = 0 \tag{8}$$

In ipoteza că spațiul admite grupul pseudo-ortogonal, considerații analoage ne conduc la formulele.

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^1} \qquad \Gamma^2_{11} = -\frac{\lambda}{\mu^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \tag{7'}$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{\mu}{\lambda^2}\frac{\partial \mu}{\partial x^1} \qquad \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x^2}$$

$$\lambda\mu\,(\lambda\,\lambda''_{x^2 x} - \mu\,\mu''_{x^1 x^1}) + \mu^2 \mu'_{x^1}\,\lambda'_{x^1} - \lambda^2 \lambda'_{x^2}\,\mu'_{x^2} - \lambda^3 \mu^3 = 0 \tag{8'}$$

Componentele conexiunii depind deci o funcție arbitrară de un argument și de două funcții arbitrare de cîte un argument.

Putem obține aceste rezultate și în mod direct.

Impunînd formei biliniare $f$, condiția de invarianță prin grupul (5) sau (5') deducem.

$$\bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{21} = \gamma_{12} - \gamma_{21} = A \tag{9}$$

Se poate arăta ușor că invariantul absolut $A$, este o constantă.
Pentru ca spațiul $A_2$ să admită grupul (5) sau (5') trebuie [2] ca formulele de transformare a conexiunii $\gamma^a_{bc}$ prin aceste grupuri să fie independente de $\theta$.

Folosind aceste formule de transformare.

$$\frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} = \bar{\gamma}^a_{ef} c^e_b c^f_c - \gamma^e_{bc} c^a_e \tag{10}$$

deducem în cazul grupului ortogonal

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^1_{11} = \gamma^2_{21} = \gamma^1_{12} = \gamma^2_{22} = 0 \\ &\gamma^2_{11} = -\gamma^1_{21} = m \\ &\gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22} = n \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

și apoi

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \frac{\partial n}{\partial s^1} - \frac{\partial m}{\partial s^2} - m^2 - n^2 \; ; \; \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0 \tag{12}$$

iar în cazul grupului pseudo-ortogonal

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^2_{21} = \gamma^2_{22} = 0 \\ &\gamma^1_{21} = \gamma^2_{11} = \alpha \\ &\gamma^1_{22} = \gamma^2_{12} = \beta \end{aligned}\right. \tag{11'}$$

și

$$\gamma_{11} = -\gamma_{22} = \frac{\partial \beta}{\partial s_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} + \alpha^2 - \beta^2 \tag{12'}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$$

Rezultă că $A=0$.

*De aci avem teorema:* condiția necesară și suficientă ca spațiul $A_2$ să admită grupul ortogonal sau pseudo-ortogonal de transformări de congruențe este ca forma pătratică invariantă $\psi$ asociată spațiului să fie nedegenerată, iar forma biliniară invariantă f să fie nulă.

Folosind formulele de trecere la componentele conexiunii în variabilele $x^1$, $x^2$

$$\Gamma^i_{jk} = \left( \frac{\partial \mu^i_b}{\partial s^c} + \gamma^a_{bc} \mu^i_a \right) \lambda^b_j \lambda^c_k . \tag{13}$$

deducem

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{\partial \lambda}{\partial s^1} \qquad \Gamma_{11}^2 = \frac{m\lambda^2}{\mu} \tag{14}$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial s^2} \qquad \Gamma_{12}^2 = n\lambda$$

$$\Gamma_{21}^1 = -m\mu \qquad \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial s^1}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -n\frac{\mu^2}{\lambda} \qquad \Gamma_{22}^2 = -\frac{\partial \mu}{\partial s^2}$$

Deoarece conexiunea este simetrică avem

$$m = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial s^2} = \frac{1}{\lambda\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \tag{15}$$

$$n = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial s^1} = -\frac{1}{\lambda\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x^1}$$

Din (14) deducem formulele (7) iar din (12) ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi, (8).

Analog obținem (7′) și (8′).

## BIBLIOGRAFIE

1. *St. Petrescu* — Clasificarea spațiilor cu conexiune afină $A_2$. Studii și cercetări matematice, Vol. II, 1951.

2. *V. Dumitraș* — Determinarea spațiilor $A_3$ care admit o rotație în fiecare punct. Studii și cercetări matematice t. IV, Nr. 1—2, 1953.

## ПРОСТРАНСТВА С АФИННЫМ СОЕДИНЕНИЕМ $A_2$, ДОПУСКАЮШИМ ОРТОГОНАЛЬНУЮ ИЛИ ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНУЮ ГРУППУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОНГРУЕНЦИЙ

(Краткое содержание)

Автор дает необходимое и достаточное условие, чтобы пространство с афинной связностью $A_2$ допустило бы ортогональную или псевдоортогональную группу преобразований конгруенций; затем он выводит каноническую форму связности пространства и показывает, что это зависит от произвольной функции двух аргументов и от двух произвольных функций каждая из них, находясь в зависимости от отдельного аргумента,

## SUR LES ESPACES A CONNEXION AFFINE $A_2$ ADMETTANT LE GROUPE ORTHOGONAL OU PSEUDO-ORTHOGONAL DE TRANSFORMATIONS DE CONGRUENCES

(Résumé)

L'auteur indique la condition nécésaire et suffisante pour que l'espace a connexion affine $A_2$, admette le groupe orthogonal ou pseudo-orthogonal de transformations de congruences ; il déduit alors la forme canonique de la connexion et montre qu'elle dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments et de deux fonctions arbitraires chacune dépendant d'une argument.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

517.4

# ASUPRA SPAŢIILOR CU CONEXIUNE AFINĂ CU CÎMP PARALEL MAXIMAL

de F. ABRAMOVICI

Intr-o lucrare anterioară [1] ne-am pus problema caracterizării spaţiilor proiectiv-euclidiene, care admit un cîmp paralel maximal (adică un cîmp paralel ce depinde de $n-1$ constante arbitrare) şi am arătat că singurele spaţii de acest tip sînt spaţiile cu grup de mişcare cu număr maxim de parametrii, adică cu grup cu $n^2$ parametrii.

În lucrarea de faţă ne propunem să completăm aceste rezultate cu unele ce nu se mai referă neapărat la spaţiile proiectiv-euclidiene, dînd mai întîi o teoremă generală şi aplicînd apoi această teoremă la o categorie de spaţii foarte asemănătoare —dintr-un anumit punct de vedere— cu spaţiile proiectiv euclidiene. Aplicînd această teoremă, se regăseşte uşor rezultatul lui Egorov [2] pentru spaţiile cu cîmp maximal.

După cum se ştie [3], se numeşte cîmp paralel, un cîmp cu proprietatea

$$\frac{\partial \lambda^i}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk}\lambda^j = 0 \tag{1}$$

Condiţiile de integrabilitate ale sistemului (1) se scriu

$$\lambda^i \Gamma^i_{jkl} = 0 \tag{2}$$

unde $\Gamma^i_{jkl}$ sînt componentele tensorului de curbură. Într-un sistem de congruenţe, aceste condiţii se scriu

$$l^b \gamma^a_{bcd} = 0 \tag{2'}$$

unde $l^b$ sînt componentele vectorului în sistemul de congruenţe iar $\gamma^a_{bcd}$ componentele tensorului de curbură.

*Teorema 1. Dacă spaţiul admite un cîmp paralel maximal, există un sistem de congruenţe în care*

$$\gamma^a_{bed} = 0 (b \neq b') \tag{3}$$

*$b'$ fiind un număr fix.*

Într-adevăr, dacă spaţiul nu este local-euclidian, există o componentă a tensorului de curbură diferită de zero, să zicem $\gamma^{a'}_{b'c'd'}$ şi în acest caz ecuaţia

$$l^b \gamma^{a'}_{b'c'd'} = 0$$

nu este identic satisfăcută; aceasta înseamnă că în ipotezele făcute toate

celelalte ecuații ale sistemului (2) sînt consecințe ale acestei ecuații adică avem :

$$\gamma^{a}_{bcd} = \lambda^{a}_{cd}\,\gamma^{a'}_{bc'd'} \cdot \tag{4}$$

Să scriem acum relațiile de transformare pentru tensorul de curbură, ținînd seamă de aceiași proprietate în noul sistem de congruență. Avem

$$\bar{\lambda}^{a}_{st}\,\bar{\gamma}^{\bar{a}'}_{r\,\bar{c}'\,\bar{d}'}\,c^{r}_{b}\,c^{s}_{c}\,c^{t}_{d} = \lambda^{s}_{cd}\,\gamma^{a'}_{bc'd'}\,c^{a}_{s} \tag{5}$$

și cum indicii $a, b, c, d$ sunt independenți rezultă

$$f\,\bar{\gamma}^{\bar{a}'}_{r\,\bar{c}'\,\bar{d}'}\,c^{r}_{b} = \gamma^{a'}_{bc'd'}$$

$$\frac{1}{f}\,\bar{\lambda}^{a}_{st}\,c^{s}_{c}\,c^{t}_{d} = \lambda^{s} \tag{5'}$$

unde $f$ este un coeficient, care depinde de cele două sisteme de congruențe. Din primele relații (5'), se vede că dacă luăm

$$c^{b'}_{b} = \gamma^{a'}_{be'd'}$$

avem $\bar{\gamma}^{\bar{a}'}_{b\,\bar{c}'\,\bar{d}'} = 0$, deci conform relațiilor (4), tocmai ceiace voiam să demonstrăm.

Pentru a fixa ideile, vom presupune $b' = 2$. Transformările de con-

$$c^{2}_{b} = 0 \quad (b \neq 2) \tag{6}$$

și după cum se vede imediat formează un grup ce depinde de $n^2 + 1$ parametrii, grupul de mișcare, al spațiului fiind un subgrup al său. Dacă impunem și condiția $f\,\bar{\gamma}^{\bar{a}'}_{b\,\bar{c}'\,\bar{d}'} = 1$ vom găsi că transformările care păstrează situația satisfac în plus relația $C^{2}_{2} = 1$. Așa dar, pentru spațiile cu cîmp maximal rezultă imediat teorema lui Egorov care spune că grupul de mișcare al unui spațiu cu conexiune afină, care nu este local-euclidian, depinde de cel mult $n^2$ parametrii.

Să numim sistemele de coordonate cu proprietatea (3) sisteme maximale. Avem :

**gruenţe** care păstrează această proprietate, au forma

Teorema 2. *Dacă în sistemele maximale componentele tensorului de curbură sunt nule, dacă indicele de contravarianță este diferit de indicii de covarianță și în plus, spațiul este echiafin, atunci spațiul este proiectiv-euclidian maximal, adică grupul său de mișcare depinde de $n^2$ parametrii.*

Intr-adevăr, deoarece relațiile lui Ricci sînt valabile și în sistemele de congruențe, singurele componente diferite de zero, într-un sistem maximal, sînt cele de forma

$$\gamma^{a}_{22d}$$

iar în cazul nostru

$$\gamma^{2}_{22d}\,,\ \gamma^{a}_{22a}\,.$$

În sistemele maximale, tensorul contractat de curbură $r_{cd} = \gamma^{a}_{acd}$ se reduce la $r_{2d} = \gamma^{2}_{22d}$ și cum am presupus spațiul achiafin [4] avem

$$\gamma^{2}_{22d} = 0 \tag{7}$$

Relațiile de trecere la un alt sistem maximal vor fi

$$\bar{\gamma}^{a}_{22a}\,(c_2^2)^2\,c^a_d = \gamma^d_{22d}\,c^a_d \qquad \begin{pmatrix} a \neq 2,\ d \neq 2, \\ a \text{ și } d \text{ nu se însumează} \end{pmatrix} \tag{8}$$

și deci alegînd $C^a_d$ în mod convenabil (și $C^2_2 = 1$) avem

$$\bar{\gamma}^{a}_{22a} = \gamma^{d}_{22d} \qquad \begin{pmatrix} a \neq 2,\ d \neq 2, \\ a \text{ și } d \text{ nu se însumează} \end{pmatrix} \tag{8'}$$

adică $\gamma^d_{22d}$ $(d \neq 2)$ sunt toți egali între ei, astfel încît introducînd tensorul de curbură contractant $\gamma_{bc} = \gamma^a_{bca}$ obținem

$$\gamma_{22} = (n-1)\,\gamma^a_{22a} \qquad (a \text{ fix oarecare},\ a \neq 2) \tag{9}$$

celelalte componente ale acestui tensor sînt nule. Prin urmare, dacă alegem $(c_2^2)^2 = \gamma_{22}$ avem $\bar{\gamma}_{22} = 1$ și condiția ca transformările de congruențe să conserve situația este $(c_2^2)^2 = 1$ care împreună cu (6) constituie singurele condiții ce se impun grupului de mișcare și deci acesta depinde de $n^2$ parametrii; deci conform celor arătate de G. Vrînceanu [5], spațiul este proiectiv euclidian, adică componentele tensorului de curbură cu indicele de contravarianță diferit de indicii de covarianță sunt nule în orice sisteme de coodonate sau congruențe și nu numai în cele maximale.

Teorema 3. *Dacă în sistemele maximale, componentele tensorului de curbură sînt nule, dacă indicele de contravarianță este diferit de indicele de covarianță, dar spațiul nu este echiafin, atunci grupul de mișcare depinde de* $n^2 - 2n + 2$ parametrii.

Pentru demonstrație vom aduce tensorului de curbură contractat $\gamma_{bc}$ la forma canonică $\gamma_{23} = 1$, $\gamma_{bc} = 0$. Pentru această să contractăm relațiile (2) punînd $a = d$. Obținem.

$$l^b\,\gamma_{bd} = 0 \tag{10}$$

de unde rezultă, în ipotezele noastre, că matricea $\| \gamma_{bd} \|$ are rangul *1*. Pe de altă parte, avînd deaface cu un sistem maximal, avem

$$\gamma_{bd} = 0\ (b \neq 2) \tag{11}$$

adică matricea noastră are o singură coloană și de aici rezultă ușor că putem obține forma canonică pe care o căutăm. Transformările de congreunțe care păstrează situația, satisfac condițiile

$$c_2^2 c_3^3 = 1\ ,\quad c^3_a = 0\ \ (a \neq 3) \tag{12}$$

Să vedem, în aceste condiții, cum se transformă tensorul de curbură, Avem:

$$\begin{aligned} &\bar{\gamma}^{a}_{22d}\,(c_2^2)^2\,c^a_d = \gamma^d_{22d}\,c^a_d \qquad (d \neq 3\ ,\ a \neq 2) \\ &\bar{\gamma}^{a}_{22a}\,(c_2^1)^2\,c^a_3 = \gamma^3_{223}\,c^a_3 + \gamma^2_{223}\,c^a_2 \qquad (a \neq 2) \end{aligned} \tag{13}$$

de unde rezultă dacă alegem $c^a_d$ și $c^2_2$ în mod convenabil:

$$\begin{aligned} &\bar{\gamma}^{a}_{22a} = \gamma^d_{22d} \qquad (d \neq 3\ ,\ a \neq 2) \\ &\bar{\gamma}^{d}_{22d}\,c^a_3 = \gamma^3_{223}\,c^a_3 + \gamma^2_{223}\,c^a_2 \qquad (a \neq 2) \end{aligned} \tag{13'}$$

Ultima relație se scrie însă pentru a = 3

$$\overset{d}{\gamma}_{22d} c_3^3 = \gamma_{223}^3 c_3^3$$

respectiv

$$\overset{d}{\gamma}_{22d} = \gamma_{223}^3 . \tag{14}$$

Deci, *în sistemele noastre de congruențe componentele,* $\gamma_{22a}^a$ *sînt toate egale între ele* ($a \neq 2$).

Ținînd seamă de această proprietate în ultimele relații (13′) considerate ca ecuații ale grupului de mișcare, obținem

$$c_2^a = 0 \qquad (a \neq 2) . \tag{15}$$

Numărînd relațiile independente (6), (12) și (15) (inclusiv $c_2^2 = 1$) și ținînd seamă de faptul că alte condiții nu mai există, căci cele obținute prin derivare sînt satisfăcute, vedem că grupul depinde de $n^2 - 2n + 2$ parametrii.

*Catedra de matematică*
*Institutul de Construcții București*

## BIBLIOGRAFIE

1. *F. Abramovici* — Cîmpuri paralele în spațiile proiectiv-euclidiene. Consfătuirea de Geometrie Diferențială, Timișoara, 1955.
2. *I. P. Egorov* — Despre ordinul grupurilor de mișcare ale spațiilor cu conexiune afină. D.A.N., Vol. 57, 1949.
3. *L. P. Eisenhart* — Non-riemannian geometry. New-York, 1927.
4. *I. P. Norden* — Spații cu conexiune afină, Moscova, 1950.
5. *G. Vrănceanu* — Grupurile de mișcare ale spațiilor cu conexiune. Studii și cercetări matematice, Vol. II, Fasc. II, 1951.

## К ВОПРОСУ ПРОСТРАНСТВ С АФИННЫМ СОЕДИНЕНИЕМ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ МАКСИМАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

(Краткое содержание)

Устанавливается существование некоторых конгруентных систем, в которых $\gamma_{bcd}^a = 0$, $b \neq b'$, $b'$ зафиксирован и с помощью их устанавливаются две теоремы относительно групп движения.

## SUR LES ESPACES A CONNEXION AFFINE AVEC UN CHAMP PARALLÈLE MAXIMAL

(Résumé)

On établit l'existence des systèmes de congruences dans les quelles on a $\gamma_{bcd}^a = 0$, $b \neq b'$, $b'$ fixe et à l'aide de ces systèmes on établit deux théorèmes relatives aux groupes des mouvements.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

FIZICĂ

# ECUAŢIA DE STARE A SUBTERFAŢEI LICHID

de N. BARBULESCU

Intr-o serie de lucrări anterioare, privitoare la forţele superficiale ale fluidelor, am arătat că pătura superficială a unui lichid trebuie definită prin *interfaţa* şi *supterfaţa ei.*

Interfaţa reprezintă suprafaţa de contact lichid/vapori şi este sediul *tensiunii interfaciale* $\sigma_i$ . Ceea ce numim în mod obişnuit „tensiune superficială" la un lichid nu este, în realitate, decît tensiunea interfacială lichid vapori.

Tensiunea interfacială $\sigma_i$ a fost determinată experimental de Ramsay-Shields [1]) pentru o serie de lichide, prin metoda ascensiunii capilare, ţinînd seamă de efectul Kelvin. Variaţia cu temperatura a acestei mărimi se reprezintă, cu suficientă aproximaţie, prin formula lui van der Waals:

$$\sigma_i = A\,\tau^m$$

în care $\tau = T_c - T$ ($T_c$ este temperatura critică, $T$ este temperatura respectivă a lichidului), iar $A$ şi $m$ sînt două constante. O formulă mai completă am obţinut-o eu, pintr-un raţionament termodinamic [2]:

$$\sigma_i = A\,\tau^m\, e^{-\frac{B}{\tau}}$$

în care $B$ este o constantă caracteristică lichidului considerat.

Ecuaţia de stare a interfaţei lichid/vapori a fost obţinută pentru prima oară de către R. Eötvös [3] sub forma:

$$\sigma_i\, V_m^{\frac{2}{3}} = k\,(\tau - d)$$

în care $V_m$ este volumul molecular pentru starea lichidă, iar $k$ şi $d$ sînt două constante, avînd aproximativ aceleaşi valori pentru toate lichidele normale (neasociate). Determinările lui Ramsay-Shields au arătat că formula lui Eötvös este valabilă numai la temperaturi inferioare cu cel puţin $30^0$ punctului critic. În vecinătatea acestui punct, formula lui Eötvös îşi pierde complet valabilitatea, conducînd chiar la valori negative pentru energia interfacială.

Cercetările pe care le-am efectuat între 1926 şi 1929, cu privire la natura constantei $d$ din ecuaţia lui Eötvös, m-au condus la rezultatul că, pentru starea lichidă, forţele superficiale nu se exercită într-un plan ideal, matematic, fără grosime, cum se afirmă în mod obişnuit, ci într-o

pătură de o grosime foarte mică. Suprafața acestei pături, aflată în contact cu vaporii respectivi, adică interfața, este sediul tensiunii interfaciale lichid/vapori $\sigma_i$. Iar suprafața interioară, de la baza păturei, adică supterfața, este sediul tensiunii supterficiale $\sigma$. Tensiunea superficială a lichidului crește în mod continuu în cuprinsul păturei superficiale, de la valoarea tensiunii interfaciale la aceea a tensiunii supterficiale.

Determinarea tensiunii interfaciale, prin metoda ascensiunii capilare folosește, după cum se știe, formula:

$$\sigma_i = \frac{1}{2} R h g (\delta_l - \delta_v)$$

în care R este raza tubului capilar, h este înălțimea coloanei de lichid din tub, g este accelerația gravității iar $\varrho_l$ și $\varrho_v$ reprezintă densitatea lichidului respectiv a vaporilor. După cum am arătat într-o lucrare anterioară [4] tensiunea superficială $\sigma$ se poate determina tot prin metoda ascensiunii capilare, cu ajutorul formulei:

$$\sigma = \frac{1}{2} R h g \varrho_l$$

Combinînd această formulă cu precedenta, obținem:

$$\sigma = \sigma_i \frac{\varrho_l}{\varrho_l - \varrho_v}$$

formulă care permite să calculăm tensiunea supterficială a unui lichid, cunoscînd tensiunea interfacială și densitățile $\varrho_l$ și $\varrho_v$.

În lucrarea precedentă [5] am demonstrat formula care reprezintă variația cu temperatura a tensiunii supterficiale:

$$\sigma = A(\tau + c)^m$$

în care $A$, $c$ și $m$ sînt constante caracteristice pentru starea lichidă. Această formulă se verifică foarte bine, chiar pînă în imediata vecinătate a punctului critic, unde s-au mai putut face măsurători de tensiune interfacială $\sigma_i$. În plus, formula prezintă o importanță deosebită prin aceea că permite să calculăm tensiunea superficială $\sigma_c$ a fluidelor la punctul critic.

Pe această cale am putut să determin o constantă critică, necunoscută pînă acum, al cărei ordin de mărime este de $10^{-2}$ dyn/cm$^{-1}$.

Ecuația de stare a supterfaței lichide se poate obține, după cum am arătat în lucrarea anterioară, printr-un raționament termodinamic (psichrodinamic). Admițînd că coeficentul de temperatură psichrodinamică al energiei supterficiale este o constantă:

$$\frac{d}{d\tau}(\sigma s) = k_s$$

și ținînd seamă că la punctul critic energia supterficială nu este nulă, ci are o valoare bine determinată, obținem:

$$\sigma s = k_s \tau + \varepsilon$$

care se mai poate scrie:

$$\sigma V_m^{\frac{2}{3}} = k(\tau + c) \qquad (1)$$

în care $c = \varepsilon/k_s$. Aceasta este ecuația de stare a supterfaței lichide, pentru substanțele neasociate. Ea se deosebește mult de ecuația de stare a interfaței lichide, în forma ei exactă:

$$\sigma_i V_m^{\frac{2}{3}} = K\tau e^{-\frac{L}{k\tau}}$$

așa cum am obținut-o eu în 1929 [4].

Pentru verificarea numerică a acestei ecuații de stare, am folosit datele experimentale din memoriul lui Ramsay și Shields; valorile lui $\sigma$ sînt cele date în lucrarea precedentă [5]. Rezultatele obținute sînt înscrise în tabelele de mai jos.

Aceste rezultate arată că, pentru cei șase compuși normali (neasociați, pe care i-am cercetat, ecuația de stare a supterfaței lichide se verifică foarte bine, chiar pînă la punctul critic. Din acest punct de vedere, ecuația (1) este superioară ecuației de stare a interfaței, deoarece aceasta din urmă își pierde complet valabilitatea în apropierea punctului critic.

**ETER ETILIC**

$k = 2{,}06$ $c = 0{,}21$

$t_c = 193{,}7\ ^\circ C$ $M = 74{,}08$

| $t\ ^\circ C$ | $\varrho_l$ | $\sigma$ | $\sigma V_m^{\frac{2}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | *exp.* | *calc.* |
| 20 | 0,7143 | 16,53 | 364,9 | 358,2 |
| 40 | 0,6894 | 14,13 | 319,4 | 316,6 |
| 60 | 0,6658 | 11,92 | 275,8 | 275,4 |
| 80 | 0,6402 | 9,85 | 233,9 | 234,2 |
| 100 | 0,6105 | 7,87 | 192,9 | 193,0 |
| 120 | 0,5764 | 5,95 | 151,5 | 151,8 |
| 140 | 0,5385 | 4,11 | 109,5 | 110,6 |
| 160 | 0,4947 | 2,42 | 68,2 | 69,4 |
| 180 | 0,4268 | 0,87 | 27,1 | 28,2 |
| 193,7 | 0,2636 | 0,01 | 0,43 | 0,44 |

**FORMIAT DE METIL**

$k = 1{,}97$ $c = 0{,}05$

$t_c = 214\ ^\circ C$ $M = 60{,}03$

| $t\ ^\circ C$ | $\varrho_l$ | $\sigma$ | $\sigma V_m^{\frac{2}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | *exp.* | *calc.* |
| 20 | 0,9745 | 24,66 | 384,6 | 382,3 |
| 60 | 0,9193 | 18,71 | 304,8 | 303,5 |
| 80 | 0,8803 | 15,89 | 265,2 | 264,1 |
| 100 | 0,8452 | 13,17 | 225,9 | 224,7 |
| 120 | 0,8070 | 10,53 | 186,2 | 185,3 |
| 140 | 0,7638 | 7,97 | 146,3 | 145,9 |
| 160 | 0,7136 | 5 54 | 106,4 | 106,5 |
| 180 | 0,6521 | 3,29 | 67,1 | 67,1 |
| 200 | 0,5658 | 1.20 | 26,9 | 27,7 |
| 210 | 0,4857 | 0,29 | 7,2 | 8,0 |
| 214 | 0,3490 | 0,013 | 0,10 | 0,10 |

## ACETAT DE ETIL

$k = 2{,}14$ $c = 0{,}21$

$t_c = 251{,}1\ ^{0}C$ $M = 88{,}06$

| $t\ ^{0}C$ | $\varrho_l$ | $\sigma$ | $\sigma V_m^{\frac{2}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | *exp.* | *calc.* |
| 20 | 0,9005 | 23,61 | 501,2 | 495,0 |
| 80 | 0,8245 | 16,39 | 369,0 | 366,6 |
| 100 | 0,7972 | 14,09 | 324,4 | 323,8 |
| 120 | 0,7683 | 11,91 | 281,0 | 281,0 |
| 140 | 0,7378 | 9,79 | 237,3 | 238,1 |
| 160 | 0,7033 | 7,77 | 194,5 | 195,4 |
| 180 | 0,6653 | 5,85 | 151,9 | 152,6 |
| 200 | 0,6210 | 4,02 | 109,3 | 109,8 |
| 220 | 0,5648 | 2,33 | 67,5 | 67,0 |
| 240 | 0,4778 | 0,71 | 23,0 | 24,2 |
| 245 | 0,4401 | 0,36 | 12,3 | 13,5 |
| 251,1 | 0,3089 | 0,01 | 0,45 | 0,45 |

## TETRACLORURA DE CARBON

$k = 2{,}05$ $c = 0{,}24$

$t_c = 283\ ^{0}C$ $M = 153{,}84$

| $t\ ^{0}C$ | $\varrho_l$ | $\sigma$ | $\sigma V_m^{\frac{2}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | *exp.* | *calc.* |
| 20 | 1,5940 | 25,69 | 540,5 | 539,6 |
| 80 | 1,4765 | 18,79 | 416,1 | 416,6 |
| 100 | 1,4343 | 16,60 | 374,7 | 375,6 |
| 120 | 1,3903 | 14,49 | 334,0 | 334,6 |
| 140 | 1,3450 | 12,45 | 293,4 | 293,7 |
| 160 | 1,2982 | 10,52 | 253,8 | 252,6 |
| 180 | 1,2470 | 8,62 | 213,6 | 211,6 |
| 200 | 1,1888 | 6,76 | 173,0 | 170,7 |
| 220 | 1,1227 | 4,93 | 131,0 | 129,6 |
| 240 | 1,0444 | 3,19 | 89,0 | 88,6 |
| 260 | 0,9409 | 1,52 | 45,5 | 47,6 |
| 270 | 0,8665 | 0,86 | 27,3 | 27,1 |
| 283 | 0,5560 | 0,012 | 0,50 | 0,49 |

**BENZEN**

$k = 2{,}047$ $c = 0{,}24$

$t_c = 288{,}5\ ^{\circ}C$ $M = 78{,}05$

| $t\ ^{\circ}C$ | $\varrho_l$ | $\sigma$ | $\sigma V_m^{\frac{2}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | *exp.* | *calc.* |
| 80 | 0,8127 | 20,35 | 426,8 | 427,3 |
| 100 | 0,7928 | 18,13 | 386,6 | 386,3 |
| 120 | 0,7692 | 15,87 | 345,0 | 345,4 |
| 140 | 0,7440 | 13,67 | 304,1 | 304,5 |
| 160 | 0,7185 | 11,57 | 263,4 | 263,5 |
| 180 | 0,6905 | 9,49 | 221,9 | 222,6 |
| 200 | 0,6610 | 7,58 | 182,4 | 181,6 |
| 220 | 0,6256 | 5,71 | 142,6 | 140,7 |
| 240 | 0,5852 | 3,88 | 101,3 | 99,8 |
| 260 | 0,5327 | 2,17 | 60,4 | 58,8 |
| 275 | 0,4708 | 0,95 | 28,8 | 28,1 |
| 280 | 0,4514 | 0,57 | 17,6 | 17,9 |
| 288,5 | 0,3043 | 0,012 | 0,50 | 0,49 |

**CLOROBENZEN**

$k = 2{,}03$ $c = 0{,}28$

$t_c = 360{,}1\ ^{\circ}C$ $M = 112{,}5$

| $t\ ^{\circ}C$ | $\varrho_l$ | $\sigma$ | $\sigma V_m^{\frac{2}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | *exp.* | *calc.* |
| 150 | 0,9599 | 17,80 | 426,3 | 427,1 |
| 170 | 0,9355 | 15,81 | 385,2 | 386,5 |
| 190 | 0,9091 | 13,88 | 344,7 | 345,9 |
| 210 | 0,8802 | 12,00 | 304,5 | 305,3 |
| 230 | 0,8518 | 10,18 | 264,0 | 264,7 |
| 250 | 0,8196 | 8,40 | 223,5 | 224,1 |
| 270 | 0,7835 | 6,69 | 183,4 | 183,5 |
| 290 | 0,7440 | 4,99 | 141,6 | 142,9 |
| 310 | 0,6988 | 3,51 | 103,9 | 102,3 |
| 320 | 0,6703 | 2,80 | 85,2 | 82,2 |
| 333 | 0,6274 | 1,88 | 59,9 | 55,9 |
| 360,1 | 0,3670 | 0,012 | 0,56 | 0,57 |

Cînd $\tau = 0$, obținem:

$$\sigma_c V_m^{\frac{2}{3}} = k c$$

de unde putem să calculăm tensiunea superficială $\sigma_c$ a fluidelor la punctul critic. Valoarea obținută pe această cale coincide perfect de bine cu

cea calculată în lucrarea precedentă, prin formula care reprezintă variația tensiunii supterficiale cu temperatura. Această concordanță este arătată în tabela de mai jos.

| COMPUSUL | $\sigma_c$ calculat prin : | |
|---|---|---|
| | ecuația de stare a supterfației | formula tensiunii supterficiale |
| Eter etilic | 0,010 dyn/cm | 0,010 dyn/cm |
| Formiat de metil | 0,013 | 0,013 |
| Acetat de etil | 0,010 | 0,010 |
| Tetraclorura de carbon | 0,012 | 0,012 |
| Benzen | 0,012 | 0,012 |
| Clorobenzen | 0,013 | 0,012 |

*Concluzii*

Pătura superficială a lichidelor trebuie definită nu numai prin ecuația de stare a interfației, ci și prin ecuația de stare a supterfației. Această ecuație din urmă se obține considerînd că coeficientul de temperatură al energiei supterficiale moleculare este o constantă și ținînd seamă că tensiunea supterficială la punctul critic nu este nulă, ci are o valoare perfect determinată.

Ecuația de stare a supterfației lichide se verifică numericește foarte bine, chiar pînă la punctul critic. Ea permite calcularea tensiunii superficiale $\sigma_c$ a fluidului la punctul critic, conducînd la o valoare ce coincide perfect cu cea obținutuă prin formula tensiunii supterficiale.

## BIBLIOGRAFIE

1. *Ramsay-Shields* — Zeit. phys. Chem., 12, p. 433, 1893.
2. *N. Bărbulescu* — Journal de Chimie Physique, 29, p. 418—429, 1932.
3. *R. Eötvös* — Wied. Ann. 27, p. 448, 1886.
4. *N. Bărbulescu* — Physik, Zeit. 31, p. 48—56, 1930.
5. *N. Bărbulescu* — Contribuții la studiul forțelor superficiale ale fluidelor. Buletinul Științific al Institutului de Construcții din București Nr. 1.

## УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОДПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

(Краткое содержание)

Подповерхностный слой жидкости должен быть представлен двумя уравнениями состояния, относящмися одно к слою между жидкостью и паром ; другое к подповерхности жидкости. Уравнение состояния, относящееся к подповерхности, установленное в настоящей работе, очень хорошо проверено вплоть до критической точки Оно разрешает

расчитать поверхностное натяжение жидкости, находящейся в критической точке ; полученные величины находятся в полуном соответствии с теми, что были установлены раньше, для изменения поверхностного натяжения в связи с температурой.

## L'ÉQUATION D'ÉTAT DE LA SUBTERFACE LIQUIDE

(Résumé)

La couche superficielle des liquides doit être définie par deux équations d'état, qui se rapportent à l'interface, respectivement à la subterface. L'équation d'état de la subterface, établie dans ce travail, est très bien vérifiée jusqu'au point critique. Elle permet de calculer la tension superficielle d'un fluide au point critique ; les valeurs obtenues sont en parfaite concordance avec celles trouvées antérieurement, selon la variation de la tension supterficielle avec la température.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

535.51

# DOZAREA POLAROGRAFICĂ A VITAMINEI C ÎN MORCOVI

de V. PAVLU

Interesul pe care îl prezintă dozarea micilor cantităţi de vitamină *C* (acidul ascorbic) este deosebit. Din cercetările făcute de Melitchi L. V. şi Tihmoscaia V. M. [1] rezultă că vitamina *C* participînd în mod catalitic la procesul metabolic de oxido-reducţie, măreşte valoarea nutritivă a alimentelor de proveniență vegetală. Pe de altă parte este o strînsă legătură între conţinutul de vitamină *C* şi capacitatea de conservare în stare naturală a fructelor şi legumelor, căci aceiaşi acţiune catalitică ajută procesul respiratoriu în timpul conservării, ferindu-le de alterări şi infecţiuni. Scăderea procentului de vitamină *C* în regiunile periferice în timpul conservării arată pe deoparte că aceastea participă mai mult la procesul respiratoriu în timpul conservării, iar pe de altă parte că rămîne intactă valoarea nutritivă a miezului.

In legătură cu aceasta apar o serie de probleme, dintre care cea mai interesantă( este posibilitatea de a mări conţinutul de vitamină *C* prin stimularea semințelor, problemă ce este prevăzută în planul cincinal al Academiei R.P.R. Studiile legate de aceste probleme impun dozarea vitaminei *C*, dozare ce prezintă multe dificultăţi, cum ar fi prezenţa pigmenţilor coloraţi, ce fac dificilă folosirea reacţiunilor de culoare — Marg. Mann, citat la [2] —, potenţialul mic de oxidare al vitaminei *C* 0,1 — 0,3V) care face ca ea să se oxideze uşor, imediat ce este desprinsă de mediul ei natural, dar mai ales conţinutul mic de vitamină *C* din unele fructe şi legume, cum ar fi, spre exemplu morcovul ce conţine în mod mijlociu cca 5 mg vitamină *C* la suta de grame.

Obiectul acestei lucrări este determinarea cantitativă a conţinutului de vitamină *C* în astfel de legume, ilustrate prin morcov. Ea face parte dintr-un cadru mai larg de lucrări legate de urmărirea conţinutului de vitamine în plantele comestibile în timpul culturii şi conservării şi de stimularea acestui conţinut.

Folosirea metodei polarografice pentru dozarea vitaminei *C* este avantajoasă printre altele prin faptul că:

a) Se dozează numai viamina *C*, suprapunerea altor reacţiuni de oxidare fiind uşor de recunoscut prin alterarea treptei polarografice, — W. S. Gillam, citat la [3].

b) Nu necesită manipulaţiuni prealabile, iar reactivii folosiţi sînt stabili,

c) Sensibilitatea şi precizia metodei este superioară,

d) Se pune în evidență numai vitamina *C*, nu și forma ei oxidată, acidul dehidro-ascorbic,

e) Se poate ușor verifica reproductibilitatea determinării, repetîndu-se ușor determinarea asupra aceleiași probe,

f) Înregistrarea avînd loc în mod automat are loc în mod obiectiv.

În această lucrare s-a folosit polarograful Heyrovsky tip *V* 301 cu galvanometru cu oglindă și sensibilitate maximă $0{,}8.10^{-8}$A/mm deplasare și 0,71 m distanță, executîndu-se polarizarea anod-catodică cu electrozii inversați. S-a lucrat cu celula deschisă tip Spalenka, ac. 1,9V, timp de picurare 3s, temperatura 25°C. S-a menținut temperatura constantă prin aportul constant de căldură radiantă de la un bec electric așezat în aceleași condițiuni, la aceiași distanță de celula electrolitică și alimentat cu tensiunea constantă corespunzătoare diferenței dintre temperatura ce urmează să capete celula electrolitică și temperatura mediului ambiant. Tensiunea de alimentare a becului a fost dată de o curbă etalon executată în prealabil pentru acest dispozitiv de termostatare.

În o serie de determinări prealabile s-a variat natura, concentrația și cantitatea extractantului raportată la cantitatea produsului vegetal, sensibilitatea galvanometrului și curentul de compensație, pentru a se stabili condițiunile optime de lucru.

Pentru morcovi ce au conținutul mijlociu de cca 5 mg vit.*C*%, cel mai bun extractant este acidul metafosforic 1,5% în proporție de 5 p extractant la o parte legumă. Acest raport asigură filtrarea rapidă a extrasului. Sensibilitatea maximă a galvanometrului la care treapta este citibilă este 1/7 din sensibilitatea maximă a gavanometrului. Nu s-a folosit curentul de compensație găsindu-se că nu ameliorează simțitor treapta.

S-a executat o curbă etalon (concentrația soluției de analizat în mg% vit. *C* în funcție de înălțimea treptei în cm pentru sensibilitate 1/7 din sensibilitatea maximă a galvanometrului, temperatura 25°C, timpul de picurare 3s, ac. 1,9V și m=3 mg, polarizație anod-catodică cu electrozii inversați (Fig. 1).

Tehnica de lucru. S-a tăiat și curățat (folosindu-se cuțit inoxidabil și ustensile de sticlă) 1,5 g morcov, s-a mojarat cu sticlă pisată sub 7,5 cm³ acid metafosforic 1,5%, s-a pipetat 2 cm³ filtrat în celula electrolitică, s-a adăugat 2 cm³ tampon fosforic alcătuit din 50 ml fosfat monopotasic 0,066 molar+950 ml fosfat disodic 0,066 molar cu pH=7, după G. S. Gillam citat la [3], deci diluția 1/10, s-a adăugat o picătură de gelatină 0,5% pentru stabilizarea curbei, s-a omogenizat, s-a adus temperatura celulei la 25°C cu ajutorul dispozitivului de termostatare mai sus menționat, s-a ifxat timpul de picurare la 3s în intervalul de tensiune 0,1V—0,3V la care are loc treapta vitaminei *C*. Pentru fiecare determinare s-au preparat două soluții de analizat din două exemplare diferite

executîndu-se cîte două înregistrări pentru fiecare soluție de analizat, după un control prealabil martor. S-a luat drept înălțime a treptei distanța măsurată pe verticală de la punctul de intersecție al tangentei la porțiunea anterioară a palierului cu linia mediană a palierului și punctul similar pentru curba curentului rezidual.

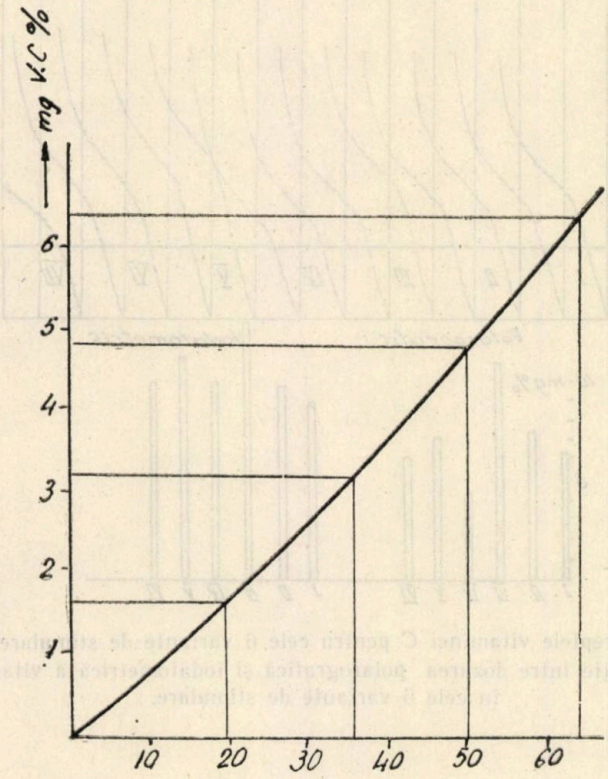



Fig. 1. — Curbă de etalonare.

Metoda aceasta a fost aplicată în următoarele trei cazuri:

I. Asupra unei culturi expeirmentale în care s-au plantat 6 sorturi de semințe de morcovi în patru repetiții, pentru a se exclude prin luare de medii influențele accidentale ale condițiunilor de teren. S-a dozat polarografic vitamina *C* în fiecare repetiție pentru fiecare sort cu verificarea perfectă a reproductibilității. Spre confruntare s-a executat în paralel și o dozare iodatometrică *(Fig. 2, Tab. 1)*.

Din datele de mai sus rezultă că:

a) În timpul vegetației vitamina *C* este în procent mijlociu de peste 5mg%. procesele metabolice fiind foarte intense,

b) În linii generale se observă un paralelism între dozarea polarografică și iodatometrică, pentru cea din urmă obținîndu-se valori superioare.

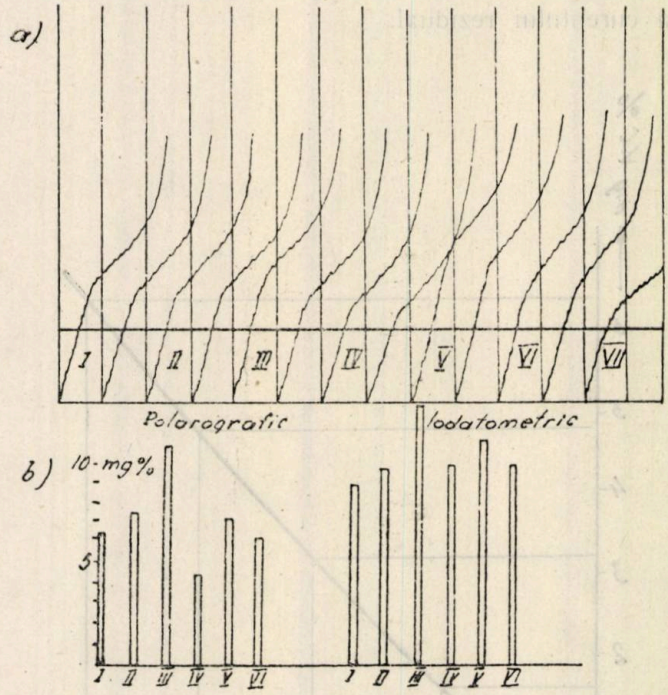



Fig. 2. — a) Treptele vitaminei *C* pentru cele 6 variante de stimulare (Rep. IV). b) Comparație între dozarea polarografică și iodatometrică a vitaminei *C* în cele 6 variante de stimulare.

Tabelul 1

**Rezultatele obținute în dozarea polarografică a celor 6 variante de stimulare**

| Repetiția | Sortul | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | V | VI |
| 1 | 1,9 mg% | 2,2 mg% | 24,5 mg% | 3,5 mg% | 5,7 mg% | 1,2 mg% |
| 2 | 9,2 „ | 12,5 „ | 9.2 „ | 7,0 „ | 14,6 „ | 8,0 „ |
| 3 | 6,2 „ | 4,7 „ | 5,0 „ | 3,0 „ | 5,0 „ | 11,5 „ |
| 4 | 7,7 „ | 5,5 „ | 7,5 „ | 0,7 „ | 14,5 „ | 7,5 „ |
| Medie | 6,25 „ | 6,2 „ | 11.55 „ | 3,5 „ | 9,9 „ | 6,5 „ |

II) Asupra unor morcovi puși la conservare în mic, cu mijloace simple. În acest scop s-au luat în octombrie exemplare medii din sortul de morcovi „Cartel", s-a dozat vitamina *C* și s-au pus la conservare a)

înfășurați în hîrtie într-o sală rece (cca 5°C), b) înfășurați în hîrtie în beciu și c) îngropați în nisip în beciu. S-a dozat polarografic din două în două săptămîni vitamina *C* în cîte două mostre din fiecare categorie cu verificarea reproductibilității, constatîndu-se variațiuni mari accidentale și în linii mari o scădere a procentului de vitamină *C*. *(Fig. 3, Tab. 2)*.

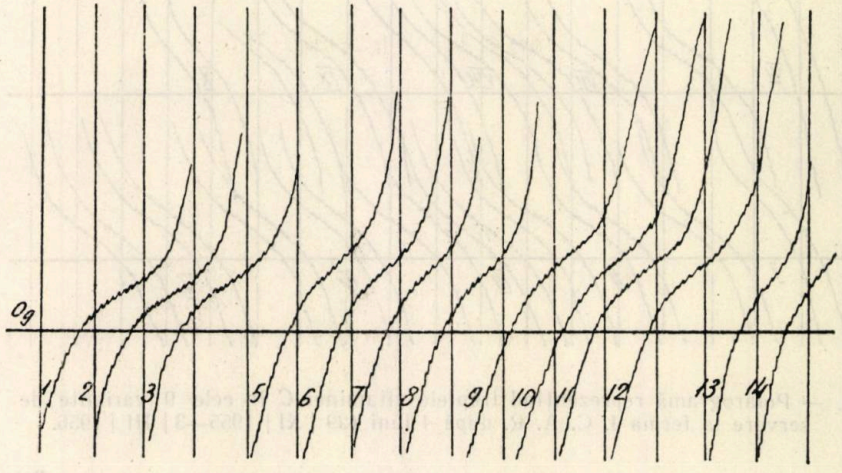



Fig. 3. — Polarogramă reprezentînd treptele vitaminei *C* în cele trei variante de conservare: 1, 2, 3, în beciu în nisip; 5, 6, 7 în beciu în hîrtie și 9, 10, 11, 12 în sală rece în hîrtie.

Tabelul 2

**Rezultatele obținute în dozarea polarografică a conținutului de vitamină *C* în cele trei variante de conservare**

| | Variante de conservare | | |
|---|---|---|---|
| După | a) | b) | c) |
| 2 săpt. | 3,75 mg% | 7,75 mg% | 4,37 mg% |
| 4 „ | 7,71 „ | 6,1 „ | 2,0 „ |
| 6 „ | 8,0 „ | 2,66 „ | 5,5 „ |
| 8 „ | 4,5 „ | 3,6 „ | 4,0 „ |
| 10 „ | 1,5 „ | 5,0 „ | 1,5 „ |
| 12 „ | 2,5 „ | 4,8 „ | 1,0 „ |
| 14 „ | 2,25 „ | 1,25 „ | 1,5 „ |
| 16 „ | 2,25 „ | 2,5 „ | 2,75 „ |
| 18 „ | 5,5 „ | 4,5 „ | 3,5 „ |
| 20 „ | 3,6 „ | 4,12 „ | 3,5 „ |

III) Asupra unor morcovi puși la conservare în nouă variante de conservare la ferma I. C. A. R. de către dir. fermei Ing. Agronom Voinea în noembrie 1955 s-a executat dozarea polarografică a vitaminei *C* din lună în lună de cinci ori, constatîndu-se scăderea procentului de vitamină *C* în special în perioada friguroasă (*Fig. 4*, Tab. 3).

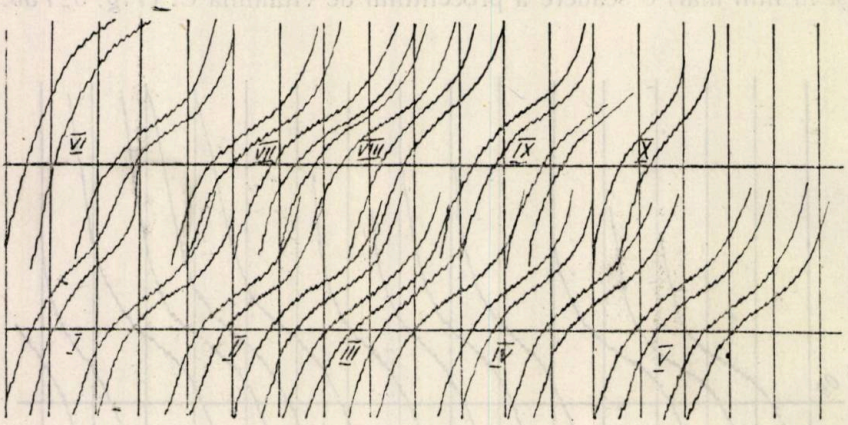



Fig. 4. — Polarogramă reprezentînd treptele vitaminei *C* în cele 9 variante de conservare la ferma I. C. A. R. după 4 luni (29 | XI | 1955—3 | III | 1956.

Tabelul 3

**Rezultatele obținute în dozarea polarografică a cõnținutului vitaminei *C* în cele 9 variante de cõnservare**

| | Variante de conservare | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| După | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX |
| 1 lună | 4,9mg% | 3,37mg% | 4,25 mg% | 9,5 mg% | 4,9 mg% | 2,( mg% | 3,0mg% | 5,0mg% | 4,25mg% |
| 2 „ | 6 „ | 3.75 „ | 4,5 „ | 7,5 „ | 3,75 „ | 3,5 „ | 4,7 „ | 2,7 „ | 2,8 „ |
| 3 „ | 2,25 „ | 4,0 „ | 6,0 „ | 6,25 „ | 4,0 „ | — „ | 7,75 „ | 4,25 „ | 5,25 „ |
| 4 „ | 8,3 „ | 1,5 „ | 0,5 „ | 1,6 „ | 0,5 „ | 11,25 „ | 2,75 „ | 2,5 „ | 3,75 „ |
| 5 „ | 2,1 „ | 3,3 „ | 3,6 „ | 2,83 „ | 2,25 „ | 2,6 „ | 5,25 „ | 5,0 „ | 11,25 „ |

*Concluzii*

a) Dozarea vitaminei *C* în concentrații mici este dificilă din cauza ușurinței cu care se oxidează. Ea se poate face polarografic ținîndu-se seamă de următoarele:

a) Prelucrarea probei pînă la înregistrarea curbei să se facă repede, lucrîndu-se mereu în aceleași condițiuni, cu același extractant, același tampon și folosindu-se același interval de timp. Să se evite contactul probelor și al soluțiilor ce conțin vitamina *C* cu corpurile ce ar putea avea o acțiune catalitică asupra oxidării vitaminei *C*,

b) Limita pînă la care poate fi mărită sensibilitatea galvanometrului este 1/7 din sensibilitatea maximă de 0,8.10—$^{8}$ A/mm deplasare și 0,7/m distanță. In aceste condițiuni rezultă pentru 1mm înălțime de treaptă

1mg vit. *C*%. Presupunînd că la citirea treptei se face o greșeală de 1/2mm, rezultă de aci o eroare de 0,5 mg vit. *C*%, deci 7,5 la proba luată. La un conținut mijlociu de 5mg% precizia relativă este de 10%.

c) Deși procentul de vitamină *C* în morcovi este foarte mic, se constată totuși variațiuni mari de la o probă la alta (analiza aceleiași probe fiind perfect reproductibilă), datorită probabil factorilor accidentali condiționați de terenul de cultură.

## BIBLIOGRAFIE

1. *Melitchi L. V.* și *Tihomscaia V. M.* — Conținutul în vitamină C al fructelor și plantelor citrice ca indice al rezistenței lor la păstrare („D.A.N.S. S.S.R.", vol. LXIX, nr. 5, pag. 659—661).

2. *Kirch. M.* — Polarographic dat. of ascorbic acid (Ind. Eng. Chem. Anal., 1941, 625—26).

3. *W. S. Gillam* — Polarographic det. of vitamin *C* in Fruits and Vegetables (Ind. Eng. Chem. 17, 217—221, 1945).

## ПОЛЯРОГРАФИЧЕСКАЯ ДОЗИРОВКА ВИТАМИНА *C* В МОРКОВИ

(Краткое содержание)

В этой работе полярографически дозируется витамин *C* в моркови. Витамин *C* содержится в этих овощах в маленяком количестве, вероятно, поэтому научная литература не касалась этого вопроса.

Особый интерес, который вызывает дозировка витамина *C*, кроме его питательных свойств, связана с его ролью б процессе сохранения моркови, а также с изучением методов, направленных к повышению качества витамина *C*, применяя метод стимулирования.

В качестве экстрагирующего вещества применяется метафосфорная кислота. Устанавливается наиболее благоприятная концентрация для экстрагирующего вещества и максимальная чувствительность гальванометра и т. д., позволяющие получить наиболее четкие полярографические кривые.

Содержание витамина *C* дозируется во время выращивания и в дальнейшем наблюдается при различных процессах сохранения.

Замечены значительные, случайные колевания во время выращивания, а также понижение этого содержания во время сохранения.

# SUR LE DOSAGE POLAROGRAPHIQUE DE LA VITAMINE C DANS LES CAROTTES

(Résumé)

Dans cet ouvrage on dose la vitamine *C* dans les carottes, légume qui contient une petite quantité de cette vitamine, contenu dont la littérature ne parle pas. L'intérêt que présente le dosage de la vitamine C est dû sauf la valeur nutritive, au rôle q'elle joue dans le procès de la conservation et à l'étude de la l'améliarioration de ce contenu par stimulation.

Ou utilise comme extractant l'acide métaphosphorique 1,5% en etablissant la concentration optima de l'extractant et la sensibilité maxima du galvanomètre, etc., quie permettent d'obtenir des courbes polarographiques lisibles. On dose le conenu de la vitamine *C* dans lens carottes pendant la culture et on observe la variation de ce contenu pendant les divers processus de coservation. On constate de grandes variations accidentaelles de ce contenu pendant la culture et la diminution du contenu pendant la conservation.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

## CHIMIE ANORGANICĂ

543.31

# METODĂ VOLUMETRICĂ PENTRU DETERMINAREA VITAMINEI $B_1$

de P. SPACU ȘI F. ROBOIU

Vitamina $B_1$ se poate doza în diferite medii biologice sau în soluții pure, prin mai multe metode bazate pe terminări fizico-chimice, volumetrice, după cum urmează:

— determinări colorimetrice [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]
— determinări polarografice [13, 14]
— determinări cromatografice [15]
— determinări volumetrice [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]
— determinări gravimetrice [24, 25]

Principiile unora din aceste metode au fost citate într-o lucrare anterioară [25].

In cele ce urmează dăm o metodă volumetrică pentru determinarea vitaminei $B_1$ prin titrare cu „cloramină *T*".

Cloramina *T* prezintă avantajul că este un produs al cărui preț de cost este mai scăzut decît al celorlalți oxidanți folosiți, economisind în același timp și consumul de iodură de potasiu.

Cloramina *T* pe care am folosit-o a fost preparată în laborator după datele din literatură (26).

*Modul de lucru:*

Se prepară o soluție de vitamină la balon cotat, se ia o cantitate măsurată peste care se adaugă în exces o soluție de cloramină *T* ($CH_3C_6H_4SO_2NNa\ Cl$), de titru cunoscut. Se alcalinizează soluția cu *Na OH 0,2* n, după 10 minute se adaugă 0,2 *g KI*, 1,5 *cmc. HCl* conc, se diluează cu apă distiliată și se titrează iodul pus în libertate cu o soluție de $Na_2S_2O_3$ *n*/ 100.

Se calculează cantitatea de cloramină *T* consumată pentru oxidarea aneurinei și deci cantitatea de aneurină.

Excesul de cloramină trebuie să nu fie prea mare căci se obțin alți produși de oxidare mult mai înaintați.

Rezultate bune s-au obținut lucrîndu-se cu exces de 1,5—2 ori mai mult decît cantitatea necesară reacției, iar soluțiile de cloramină *T* și $Na_2S_2O_3$ erau *n*/ 100.

In felul acesta la un mol de vitamină $B_1$ se consumă 2 moli cloramină *T*, corespunzînd la 4 atomi iod.

1 cmc cloramină *T n*/ 100 corespunde la 0,0008428 g vitamină $B_1$.

| Nr. crt. | Vit. $B_1HCl$ g (teoretic) | cmc. clor. *T* *n*/100 (cmc x *F*) | Consum clor. *T* cmc *n*/100 | Vit. $B_1HCl$ g (găsit) | Diferenţa g |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00192 | 4,016 | 2,325 | 0,00196 | +0,00004 |
| 2 | 0,00206 | 4,523 | 2,507 | 0,00211 | +0,00005 |
| 3 | 0,00310 | 6,785 | 3,596 | 0,00303 | —0,00007 |
| 4 | 0,00363 | 7,916 | 4,365 | 0,00367 | +0,00004 |
| 5 | 0,00414 | 9,047 | 4,995 | 0,00421 | +0,00007 |
| 6 | 0,00466 | 10,178 | 5,524 | 0,00465 | —0,00001 |
| 7 | 0,00473 | 10,673 | 5,836 | 0,00472 | —0,00001 |
| 8 | 0,00518 | 11,309 | 6,053 | 0,00510 | —0,00008 |
| 9 | 0,00621 | 13,570 | 7,312 | 0,00616 | —0,00005 |
| 10 | 0,00673 | 14,701 | 8,182 | 0,00680 | +0,00007 |

*Observaţiuni:* Pentru a obţine rezultate concordante nu se va lucra cu exces prea mare de cloramină *T*, iar soluţiile folosite să fie *n*/100 pentru ca eroarea la picătură să fie cît mai mică.

*Laboratorul de chimie anorganică şi analitică*
*Institutul Politehnic Bucureşti*

## BIBLIOGRAFIE

1. Rec. trav. chim. Pays Bas 55,046 — (1936), Zeitschr. f. vitaminforschung 7,239 — (1938).
2. Helv. chim. Acta 20,369,1147 — (1937).
3. Biochemic. Journ. 31,1958 — (1937).
4. Klin. Wschr. 17,1246 — (1938).
5. *A. Mukherji* — J. Indian chem. soc. 16,273—80 Iuni (1939), Calcuta.
6. *Paul Meunier şi Claude Blancpain* — Bull. Soc. Chim. Biol. 21,649—664 Mai (1939) — Paris Instit. Pasteur.
7. Tidsskr Kjemi, Bergves. Metallurgi 2,39 — Apr. (1942).
8. *K. T. Farrer* — (Austral Chem. Inst. Y. Proc. 8,22 — 30 (1941) Ian.).
9. *Yosito Sakura, Tyoten Inagahi şi Sizn Omori* — (J. Agric. Chim. Soc. Japan, Bull, 16,79 — Apr. (1940) — Meiji Sugar Co.
10. *C. W. Ballard şi E. J. Ballard* — J. Pharm. Pharmacol. 1 (330—3) (1949).
11. *W. Stepp, J. Kuhnau* şi *H. Schroeder* — Vitaminele şi aplicaţia lor clinică — Sibiu (1940).
12. *Kinnersley-Peters* — Bioch. Journal 28,667 — (1934); 2369 — (1935), 32, 1516 — (1938).
13. *G. Surtori şi C. Cattaneo* — Gazz. Chim. ital. 74,166 — 80 (1944).
14. *Ernst Günther* — Univ. Halle. Pharmazie 6,577—82 (1951).
15. *Komei Miyoki, Hamako Moniyama* şi *Makato Hayaschi* — Chiba Univ. — J. Phar. Soc. Japan 72,688—92 (1952).
16. *H. Wachsmuth* — Bull soc. chim. Belges 56,261—7 (1947).
17. *Gonzalo Gurmedi Robles* — Rev. facultad farm. y bioquim. Univ. San Marcos (Lima Peru) 10,173—8 (1948).

18. *Charles W. Pifer şi Ernest G. Wollish* — *Hoffman — La Roche, Inc. Nutley, N. J.* — J. Am. Pharm. Assoc. 40,609—13 (1951).
19. *S. J. Prokhovnik* — Analyst 77,257—9 (1952).
20. *K. H. Slotta şi Klaus Neisser* — Ber. 71 B, 1984—6 (1938).
21. *Suklamoy Bhattacharya şi Suresh Chandra Banerjee* — (Bengal Immunity Research Inst. Calcutta) — J. Proc. Inst. Chemista (India) 24,213—18 (1952).
22. *Chozo Yoshimura* — Kinki Univ. Osaka) — J. Chem. soc. Japan, Pure chem. Sect. 74,992—4 (1953).
23. *A. Del Pozo-Galenica Acta* — Madrid 3,221—48 (1950).
24. *Dr. Laurenţiu Chiosa şi Dr. M. Neuman* — Vitaminele şi antivitaminele, Buc. (1955).
25. *P. Spacu, F. Roboiu* — Metodă grav. pt. det. vit. $B_1$. Lab. de Ch. anorg. şi anal — I.P.B.
26. *H. O. Dakin* — Proc. Royal Soc. London, Seria B. 89 232—251.

## ОБЧЕМНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИТАМИНЫ $B_1$

(Краткое содержание)

Абторы обьемно определяют витамины $B_1$ путем окисления избыточным количеством хлорамина *T* в щелочной среде, Они добавляют *KI* в кислую среду; освобожденный иод титрируется раствором $Na_2S_2O_3$ *n*/100.

1 куб см хлорамина *T* *n*/100 соответствует 0,0008428 вит $B_1$.

Преимущество метода заключается в том, что используются обыкновенные и дешевые реактивы,

## METHODE VOLUMETRIQUE POUR DETERMINER LA VITAMINE $B_1$.

(Résumé)

Les auteurs déterminent la vitamine $B_1$ à l'aide d'une méthode voiumétrique, en l'oxydant avec un excès de chloramine *T* ($CH_3C_6H_4SO_2$ *NNa Cl*), en solution alcaline.

On ajoute 0,2 g KI et 2 cmc Hcl et ensuite on titre l'iode mis en liberté avec une solution de $Na_2S_2O_3$ *n*/100.

1 cmc chloramine *T* *n*/ 100 correspond a 0,0008428 g vitamine $B_1$.

La méthode présente l'avantage d'utiliser dens réactifs courants et convenables.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

543.31

# METODĂ GRAVIMETRICĂ PENTRU DETERMINAREA VITAMINEI $B_1$

de P. SPACU, F. ROBOIU, M. BRAŞOVEANU

Importanța fiziologică a vitaminei $B_1$ (aneurină, thiamină) a determinat numeroase cercetări în vederea stabilirii unor metode exacte pentru dozarea ei în diferite medii biologice sau în soluții pure.

O serie de metode se bazează pe oxidarea aneurinei cu diferiți oxidanți pînă la thiocrom, substanță colorantă galbenă, cu fluorescență albastră în ultraviolet.

Astfel, metoda preconizată de Jansen [1] întrebuințează ca oxidant $K_3$ $(Fe$ $(CN)_6)$, iar thiocromul este extras cu alcool isobutilic și soluția colorimetrată.

Determinarea fluorescenței se face sub lampa de cuarț prin comparație cu o serie de soluții standard (P. Karrer) [2], în fluorometrul lui Cohen [3], cu fotometrul gradat (H. Otto — F. Rühmekorb) [4] cu fotometrul Pulfrich [5], sau cu electrofotometru [6].

Valentin Fürst junior [7] dozează aneurina din diferite produse oxidînd-o tot cu $K_3$ $(Fe$ $(CN)_6)$ în atmosferă de $N_2$, iar înainte de colorimetrare face o adsorbție pe franconită.

H. Wachsmuth [8] dozează volumetric thiamina utilizînd exces de $K_3$ $(Fe$ $(CN)$ $_6)$, exces determinat prin adăugare de $ZnI_2$ și titrarea $I_2$, pus în libertate, cu $Na_2S_2O_3$.

Excesul de oxidant îl mai determină prin titrare cu indigo-carmin; o altă metodă volumetrică se bazează pe reacția între $K_4(Fe(CN)_6$ rezultată din reacția de oxidare a aneurinei cu $K_3(Fe(CN)_6)$, și sulfatul ceric.

Gonzalo Gurmedi Robles [9] determină thiamina iodometric, stabilind că 1 mol vitamină $B_1$ consumă *6* echivalenți iod la $0^0$ în mediu alcalin.

Charles W. Pifer și Ernest G. Wollish [10] oxidează aneurina cu acid percloric, iar S. J. Prokhovnik [11] utilizează $HgCl_2$ ca oxidant.

Slotta și Neisser [12] oxidează aneurina cu hipoiodit, stabilind că aceasta fixează prin oxidare 12 atomi de iod, iar Suklamoy Bhattacharya și Suresh Chandra Banerjee [13] stabilesc condițiile optime de lucru atît în cazul folosirii $K_3(Fe(CN)_6)$ cît și a hipoiditului ca oxidanți.

Metoda preconizată de Chozo Yoshimura [14] se bazează pe reducerea soluției de clorhidrat de aneurină în soluție acidulată cu $H_2SO_4$, în atmosferă de $CO_2$ cu $Zn$ amalgamat. $H_2S$ rezultat prin ruperea lanțului

thiazolic este determinat cantitativ prin adăugare de $KI+I_2$, titrîndu-se excesul de $I_2$ cu $Na_2S_2O_3$.

Literatura indică mai multe metode de determinare ale aneurinei, bazate pe reacţii de culoare, pe care le dau compuşii de vitamină $B_1$ şi sărurile de diazoniu a numeroşi compuşi ca: acid sulfanilic, paraaminoacetofenonă [15, 16, 17] 2, 4, dicloranilină [18].

Astfel testul azoformaldehidic al lui Kinnersley-Peters [19] se bazează pe faptul că, într-o soluţie de hiodroxid de sodiu, conţinînd carbonaţi de o compoziţie dată, vitamina dă cu acidul diazobensulfonic, o culoare roşie specifică, care se stabilizează prin adăugare de $HCHO$. Coloranţii obţinuţi se extrag cu ajutorul solvenţilor organici şi se colorimetrează în paralel cu un standard tratat similar.

Aceste metode sînt mai puţin sensibile decît cele fluorometrice şi se folosesc mai puţin la materiale bogate în proteine şi sărace în vitamine, deoarece marile cantităţi de aminoacizi rezultate tulbură adsorbţia la coloana de zeolit a vitaminei $B_1$.

Aneurina mai poate fi determinată prin metode polarografice, ca cea indicată de G. Sartori şi C. Cattaneo [20] sau cea a lui Ernst Günther [21], sau cu ajutorul hîrtiei cromatografice [22].

Ca metodă gravimetrică se citează precipitarea aneurinei cu $K\ (BiI_4)$ [23].

A. Del Pozo [24] evaluează cantitativ vitamina $B_1$ disolvînd complexul rezultat, din reacţia dintre vitamina $B_1$ şi sare Reinecke, în acetonă şi dozează volumetric sarea Reinecke cu exces de $AgNO_3$, exces determinat prin titrare cu $NH_4SCN$, avînd ca indicator alaunul feric.

În cele ce urmează dăm o metodă gravimetrică pentru determinarea vitaminei $B_1$, prin precipitare cu tetratiocianatodiaminocromatul de amoniu: $NH_4\ [Cr(SCN)_4(NH_3)_2].\ H_2O$.

Înainte de a stabili condiţiile de lucru ale metodei am procedat la analiza precipitatului roz-violaceu care se obţine prin tratarea unei soluţii de vitamină $B_1$ cu o soluţie de $NH_4[Cr(SCN)_4(NH_3].H_2O$, în mediu acetic, soluţia avînd $pH$-ul 2,6.

Analiza substanţei ne-a condus la următoarele rezultate:

| Nr. crt. | Complex g | $Cr_2O_3$ g | Cr g | Cr % găsit | Cr % teoretic | Diferenţa % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.2408 | 0,0393 | 0,0269 | 11,17 | 11,29 | 0,12 |
| 2 | 0,2315 | 0,0380 | 0,0260 | 11,23 | 11,29 | 0,06 |
| 3 | 0.0704 | 0,0116 | 0,0079 | 11,27 | 11,29 | 0,02 |

| Nr. crt. | Complex g | $BaSO_4$ g | S g | S % găsit | S % teoretic | Diferenţa % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0447 | 0,1016 | 0,01396 | 31,23 | 31,31 | 0,08 |
| 2 | 0,0411 | 0,0935 | 0,01280 | 31,12 | 31,31 | 0,19 |

Prin urmare reacția dintre clorhidratul de aneurină și $NH_4[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]H_2O$ are loc după următoarea reacție:

$$C_{12}H_{17}ON_4SCl \cdot HCl + 2\,NH_4[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]H_20 =$$
$$= C_{12}H_{17}ON_4S[Cr(SCN)_4(NH_3)_2] \cdot H[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]H_20 +$$
$$+ 2\,NH_4Cl + H_20$$

Deoarece combinația rezultată între vitamina $B_1$ și tetratiocianatul-diaminocromatul de amoniu $NH_4[Cr(SCN)_4(NH_3)_2].H_2O$ este întrucîtva solubilă în apă ca și în alcool pentru a obține rezultate cît mai exacte, trebuie lucrat în condițiile de mai jos.

*Modul de lucru:* Se cîntărește o cantitate de clorhidrat de aneurină, între 0,04—0,1 g, care se dizolvă în apă, aducîndu-se la semn într-un balon cotat de 100 cmc. Soluția se stabilizează cu cîteva picături de $CH_3COOH$. Se ia o cantitate măsurată de soluție într-un pahar de 100 cmc, se acidulează cu $CH_3COOH$ pînă la $pH=2{,}6$ și se face precipitarea la temperatura camerii cu o soluție de reactiv în exces (cam de 10—20 ori mai mult decît cantitatea de vitamină prezentă în soluție). Se formează un precipitat cristalin roz-violaceu, care după aproximativ o oră se filtrează prin creuzet de porțelan filtrant ($A_2$), se antrenează precipitatul cu o soluție de reactiv 0,05%, iar final se spală cu 1—2 cmc apă distilată. Se usucă la etuvă la 105° timp de ½ oră, apoi se ține în vid în exicator ½ oră și se cîntărește. Se lucrează la un volum total de 50 cmc.

In determinările făcute s-a constatat că la volume mari și la temperatură ridicată precipitarea nu este cantitativă.

Spălarea precipitatului se poate face final cu 1—2 cmc amestec alcool-eter (1:8), totuși uscarea se va definitiva la etuvă. Factorul de conversiune este 0,3661.

| Nr. crt. | Vit. $B_1 \cdot HCl$ g (teoretic | Complex g | Vit. $B_1 \cdot HCl$ g (găsit) | Diferența g |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,01451 | 0,0398 | 0,01457 | + 0,00006 |
| 2 | 0,01116 | 0,0306 | 0,01120 | + 0,00004 |
| 3 | 0,01756 | 0,0476 | 0,01743 | — 0,00013 |
| 4 | 0,01756 | 0,0476 | 0,01743 | — 0,00013 |
| 5 | 0,01756 | 0,0476 | 0,01743 | — 0,00013 |
| 6 | 0,01105 | 0,0299 | 0,01094 | — 0,00011 |
| 7 | 0,01105 | 0,0300 | 0,01098 | — 0,00007 |
| 8 | 0,01115 | 0,0302 | 0,01106 | — 0,00009 |
| 9 | 0,01418 | 0,0382 | 0,01399 | — 0,00019 |
| 10 | 0,01075 | 0,0292 | 0,01069 | — 0,00006 |
| 11 | 0,01319 | 0,0356 | 0,01303 | — 0,00016 |
| 12 | 0,01319 | 0,0356 | 0,01303 | — 0,00016 |
| 13 | 0,01319 | 0,0358 | 0,01312 | — 0,00007 |
| 14 | 0,02091 | 0,0566 | 0,02072 | — 0,00019 |

După cum se observă, evaluarea gravimetrică a dus la rezultate bune, obținîndu-se erori între +0,3% și — 1,3%.

*Observaţiuni:* La dozarea gravimetrică se va ţine seama de următoarele condiţii de lucru: precipitarea se va efectua la $pH=2,6$, la un volum total de 50 cmc, la temperatura camerii, iar spălarea precipitatului se va face cu 1—2 cmc apă dinstilată şi uscarea la etuvă.

*Laboratorul de chimie anorganică şi analitică*
*Institutul Politehnic Bucureşti*

## BIBLIOGRAFIE

1. Rec. trav. chim. Pays Bas 55,1046 — (1936). Zeitschr. f. vitaminforschung 7,239 — (1938).
2. Helv. chim. Acta 20,369,1147 — (1937).
3. Biochemic. Journ. 31,1958 — (1937).
4. Klin. Wschr. 17,1246 — (1938).
5. *A. Mukherji* — J. Indian chem. soc. 16,273—80 Iuni (1939), Calcuta.
6. *Paul Meunier şi Claude Blancpain* — Bull. Soc. Chim. Biol. 21,649—664 Mai (1939) — Paris Instit. Pasteur.
7. Tidsskr Kjemi, Bergves. Metallurgi 2,39 — Apr. (1942).
8. *H. Wachsmuth* — Bull. soc. chim. Belges 56,261—7 (1947).
9. *Gonzalo Gurmedi Robles* — Rev. facultad farm. y bioquim. Univ. San Marcos (Lima Peru) 10,173—8 (1948).
10. *Charles W. Pfizer şi Ernest G. Wollish Hoffman — La Roche, Inc, Nutley N. J.* — J. Am. Pharm. Assoc. 40,609—13 (1951).
11. *S. J. Prokhovnik* — Analyst 77,257—9 (1952).
12. *K. H. Slotta şi Klaus Neisser* — Ber. 71 B, 1984—6 (1938).
13. *Suklamoy Bhattacharya şi Suresh Chandra Banerjee* — Bengal Immunity Research Inst. Calcutta — J. Proc. Inst. Chemista (India) 24,213—18 (1952).
14. *Chozo Yoshimura* — Kinki Univ. Osaka — J. Chem. soc. Japan, Pure Chem. Sect. 74,992—4 (1953).
15. *K. T. Farrer* — Austral Chem. Inst. Y. Proc. 8,22—30 (1941) Ian.
16. *Yosito Sakura, Tyoten Inagaki şi Sizn Omori* — J. Agric. Chim. Soc. Japan, Bull. 16,79 Apr. (1940) Meiji Sugar Co.
17. *C. W. Ballard şi E. J. Ballard* — J. Pharm. Pharmacol. 1 330—3 (1949).
18. *W. Stepp, J. Kuhnau şi H. Schroeder* — Vitaminele şi aplicaţia lor chimică — Sibiu (1940).
19. *Kinnersley-Peters* — Bioch. Journal 28,667 (1934); 29,2369 (1935) 32,1516 (1938).
20. *G. Sartori şi C. Cattaneo* — Gazz. Chim. ital 74,166—80 (1944).
21. *Ernst Günther* — Univ. Halle — Pharmazie 6,577—82 (1951).
22. *Komei Miyaki, Homako Momiyama şi Makato Hayashi* — Chiba Univ. — J. Pharm. Soc. Japan 72,688—92 (1952). 6
23. *Dr. Laurenţiu Chiosa şi Dr. M. Neuman* — Vitaminele şi antivitaminele. Buc. 1955.
*A. Del Pozo* — Galenica Acta (Madrid) 3,221—48 (1950).

## ВЕСОВОЙ МЕТОД ДОЗИРОВКИ ВИТММИНА $B_1$

(Краткое содержание)

Авторы предлагают метод весовой дозировки витамина $B_1$ в чистых растворах витамина. Витамин осаждается раствором тетратиогианистодиаминохромата аммония.

$NH_4\,[Cr\,(SCN)_4\,(NH_3)_2]\,H_2O$ при $pH = 2{,}6$ (уксусной кислоты).

Берут определенное количество раствора витамина и его осаждают при 18 °C с избыточным водным раствором реактива.

Спустя час фильтруют розово-фиолетовый кристаллический осадок через фильтрующий тигель ($A_2$),

Осадок уносится 0,05 % раствором реактива, а затем промывается 1-2 с. м., дистиллированной воды. Осадок просушивается в выпарителе при 105° в течении 30 минут, ставят тигель в эксикатор и стриия 30 минут взвешивают тигхель и вычисляется вес витамина. Фактором пересчёта служит 0,3661,

## UNE MÉTHODE GRAVIMÉTRIQUE POUR LE DOSAGE DE LA VITAMINE $B_1$.

(Résumé)

Les auteurs donnent une méthode gravimétrique pour le dosage de la vitamine $B_1$ en solutions pures de vitamine.

On la précipite avec une solution de tetrathiocianatodiaminochromate d'ammonium ($NH_4[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]H_2O$), à un $pH$=2,6 (l'acide acétique).

On utilise une quantité déterminée de solution de vitamine es on la précipite à 18°C. avec une soluiton aqueuse de réactif en excès. Après une heure, on filtre le précipité cirstalin rose-violacé, à travers un creuset filtrant ($A_2$). Le précipité est entraîné avec une solution de réactif 0,05% et ensuite est lavé avec 1—2 cmc d'eau distillée. On sèche le précipité à l'étuve à 105°, pendant 30 minutes, on met le creuset dans le dessicateur et après 30 minutes on pèse le creuset et on déduit le poids de la vitamine.

Le facteur de conversion est 0,3661.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

543.31

# O METODĂ NOUĂ PENTRU DETERMINAREA GRAVIMETRICĂ A ACRIDNEI

de P. SPACU, M. BRAŞOVEANU şi F. ROBOIU

Utilizarea acridinei şi a derivaţilor ei pe scară largă în industria farmaceutică şi a coloranţilor, a dus la necesitatea găsirii unor metode de dozare.

În literatură sînt citate -de *Karl Winterfeld* [1]- cîteva metode de recunoaştere a acridinei sub formq de săruri ca: citrat, oxalat etc. care pot servi drept metode de identificare şi nu de determinare cantitativă.

Acridina are proprietatea de a forma o serie de complecşi ce sînt utilizaţi cu succes în analiza microchimică. Această metodă este descrisă amănunţit de *A. Langer* [2].

Cu ajutorul acridinei -*J. Fidler* [3]- a stabilit o metodă de dozare gravimetrică pentru: vanadaţi, cromaţi, molibdaţi şi wolframaţi.

Metodele cantitative de dozare a acridinei, indicate în literatură, sînt numai metode volumetrice. Astfel: *D. I. Chmelewski şi I. I. Owtschinnikowa* [4] au determinat acridina prin titrare cu acid sulfuric n/10, în soluţie alcoolică, în prezenţă de sulfit de sodiu şi folosind ca indicator fenolftaleina.

Deasemenea *A. Bollinger* [5] a găsit o metodă volumetrică de dozare a combinaţiilor acridinei, prin precipitare cu un exces de acid picric şi retitrarea excesului cu o soluţie de albastru de metilen.

Scopul prezentei lucrări a fost găsirea unei metode gravimetrice de dozare a acridinei. În acest sens am întrebuinţat ca reactiv, sarea lui Reinecke [7], tetratiociano-diamino-cromiatul de amoniu: $[Cr(NH_3)_2(SCN)_4]NH_4$

## 1) RECUNOAŞTEREA ACRIDINEI

Tratînd o soluţie diluată de acridină în mediu de acid acetic, cu o soluţie apoasă, proaspăt preparată, de sare Reinecke se formează un precipitat galben cristalin.

Analiza acestui compus a dus la următoarele rezultate:

| *Găsit* | *Calculat pentru* $\left[Cr\begin{matrix}(SCN)_4\\(NH_3)_2\end{matrix}\right]HAcr.$ |
|---|---|
| $Cr$ % = 10,51 | $N$ % = 19,66 |
| $N$ % = 19,60 | $Cr$ % = 10,43 |

Determinarea cantitativă a cromului s-a făcut prin calcinarea substanței, mai întîi la flacără și apoi la cuptor, rezultînd astfel oxid cromic.

Pentru determinarea azotului s-a lucrat cu metoda *Kjeldahl,* modificată după *A. Elek și H. Sobotka* [6] : desagregarea compusului se face mai întîi cu 25 cmc acid sulfuric conc. și cu glucoză (la 1 parte substanță 20 părți glucoză) la rece timp de 24 ore și apoi 5 ore la cald. Se adaogă după aceia sulfat de potasiu și sulfat de cupru și se continuă încălzirea circa 16 ore, după care se execută determinarea azotului, după metoda Kjeldahl.

Deci acridina reacționează în mediu acid cu sarea Reinecke după reacția :

$$\text{Acr} + CH_3COOH + \left[Cr\begin{matrix}(SCN)_4\\(NH_3)_2\end{matrix}\right]NH_4 =$$

$$= \left[Cr\begin{matrix}(SCN)_4\\(NH_3)_2\end{matrix}\right]H\,\text{Acr} + CH_3COONH_4$$

## 2) DETERMINAREA CANTITATIVĂ A ACRIDINEI

Compusul Reinecke se prepară după metoda *O. T. Cristensen* [7], dintr-un amestec de biocromat de amoniu și tiocianat de amoniu. Apoi se purifică substanța prin recristalizare din apă cu soluții concentrate de clorură de amoniu.

Soluția de acridină se prepară disolvînd 1 g de acridină pură în 250 cmc de apă distilată, la care se adaogă și acid acetic.

Reactivul de precipitare se obține disolvînd la rece 0,3 g sare Reinecke în 30 cmc apă și filtrînd soluția obținută.

*Modul de lucru.* La 10 cmc din soluția de acridină (4‰) diluată cu 100 cmc apă distilată se adaogă soluția de reactiv, picătură cu picătură, sub agitare continuă, în timp de 10—15 minute, menținînd soluția la cald cît durează precipitarea. Rezultă astfel un precipitat galben cristalin, care se filtrează la rece după 1 oră, printr-un creuzet filtrant ($A_2$) antrenîndu-se tot precipitatul cu filtratul. Deoarece precipitatul este parțial solubil în apă, spălarea se face cu o soluție spălătoare proaspăt preparată astfel :

La 250 cmc de apă distilată se adaogă 0,13 g sare Reinecke și 2 cmc acid acetic. La spălarea probelor se folosesc cantități variabile din această soluție, iar la urmă se spală de 2 ori cu cîte 1 cmc de apă distilată.

Deoarece precipitatul este solubil în alcool și eter uscarea nu se poate face prin acest mijloc. Precipitatul se usucă mai întîi 30' în exicator, în vid, și apoi 30' în etuvă la 105°; după o răcire de 30' se cîntărește.

Pentru verificarea titrului soluției s-a purificat acridina în 2 moduri : printr-o dublă recristalizare a substanței dintr-o soluție de alcool și apă și printr-o antrenare cu vapori.

În tabloul ce urmează sînt trecute cîteva din rezultatele obținute, cu ajutorul metodei propuse.

| Soluție Acr. cmc | Acridină conținută g | $\left[Cr\begin{matrix}(SCN)_4\\(NH_3)_2\end{matrix}\right]HAcr$ g | Acridină găsită g | Diferență g |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,04240 | 0,1196 | 0,04297 | + 0,00057 |
| 10 | 0,04240 | 0,1198 | 0,04304 | + 0,00064 |
| 10 | 0,04240 | 0,1198 | 0,04304 | + 0,00064 |
| 10 | 0,04240 | 0,1197 | 0,04300 | + 0,00060 |
| 10 | 0,04240 | 0,1197 | 0,04300 | + 0,00060 |
| 10 | 0,04254 | 0,1202 | 0,04318 | + 0,00064 |
| 10 | 0,04254 | 0,1202 | 0,04318 | + 0,00064 |
| 10 | 0,04254 | 0,1203 | 0,04322 | + 0,00068 |
| 10 | 0,04254 | 0,1208 | 0,04340 | + 0,00086 |
| 10 | 0,04050 | 0,1118 | 0,04017 | + 0,00033 |
| 10 | 0,04050 | 0,1118 | 0,04017 | + 0,00033 |
| 10 | 0,04200 | 0,1151 | 0,04135 | — 0,00065 |
| 10 | 0,04050 | 0,1120 | 0,04024 | — 0,00026 |
| | 0,03872 | 0,1095 | 0,03934 | + 0,00062 |
| | 0,03872 | 0,1093 | 0,03927 | + 0,00055 |
| | 0,04025 | 0,1116 | 0,04010 | — 0,00015 |
| | 0,04025 | 0,1115 | 0,04006 | — 0,00019 |
| | 0,04025 | 0,1117 | 0,04013 | — 0,00012 |

Încercînd precipitarea și în mediu puternic acid — folosind cantități variabile de acid clorhidric — se constată că metoda este aplicabilă și în acest caz; la aciditate mai mare se observă o ușoară solubilizare a precipitatului obținut.

| Soluție Acr. cmc | Acridină conținută g | $HCl$ adăogat cmc | $\left[Cr\begin{matrix}(SCN)_4\\(NH_3)_2\end{matrix}\right]HAcr$ g | Acridină găsită g | Diferența g |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,04025 | 0,5 | 0,1115 | 0,04006 | — 0,00019 |
| 10 | 0,04025 | 1 | 0,1115 | 0,04006 | — 0,00019 |
| 10 | 0,04025 | 1,5 | 0,1116 | 0,04010 | — 0,00015 |
| 10 | 0,04025 | 2 | 0,1110 | 0,03988 | — 0,00037 |

Dozarea gravimetrică a acridinei, după metoda descrisă, este rapidă și precisă. Folosind un reactiv ieftin și ușor de preparat se obține un compus cu greutate moleculară mare, ceea ce dă un factor de transformare avantajos, deci mărește exactitatea metodei. Precipitatul obținut este foarte puțin solubil, mărind astfel sensibilitatea metodei și ușurînd condițiile de lucru.

Avantajul metodei propuse constă în faptul că precipitarea este posibilă și în mediu de acid clorhidric.

*Laboratorul de Chimie anorganică și analitică*
*Institutul Politehnic București*

## BIBLIOGRAFIE

1. *Karl Winterfeld* — Ger. 553, 281 Nov. 5—1929.
„ „ „ Apr. 16—1930.
2. *A. Langer* — Mikrochemie 25, 71—81 (1938).
3. *J. Filder* — — Munic. Chem. Inst. Prague; Collection Czechoslov. Chem. Communs 14 645 —54—1949.
4. *W. I. Chmelewski şi I. I. Owtschinnikowa* — Promî lenosti organicescoi himii— 7; 626 — 27 Nov. 1940.
5. *A. Bellinger* — Chemisches Zentralblatt —1941, 2002.
6. *A. Elek şi Sobotka* — Journ. of the Am. Chem. Soc. 50 (1926) p. 501.
7. *O. I. Cristensen* —I. f. prakt. Chem. 1892 — 45, 213, 356.

## НОВЫЙ МЕТОД ГРАВИМЕТРИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ АКРИДИНЫ

(Краткое содержание)

В данной работе абторы излагают метод гравиметрического определения акридина в виде сложного соедеинения : $[Cr\ (NH_3)_2\ (SCN)_4]$ *H Acr*, употребляя в виде реактива Ренетову соль $[Cr\ (NH_3)_2\ (SCN)_4]\ NH_4$.

Метод работы следующий : водянистый расмвор акридина, подкисленный уксусной кислотой, обрабатывается в теплом виде свежим раствором Ренетовой соли (которая содержит приблизительно в 8 раз больше реактива чем акридина). Образовавшийся желтый кристалический ссадок фильтруется через час в холодном состоянии—через тигель для фильтрирования и обмывается раствором содержащим :

(0,13 гр на 250 см³ воды) и 2 см³ уксусной кислоты а затем обмывается дистилированной водой.

Так как осадок растворяеся в алкоголе и эфире сушка производится в эксикаторе и потом в сушильном шкафу при 105°.

Преимущество метода состоит в том, что этим методом можно быстро и точно дозировать акридину, даже в более кислой среде, в виде химического соединения которое можно получить легко в обычных условиях.

## UNE NOUVELLE MÉTHODE DE DÉTERMINATION GRAVIMÉTRIQUE DE L'ACRIDINE

(Résumé)

Dans la présente note les auteurs donnent une méthode pour la détermination gravimétrique de l'acridine, sous forme de la combinaison complexe: $[Cr\ (NH_3)_2(SCN)_4]$ H Acr., en utilisant comme réactif le sel de Reinecke : $[Cr\ (NH_3)_2\ (SCN)_4]\ NH_4$

La méthode est la suivante : une solution aqueuse d'acridine, acidulée avec de l'acide acétique, est traitée à chaud avec une solution fraichement préparée de sel de Reinecke, (qui continent huit foix plus de sel Reinecke que d'acridine).

Le précipité cristallin, jaune, este filtré à froid, au bout d'une heure à l'aide d'un creuset filtrant. Comme ce précipité est partiellement soluble, le lavage s'effectue à l'aide d'une solution qui contient 0,13 g de sel de Reinecke et 2 cmc d'acide acétique dans 250 cmc d'eau distillée ; ensuite on lave encore deux fois en employant chaque fois un centimètre cube d'eau distillée. On sèche le précipité dans un dessicateur, dans le vide, et ensuite dans une étuve à 105°, le précipité étant soluble dans l'alcool et l'éther.

L'avantage de cette méthode consiste en ce qu'elle permet le dosage rapide et précis de l'acridine, même dans un milieu assez fortement acide.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

# O METODĂ NOUĂ VOLUMETRICĂ DE DOZARE A METIONINEI

de P. SPACU ȘI V. SPIRIDONESCU

Pentru dozarea metioninei se cunosc o serie de metode bazate pe principii diferite, dintre care citãm pe cele mai importante:

Metoda cea mai veche se bazează pe acțiunea acidului iodhidric concentrat asupra grupării metilice a metioninei. Iodul conținut în iodura de metil este precipitat cu o soluție titrată de azotat de argint, iar excesul de azotat de argint este dozat cu o soluție de tiocianat de potasiu [1].

Unele metode de dozare ale metioninei și cisteinei din proteine se bazează pe dozarea sulfului sub formă de $BaSO_4$, după micrometoda lui Denis [2].

O serie de metode colorimetrice se bazează pe metoda lui Mac Carthy și Sullivan. Prin adăugarea unei soluții de nitroprusiat de sodiu și un amestec de acid clorhidric și acid fosforic, metionina dă o coloratie roșie [3].

În sfîrșit, alte metode se bazează pe oxidarea metioninei cu apă oxigenată în prezența acidului percloric, urmată de titrarea iodometrică a excesului de apă oxigenată [4].

Alte metode de dozare ale aminoacizilor folosesc proprietatea unor aminoacizi (leucina, arginina, histidina, triptofanul; metionina, cisteina) de a forma săruri insolubile, naftalin sulfonați [5].

Metada lui Lavine [6] se bazează pe proprietatea sulfurilor organice și tioeterilor de a forma cu halogenii perhalogenuri ($R_2SX_2$) care trec pin hidroliză în sulfoxizi.

$$R_2S + X_2 \rightarrow R_2SX_2$$

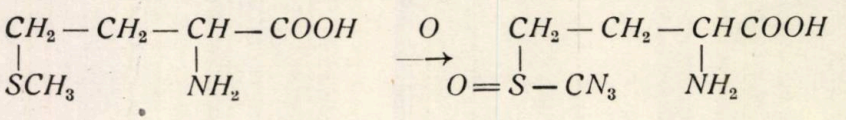
$$R_2SX_2 + H_2O \rightarrow R_2SO + 2HX$$

Se tratează metionina la un $pH=7$ cu o soluție de iod în iodură de potasiu. Metionina se transformă complect în periodură, dacă se menține $pH=7$. Se elimină excesul de iod printr-o soluție de bisulfit, se liberează iodul din periodură prin acidulare și se dozează cu o soluție titrată de tiosulfat.

Pe aceiași metodă a lui Lavine se bazează și determinarea spectometrică a metioninei [7].

Ținînd seamă de proprietatea metioninei de a se oxida la sulfoxid, cu iodat de potasiu în mediu de acid clorhidric, în prezennță de iodură de potasiu, ne-am gîndit la posibilitatea unei metode de determinare volumetrică și potențiometrică a metioninei.

Din încercările făcute, s-a ajuns la concluzia că metionina nu poate fi oxidată la sulfoxid decît în mediu puternic acid, la $pH = 1—2$.



La un *pH* mai ridicat, probabil că reacţia nu se mai petrece în acelaş fel. În cele ce urmează dăm rezultatele obţinute prin metoda volumetrică.

*Modul de lucru.*

Se ia într-un flacon Erlenmeyer un număr oarecare de cmc (5—10) dintr-o soluţie de metionină (conţinînd 0,01—0,02 g). Se adaugă 1 cmc soluţie decimolară de iodat de potasiu, apoi 2 cmc *HC*[1] conc., 0,5 g *KI* şi se titrează iodul cu o soluţie decinormală de tiosulfat de sodiu. Diferenţa obţinută la titrarea cu tiosulfat, corespunde cantităţii de iodat întrebuinţat pentru oxidarea metioninei.

Rezultatele sînt aceleaşi, fie că titrarea se face imediat, fie după cîtva timp, ceea ce arată că oxidarea metioninei se petrece într-un timp foarte scurt.

O moleculă de iodat oxidează trei molecule de metionină, transformînd-o în sulfoxid.

În tabela nr. 1 se dau rezultatele obţinute:

Tabelul 1

| cmc. soluţie metionină în probă | grame metionină în probă | 1 cc $KIO_3$ (0,1 m) 2 cc *HCl* 0,5 g *KI* | cmc soluţie $Na_2S_2O_3$ 0,1 n | grame metionină găsită | diferenţa |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,0118 | | 4,47 | 0,0121 | +0,0003 |
| 10 | 0,0118 | | 4,48 | 0,0120 | +0,0002 |
| 10 | 0,0118 | | 4,55 | 0,0116 | —0,0002 |
| 5 | 0,0095 | | 4,74 | 0,0099 | +0,0004 |
| 5 | 0,0095 | | 4,78 | 0,0096 | +0,0001 |
| 5 | 0,0095 | | 4,76 | 0,0098 | +0,0003 |
| 5 | 0,0129 | | 4,29 | 0,0133 | +0,0004 |
| 5 | 0,0129 | | 4,34 | 0,0131 | +0,0002 |
| 5 | 0,0129 | | 4,29 | 0,0133 | +0,0004 |
| 5 | 0,0129 | | 4,38 | 0,0127 | —0,0002 |
| 5 | 0,0108 | | 4,52 | 0,0110 | +0,0002 |
| 5 | 0,0108 | | 4,54 | 0,0111 | +0,0003 |

În cazul cînd înainte de titrare se adaugă apă în diferite proporţii, se obţin rezultate mult mai mici, ceea ce dovedeşte că reacţia de oxidare nu se petrece decît la un *pH* anumit între 1—2.

In tabela nr. 2 se dau rezultatele probelor în care s-a variat diluția:

Tabelul 2

| cmc. soluție metionină în probă | grame metionină în probă | 1 cmc $KIO_3$ 0,1 m 4 cc $HCl$ 0,5 $KI$ | diluție $H_2O$ | cmc soluție $Na_2S_2O_3$ 0,1 n | grame metionină găsită | diferența |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,0108 | | 5 cc | 4,52 | 0,0110 | + 0,0002 |
| 5 | 0,0108 | | 10 cc | 4,6 | 0,0104 | — 0,0006 |
| 5 | 0,0108 | | 15 cc | 4,64 | 0,0101 | — 0,0009 |
| 5 | 0,0108 | | 20 cc | 4,9 | 0,0082 | — 0,0028 |
| 5 | 0,0108 | | 25 cc | 4,94 | 0,0079 | — 0,0031 |

La probele la care s-au adăugat anumite volume de apă înainte de titrare și în care s-a mărit în aceiași proporție și volumele de acid clorhidric, deci s-a menținut același *pH*, rezultatele au fost concordante, după cum se poate vedea din tabela nr. 3.

Tabelul 3

| cmc. soluție metionină în probă | grame metionină luată în probă | 1 cmc $KIO_3$ 0,1 m 0,5 g $KI$ | cmc soluție $Na_2S_2O_3$ 0,1 n | grame metionină găsită | diferență |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,0129 | 5 cmc $H_2O$ 4 cc $HCl$ conc. | 4,5 | 0,0126 | — 0,0003 |
| 5 | 0,0129 | fără $H_2O$ 2 cc $HCl$ | 4,34 | 0,0131 | + 0 0002 |
| 5 | 0,0108 | 5 cc $H_2O$ 4 cc $HCl$ | 4,52 | 0,0110 | + 0,0002 |
| 5 | 0,0108 | fără $H_2O$ 2 cc $HCl$ | 4,52 | 0,0110 | + 0,0002 |

Rezultatele sînt destul de exacte, dacă se menține un *pH* între 1—2. Metoda este simplă, ușor de executat iar reactivii comuni.

*Laboratorul de chimie anorganică și analitică*
*Institutul Politehnic București*

## BIBLIOGRAFIE

1. *Baerstein H. D.* — J. Biol. Chem. 1932,97, 663.
2. *Beach E. F., Teague. D. M.* — J. Biol. Chem. 1942, 142, 277.
3. *Mac Carthy, Sullivan M. X.* — J. Biol. Chem. 1941, 141, 871.
4. *Albanèse A. A., Frankstone I. E., Irby V.* — J. Biol. Chem. 1945, 156, 293.
5. *Max Bermann, William H. Stein* — J. Biol. Chem. 1939, 129, 609.
6. *Lavine T. H.* — J. Biol. Chem. 1943, 151, 281.
7. *Bohdan Bakay, Gerrit Toennies* — J. Biol, Chem, 1951, 188.

## НОВЫЙ ОБЪЕМНЫЙ МЕТОД ДОЗИРОВАНИЯ МЕТИОНИНА

(Краткое содержание)

Этот метод основывается на свойствах метионина окислеаться иодистым калием в окисел серы в присутствии соляной кислоты. Метионин может окисляться только в силно кислотной среде, *pH* 1-2.

После титрования тиосульфатом избытка освобожденного йода, отнимается количество йодата, использованное для окисления метионина.

При соблюдении условий работы, получаются хорошие результаты.

Это-простой метод, легко применимый при помощи обычных реактивов.

## UNE NOUVELLE METHODE DE DOSAGE VOLUMETRIQUE DE LA METHIONINE

(Résumé)

Cette méthode est basée sur la propriété de la méthionine de s'oxyder au sulfoxide avec de l'iodate de potassium dans un milieu contenant de l'acide chlorhydrique.

La méthionine ne peut être oxpdée qu'en milieu fortement acide, en *pH* 1—2.

Après avoir titré à l'aide du thiosulfat l'excès de l'iode mis en liberté, on déduit la quantité de l'iodate utilisée pour l'oxydation de la méthionine.

En respectent les conditions de travail, on obtient de bons résultats.

La méthode este simple, facile à executer — elle requière l'emploi de réactifs usuels.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

# O METODĂ VOLUMETRICĂ PENTRU DOZAREA STRONȚIULUI

de P. SPACU și F. POPESCU

In literatură există o serie de metode pentru determinarea stronțiului atît pe cale gravimetrică cît și volumetrică, bazate pe o serie de reacții sensibile de precipitare.

Ca metode gravimetrice citãm:

a. Metoda bazată pe preciptarea stronțiului din soluție neutră sau slab amoniacală în prezență de clorură de amoniu cu oxalat alcalin. După filtrare și uscare se cintărște ca oxalat de stronțiu sau se calcinează și se cîntărește ca oxid de stronțiu [1].

b. Precipitarea stronțiului ca sulfat de stronțiu, cu un exces de acid sulfuric diluat în preznță de alcool și cîntărire după calcinare ca sulfat de stronțiu [2].

c. Sub formă de carbonat de stronțiu prin precipitare cu carbonat de amoniu în prezență de amoniac.

Precipitatul de carbonat de stronțiu e uscat și cîntărit sub formă de carbonat [3] sau calcinat puternic și cîntărit ca oxid [4].

d. Determinarea în soluție alcoolică sub formă de cromat.

e. Precipitarea stronțiului cu carbonat de amoniu; disolvarea în acid azotic diluat și evaporarea la uscare. După adăugarea de acetonă precipitalul de azotat de stronțiu se filtrează și se cîntărește după uscare [5].

Metode volumetrice.

a. Metodă bazată pe precipitarea stronțiului ca oxalat de stronțiu și dozarea ionilor $C_2O_4^{2-}$ din pricipitat cu permanganat de potasiu [6] sau prin titrarea eexcesului de acid oxalic cu permanganat [7].

b. Precipitarea stronțiului cu exces de arseniat în mediu amonical și determinarea excesului de arseniat prin adăugirea de acid clorhidric și iodură de potasiu titrînd cu tiosulfat de iodiu iodul pus în libertate.

In cele ce urmează dăm o metodă indirectă, care constă în precipitarea stronțiului ca iodat de stronțiu și dozarea excesului de iodat cu tiosulfat.

În lucrările publicate anterior unul dintre noi [8] a descris metode de determinarea pe cale potențiometrică a unor cationi prin precipitarea cu iodat de potasiu și determinarea cu tiosulfat de sodiu a iodului pus în libertate din excesul de iodat. Deoarece și în cazul iodatului de stronțiu ca și în cazul unora dintre iodații metalelor de mai sus solubilitatea în apă are o valoare relativ mare $s_{Sr(IO_3)_2} = 4{,}22 \times 10^{-3}$ moli/$_l$ s-a lucrat și în acest caz în prezență de alcool etilic.

*Modul de lucru*

Intr-un balon cotat de 100cc se iau un număr de centimetri cubi soluţie de azotat de stronţiu aproximativ 0,1 m, 25cc soluţie 0,1 *m* $KIO_3$ şi 20cc alcool şi se aduce la semn cu apă.

Balonul astfel umplut se agită un timp pînă ce precipitatul format se depune şi apoi conţinutul este filtrat pe un filtru cantitativ uscat. Primii 20 cc din filtrat se aruncă.

Din această soluţie se iau diferite probe (10 cc, 15 cc, 20 cc) se adaugă circa 100 cc apă, 0,5 *g KI* şi 5 cc $H_2SO_4$ *2n* şi se titrează iodul pus în libertate cu o soluţie 0,1 n de $Na_2S_2O_3$.

Titrul soluţiei de $Sr(NO_3)_2$ a fost determinat sub formă de $SrC_2O_4$.

Soluţia de iodat de potasiu care a fost făcută din $KIO_3$ p.a. a servit pentru determinarea titrului soluţiei de $Na_2S_2O_3$.

**TABEL**

10cc soluţie $Sr(NO_3)_2$ + 25cc sol. 0,1 m $KIO_3$ + 20cc alcool + 45cc apă

| Nr. curent | Sol. filtrată cc | $Sr(NO_3)_2$ g | $Na_2S_2O_3$ n/10 f = 1,0013 cc | $Sr(NO_3)_2$ (găsit) g | Diferenţa g |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 0,02006 | 3,627 | 0,0200375 | —0,000022 |
| 2 | 10 | 0,02006 | 3,626 | 0,0200443 | —0,000016 |
| 3 | 10 | 0,02006 | 3,625 | 0,0200460 | —0,000014 |
| 4 | 10 | 0,02006 | 3,625 | 0,0200460 | —0,000014 |
| 5 | 10 | 0,02006 | 3,626 | 0,0200443 | —0,000016 |
| 6 | 10 | 0,02006 | 3,625 | 0,0200460 | —0,000014 |
| 7 | 15 | 0,03009 | 5,441 | 0,0300628 | —0,000027 |
| 8 | 15 | 0,03009 | 5,440 | 0,0300645 | —0,000025 |
| 9 | 15 | 0,03009 | 5,439 | 0,0300644 | —0,000024 |
| 10 | 15 | 0,03009 | 5,437 | 0,0300698 | —0,000020 |
| 11 | 15 | 0,03009 | 5,437 | 0,0300698 | —0,000020 |
| 12 | 20 | 0,04012 | 7,246 | 0,0401009 | —0,000021 |
| 13 | 20 | 0,04012 | 7,245 | 0,0401009 | —0,000019 |
| 14 | 20 | 0,04012 | 7,246 | 0,0400991 | —0,000021 |
| 15 | 20 | 0,04012 | 7,247 | 0,0400961 | —0,000024 |

După cum reiese din tablou eroarea metodei e foarte mică — 0,1 % — atunci cînd precipitarea $Sr(IO_3)_2$ se face în soluţie de 20% alcool.

*Laboratorul de Chimie Anorganică şi Analitică*
*Institutul Politehnic Bucureşti*

BIBLIOGRAFIE

1. *B. Jackson* — Am. J. Chem. Soc. 25—992—1903.
2. *J. Lassaigne* — Chem. Med. 8—526—1832.
3. *A. Rüdesüle* — Nachweis, Bestimmung und Trennung der Chemischen elemente 740, 10956—1929.
4. *R. Frésenius* — Z. anal. Chem. 29—30—143—413413—1890.
5. *R. Norris Shreve; C. H. Watkins şi J. C. Browing* — Chemisches Zentral Blatt 2949—II—1939.

6. *B. Goodale* — J. Soc. Chem. Ind. 55896 6—11—1936
7. *Valentin* — Z. anal. Chem. 54—1915 — 81; C—B 634—I—1915.
8. *P. Spacu* — Bul. Acad. Rom. XXVI 295—1943; 162—1943; 234—1943; 471—1944; 597—1944.

## ОБЪЕМНЫЙ МЕТОД ДОЗИРОВАНИЯ СТРОНЦИЯ

(Краткое содержание)

В настоящей работе изложен новый метод обьемной дозировки стронция в виде соли иодной кислоты.

Раствор $Sr(NO_3)_2$ обрабатывается избыткот $KIO_3$ в присутствии алкоголя. Раствор взбалтывают, затем осаждается осадок, который фильтруют при помощи сухого количественного фильтра.

В фильтрат добавляют $KI$ и $H_2SO_4$ н и титрируют освобожденный иод при помощи $Na_2S_2O_3$ 0,1 н.

Метод прост и легко применим при использовании обычных реактивов.

## UNE METHODE VOLUMETRIQUE POUR LA DOSAGE DE STRONTIUM

(Résumé)

Dans ces travaux, on donne une méthode pour le dosage volumétrique du strontium comme iodate.

La solution de $Sr(NO_3)_2$ est traité e avec un excès de $KIO_3$ en présence de l'alcool. On agite, on laisse le precipité se déposer et on filtre par un filtre quantitatif séché.

On ajoute $KI$ et $H_2SO_4$ au filtrat et on titre l'iode mis en liberté avec un solution $0{,}1$ $n$ $Na_2S_2O_3$.

La méthode est simple, à l'exécution facile, avec des réactifs courants.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

545.31

# O NOUĂ METODĂ DE SEPARARE CANTITATIVĂ A FIERULUI DE ZINC

de P. SPACU și GR. TEODORESCU

După numărul mare de metode care se găsesc în literatura de specialitate, pentru separarea cantitativă a fierului de zinc, rezultă importanța acestei probleme pentru chimia analitică.

Dintre metodele clasice, metoda de separare cu amoniac sau carbonat de amoniu nu poate să fie folosită în prezența unor cantități mari de fier, din cauza proprietăților adsorbante a $Fe(OH)_3$. Dacă se lucrează în prezența unui exces foarte mare de $NH_4Cl$ și $NH_4OH$ se poate ajunge ca precipitatul de $Fe(OH)_3$ să conțină numai o cantitate mică de zinc, în schimb este impurificat cu silice din amoniac și deci nu se poate conta pe rezultatele pentru dozarea fierului [1].

De asemenea nu dau rezultate exacte nici metodele cu acetat, formiat sau azotit alcalin.

În anul 1928 Priyadaranjan Ray și A. K. Chattopadya [2] dau o metodă de separarea elementelor din grupa a III-a analitică cu urotropină (hexametilentetramină). Această metodă este bazată pe precipitarea fierului sub formă de $Fe(OH)_3$, prin amoniacul provenit de la hidroliza hexametilentetraminei, hidroliza provocînd micșorarea concentrației ionilor de hidrogen a soluției.

Noi ne-am propus o metodă de separare a fierului de zinc, întrebuințînd ca reactiv piridina, deoarece aceasta determină foarte ușor în soluție apoasă precipitarea hidroxidului feric [3]. Tratînd soluția care conține ionii $Fe^{+++}$ și $Zn^{++}$, cu piridină, fierul se separă sub formă de $Fe(OH)_3$, în timp ce zincul rămîne în soluție sub forma unei amine.

$$FeX_3 + 3C_5H_5N + 3H_2O = Fe(OH)_3 + 3(C_5H_5 \cdot HX)$$

$$ZnX_2 + 2C_5H_5N = Zn(C_5H_5N)_2X_2$$

## *Metoda de separare*

Soluția neutră sau slab acidă, care conține cele două elemente, a cărei volum poate să varieze între 150—200 ml (dacă fierul se află sub formă de ioni feroși se tratează soluția la volum mic cu cîteva picături de acid azotic și se încălzește pînă ce soluția capătă culoarea galbenă caracteristică sărurilor ferice) se încălzește pînă aproape de fierbere,

i se adaugă cîteva picături de $NH_4OH$ proaspăt preparat şi apoi picătură cu picătură piridină pînă cînd tot fierul se precipită sub formă de $Fe(OH)_3$, de culoare roşu-brun. Se mai încălzeşte cîteva minute pentru aglomerarea precipitatului, după care se filtrează prin decantări repetate pe hîrtie de filtru bandă neagră, folosind pentru săpălare apă distilată caldă. Deoarece precipitatul de hidroxid feric are tendinţa de a reţine urme de zinc, se disolvă, pe filtru, precipitatul cu acid azotic diluat, se prinde filtratul în acelaşi pahar de reacţie se diluează şi se reprecipită cu piridină. Se filtrează din nou prin decantări repetate pe acelaşi filtru folosind apă distilată caldă şi se aduce în fine tot precipitatul pe filtru. Hidroxidul feric astfel obţinut este lipsit de zinc. Se calcinează pe bec, întîi la flacără mică pentru a se usca hîrtia de filtru, apoi cu flacără mai mare pentru a se calcina fără flacără şi apoi puternic 20—30 minute. Se răceşte 30 minute în exsicator, se cîntăreşte trioxidul de fier obţinut şi se repetă operaţiunile de calcinare, răcire şi cîntărire, pînă la greutate constantă.

Soluţia filtrată şi apele de spălare care conţin zincul se concentrează pînă ce volumul se reduce la 150 ml. Se adaugă la temperatura ambiantă tiocianat de amoniu solid 0,2 g (pentru *0,1 g* $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$.) şi apoi sub agitare cu o baghetă se adaugă piridină 3 picături pentru fiecare 0,1 *g* $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$ aşa ca piridina să fie în foarte mic exces. In felul acesta tot zincul precipită sub formă de amină complexă de forma $ZnPy_2(SCN)_2$ alb cristalin [4]. Se lasă în repaous 15 minute, după care se filtrează pe filtru bandă albă şi se spală prin decantare întrebuinţînd ca apă de spălare însuşi filtratul, introdus într-un stropitor. După ce tot precipitalul a fost adus pe filtru se introduce acesta într-un creuzat de porţelan făcut constant, se usucă la etuvă la 150° timp de o oră. După aceea precipitatul este încălzit în creuzetul său pe flacăra mică a unui bec, astfel ca hîrtia de filtru să nu ardă cu flacără. După ce hîrtia de filtru s-a calcinat, se continuă calcinarea pe bec şi apoi la suflător (1100° Celsius) creuzetul fiind acoperit cu capac timp de 1—2 ore, cînd se obţine *ZnO* alb, formă sub care se cîntăreşte. Se repetă operaţiunile de calcinare, răcire şi cîntărire pînă la greutate constantă.

**TABLOU CU REZULTATE**

| Nr. crt. | $(NH_4)Fe(SO_4)_2 \cdot 6H_2O$ | | $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$ | | $Fe_2O_3$ obţinut | $ZnO$ obţinut prin calcin. $ZnPy_2(SCN)_4$ | $Fe$ % obţinut | $Fe$ % calculat | $Zn$ % obţinut | $Zn$ % calculat |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ml | grame | ml | grame | | | | | | |
| 1 | 10 | 0,29954 | 10 | 0,28755 | 0,0611 | 0,0819 | 14,41 | 14,24 | 22,88 | 22,74 |
| 2 | 10 | 0,29954 | 6 | 0,17253 | 0,0609 | 0,0490 | 14,36 | „ | 22,83 | „ |
| 3 | 8 | 0,23723 | 4 | 0,11502 | 0,0486 | 0,0326 | 14,32 | „ | 22,77 | „ |
| 4 | 4 | 0,11861 | 8 | 0,23004 | 0,0244 | 0,0655 | 14,38 | „ | 22,87 | „ |
| 5 | 5 | 0,14827 | 9 | 0,25879 | 0,0305 | 0,0737 | 14,39 | „ | 22,82 | „ |
| 6 | 3 | 0,08896 | 7 | 0,20128 | 0,0183 | 0,0573 | 14,38 | „ | 22,86 | „ |
| 7 | 2 | 0,05930 | 7 | 0,20128 | 0,0122 | 0,0570 | 14,38 | „ | 22,74 | „ |
| 8 | 6 | 0,17792 | 4 | 0,11502 | 0,0362 | 0,0327 | 14,24 | „ | 22,87 | „ |
| 9 | 9 | 0,26688 | 5 | 0,14377 | 0,0549 | 0,0409 | 14,39 | „ | 22,84 | „ |
| 10 | 7 | 0,20757 | 3 | 0,86265 | 0,0425 | 0,0245 | 14,32 | „ | 22,81 | „ |

*Concluzii :*

In comparație cu celelalte metode clasice metoda propusă prezintă următoarele avantaje :

1) permite separarea cantitativă a fierului de zinc, fiind necesară numai o singură reprecipitare.

2) Hidroxidul fieric este transformat în $Fe_2O_3$ fără a fi necesar a lua măsuri pentru a preîntîmpina o eventuală reducere.

3) In filtrat se poate precipita imediat zincul sub formă de $ZnPy_2(SCN)_2$ prin adăugare de tiocianat de amoniu.

4) Metoda este în special foarte indicată pentru dozarea zincului în prezența cantităților mici de fier.

## BIBLIOGRAFIE

1. Funk Z. f. Angew. Chem. 18, 1905, 1687.
2. *Priyadaranjan* et *A. K. Chattopadya* — Z. anorg. Chem. 1928, 169, 99.
3. *P. Spacu* — C. R. 1935, 200, 1595; Bul. Soc. Chim. France T. 3. 1936, 1061.
4. *G. Spacu* — Tom. I pag. 348—351, 1922; Bul. Soc. Științe, Cluj.

## НОВЫЙ МЕТОД КОЛИЧЕСТВЕННОГО ОТДЕЛЕНИЯ ЖЕЛЕЗА ОТ ЦИНКА

(Краткое содержание)

В настоящей работе авторы предлагают новый и точный метод отделения железа от цинка, применяя пиридин, как реактив для осаждения.

Нейтральный раствор или слабо окисленный раствор, содержащий ионы $Fe^{3+}$ и $Zn^{2+}$, обрабатывается пиридином, все железо отделяется с виде гидрокиси железа, а цинк остается в растворе под видом сложного иона.

Полученная гидрокись железа промываетчя горячей водой, кальцинируется и взвешивается в виде триокиси железа.

В фильтруемом растворе определяется цинк в виде сложного амина $[Zn\ Py_2\ (SCN)_2]$.

## UNE NOUVELLE METHODE DE SEPARATION QUANTITATIVE DU FER D'AVEC LE ZINC

(Résumé)

Dans le présent travail, le auteurs donnent une nouvelle méthode précise pour la séparation du fer d'avec le zinc, utilisant la pyridine comme réactif de précipitation.

La solution neutre ou faiblement acide qui continent les ions $Fe^{3+}$ et $Zn^{2+}$, est traitée par la pyridine jusqu'à ce que tout le fer se sépare à l'état d'hydroxyde ferrique, tandis que le zinc reste en solution sous forme complexe.

On lave à l'eau chaude l'hydroxyde ainsi obtenu, puis on calcine et l'on pèse sous forme d'oxyde ferrique.

On détermine dans la solution filtrée le zinc sous forme d'amine complexe $[Zn\ Py_2\ (SCN)_2]$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

545.31

# CONTRIBUŢII LA UTILIZĂRILE ANALITICE ALE CLORAMINEI *T*

## I. DOZAREA ZINCULUI ŞI A MAGNEZIULUI

de P. SPACU, A. OVANESIAN şi D. GĂVĂNESCU

In practica chimiei organice, cloramina *T*, adică sarea de sodiu a cloramidei acidului p-toluen-sulfonic, este folosită datorită însuşirilor sale clorurante. Datorită aceloraşi însuşiri, este folosită de unii analişti ca agent oxidant în chimia analitică cantitativă.

Astfel, A. S. Komarovski, V. F. Filonova şi I. M. Korenman dozează ferocianaţii prin oxidare la fericianaţi şi hidrazina prin oxidare la azot [1] ; A. Mac Millan şi W. Easton dozează prin oxidare fierul, arsenul, staniul şi stibiul [2] ; P. N. Van Eck oxidează sulfiţii şi azotiţii [3] ; P. Balatre dozează bromurile pe cale colorimetrică [4] ; G. Jonas dozează iodurile prin oxidare la iod [5] ; P. Spacu, Gr. Teodorescu şi D. Găvănescu dozează hidrazida acidului izonicotinic [6], etc.

Stabilitatea şi prepararea sa relativ simplă, prin barbotare de clor într-o soluţie apoasă de p-toluen-sulfamidă şi hidroxid de sodiu şi precipitarea ulterioară a sării de sodiu prin tratare cu clorura de sodiu, ne-a determinat s-o folosim la dozarea 8-oxi-chinolinei, respectiv a unor metale cu care 8-oxi-chinolina formează precipitate cantitative.

În acest sens am ţinut seama de lucrările lui H. R. Fleck [7] şi H. R. Fleck şi A. M. Ward [8], H. Gotô [9] şi [10], R. Berg [11] şi I. M. Kolthoff [12].

Într-adevăr, 8-oxi-chinolina precipită ionii unor metale sub forma complexului $(C_9H_6ON)_2Me$, unde *Me* este un metal bivalent. Aceşti complexi sînt stabili şi datorită structurii lor cristaline pot fi uşor filtraţi.

Lucrînd în condiţii convenabile se pot face şi separări cantitative, factorul esenţial pentru aceasta fiind *pH*-ul soluţiei. Folosirea soluţiilor tampon este absolut necesară. Complexul odată separat, se filtrează şi poate fi prelucrat mai departe pe cale gravimetrică sau pe cale volumetrică.

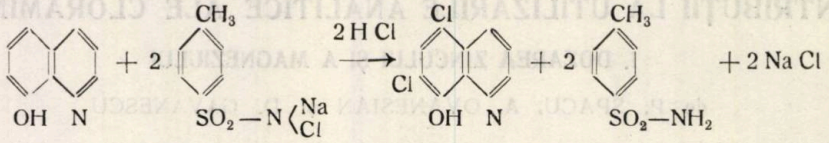
In cele ce urmează vom aminti metoda volumetrică a lui H. R. Fleck, F. J. Greenane şi A. M. Ward [13] şi R. Berg [14] folosind soluţie de bromat-bromură. După aceşti autori, complexul separat se disolvă în acid clorhidric 5 normal şi după spălări, soluţia rezultată care trebuie să fie aproximativ 2 normală, se titrează cu o soluţie m/30 de bromat-bromură de potasiu, care va bromura 8-oxi-chinolina, transformînd-o în 5, 7-dibrom-oxi-chinolină, după reacţia :

$$C_9H_7ON + 2\,Br_2 \rightarrow C_9H_5ONBr_2 + 2\,HBr$$

Bazați pe reacția de mai sus, am încercat în această lucrare, să înlocuim soluția de bromat-bromură cu o soluție de cloramină *T*.

Soluția de cloramină *T* am preparat-o disolvînd 14,5 g cloramină *T*, într-un litru de apă. După cîteva zile a fost filtrată și soluția aproximativ 0,1 normală a fost titrată cu o soluție titrată de tiosulfat de sodiu pentru a i se stabili factorul de normalitate.

Reacția dintre 8-oxi-chinolină și cloramină T decurge la fel obținîndu-se 5, 7-diclor-8-oxichinolină, conform reacției:




Din reacție rezultă că echivalentul 8-oxi-chinolinei este 1 mol/4 și că la fiecare cm³ de 0,1 n cloramină *T*, corespunde 1/40000 dintr-un mol de 8-oxi-chinolină.

Incercările noastre pentru determinarea zincului și magneziului au confirmat cele de mai sus.

a) *Determinarea zincului*

S-a folosit sulfat de zinc p.a. din care s-a preparat o soluție conținînd 0,00372 g zinc/cm³, rezultat la care s-a ajuns prin metoda gravimetrică ca fosfat [15]. Din această soluție se iau 10 cm³ și se diluiază la 100 cm³. Se adaugă 3—5 g acetat de sodiu și 1 cm³ acid acetic. Se obține astfel un $pH = 5$. Se încălzește la 60°—70° și se adaugă un exces dintr-o soluție alcoolică de 8-oxi-chinolină de 2%. Se lasă la cald încă 10 minute și se filtrează pe un creuzet filtrant de sticlă *Nr. G3*; se spală cu apă caldă; se disolvă precipitatul cu acid clorhidric 5 normal, se spală și soluția obținută se trece într-un flacon iodometric. Se adaugă 5—10 cm³ acid clorhidric concentrat sau 20—30 cm³ acid acetic glacial și sub agitare un exces de 0,1 normal soluție de cloramină *T*. După 10 minute de ședere se adaugă 1 g sau chiar mai puțin iodură de potasiu și iodul pus în libertate se titrează cu o soluție 0,1 normală de tiosulfat de sodiu. Cantitatea de zinc va fi dată de formula:

$$\text{grame zinc} = 10^{-4}\ (V_1 \cdot f_1 - V_2 \cdot f_2)\frac{65{,}38}{8}$$

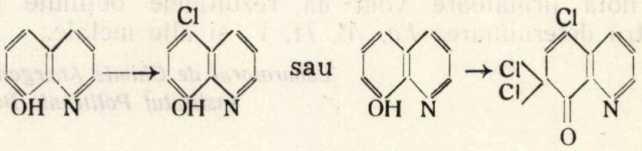
unde:

$V_1$ = numărul de cm³ soluție 0,1 n de cloramină *T*;
$f_1$ = factorul de normalitate al soluției 0,1 n de cloramină *T*;
$V_2$ = numărul de cm³ soluție 0,1 n de tiosulfat de sodiu;
$f_2$ = factorul de normalitate al soluției 0,1 n de tiosulfat de sodiu.

În tabelul următor sînt menționate unele rezultate obținute prin metoda propusă :

| Nr. crt. | Soluție de sulfat de zinc luată la analiză ($cm^3$) | Zinc în soluția de analiză (g) | Zinc găsit după metoda propusă (în g) | Diferența (în g) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 0,03720 | 0,03662 | —0,00058 |
| 2 | 10 | 0,03720 | 0,03718 | —0,00002 |
| 3 | 10 | 0,03720 | 0,03666 | —0,00054 |
| 4 | 10 | 0,03720 | 0,03660 | —0,00060 |
| 5 | 10 | 0,03720 | 0,03770 | +0,00050 |
| 6 | 10 | 0,03720 | 0,03678 | —0,00042 |
| 7 | 10 | 0,03720 | 0,03680 | —0,00040 |
| 8 | 10 | 0,03720 | 0,03744 | +0,00024 |
| 9 | 10 | 0,03720 | 0,03720 | — |
| 10 | 10 | 0,03720 | 0,03678 | —0,00042 |

Diferențele în plus sau în minus se datoresc faptului că pe lîngă 5,7-diclor-8-oxi-chinolină ce ar trebui să se obțină ca produs unitar, prin tratarea cu cloramină *T* a 8-oxi-chinolinei, pusă în libertate prin dizolvarea în acid clorhidric a complexului, se obțin uneori și cantități neînsemnate de 5-clor-8-oxi-chinolină sau 5,7,7,-triclor-8-oxo, 7,8-dihidrochinolină, conform reacțiilor :




La aceleași rezultate se ajunge, chiar dacă precipitarea complexului se face la *pH*=6.

b) *Determinarea magneziului*

S-a folosit sulfat de magneziu p. a., din care s-a preparat o soluție conținînd 0,001329 g magneziu/$cm^3$, rezultat la care s-a ajuns prin metoda gravimetrică ca fosfat [16]. Din această soluție se iau 20 $cm^3$ și se diluiază la 100 $cm^3$. Se adaugă 3—5 g clorură de amoniu și amoniac, picătură cu picătură, pînă la *pH*=8,5. Se încălzește pînă la 90° și se adaugă un exces dintr-o soluție alcoolică de 8-oxi-chinolină de 2%. Se aduce la fierbere și se lasă în repaos 10—15 minute, agitînd-o din cînd în cînd. Se filtrează la cald pe un creuzet de sticlă *Nr. G3* și se spală cu apă caldă slab amoniacală. Se dizolvă precipitatul în acid clohidric 5 normal, se spală, și soluția obținută se trece într-un flacon iodometric. Restul operațiunilor sînt identice ca la zinc. Cantitatea de magneziu va fi dată de formulua :

$$\text{grame magneziu} = 10^{-4}\,(V_1 \cdot f_1 - V_2 \cdot f_2)\,\frac{24{,}32}{8}$$

unde:

$V_1$ = numărul de $cm^3$ soluţie 0,1 n de cloramină *T*;
$f_1$ = factorul de normalitate al soluţiei 0,1 n de cloramină *T*;
$V_2$ = numărul de $cm^3$ soluţie 0,1 n de tiosulfat de sodiu;
$f_2$ = factorul de normalitate al soluţiei 0,1 n de tiosulfat de sodiu.

În tabelul următor sînt menţionate unele rezultate obţinute prin metoda propusă:

| Nr. crt. | Soluţie de sulfat de magneziu luată la analiză (în $cm^3$) | Magneziu în soluţia de analiză (g) | Magneziu găsit după metoda propusă g) | Diferenţa (g) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 0,02658 | 0,02640 | —0,00018 |
| 2 | 20 | 0,02658 | 0,02638 | —0,00020 |
| 3 | 20 | 0,02658 | 0,02662 | +0,00004 |
| 4 | 20 | 0,02658 | 0,02660 | +0,00002 |
| 5 | 20 | 0,02658 | 0,02642 | —0,00016 |
| 6 | 20 | 0,02658 | 0,02638 | —0,00020 |
| 7 | 20 | 0,02658 | 0,02658 | — |
| 8 | 20 | 0,02658 | 0,02658 | — |
| 9 | 20 | 0,02658 | 0,02638 | —0,00020 |
| 10 | 20 | 0,02658 | 0,02648 | —0,00010 |

Pentru diferenţele în plus sau în minus sînt valabile aceleaşi explicaţii date mai sus la zinc.

Într-o notă următoare vom da rezultatele obţinute prin aceeaşi metodă pentru determinarea *Fe, Al, Ti, V,* şi alte metale.

*Laboratorul de Chimie Anorganică şi Analitică*
*Institutul Politehnic Bucureşti*

## BIBLIOGRAFIE

1. *A. S. Komarovski, V. F. Filonova şi M. I. Korenman* — J. priclad. him. 6,742—8 (1933).
2. *A. Mac Millan* şi *W. Easton* — J. Chem. Ind. 46,472 T. (1927).
3. *P. N. Van Eck* — Pharm. Weckblad, 63,1117—21 (1926).
4. *P. Balatre* — J. Pharm. Chim. 24,409—13 (1936).
5. *G. Ionas* — Magyar Gyogyszereszztnd Tarsasag Ertesitoje, 10,526—39 (1934).
6. *P. Spacu, Gr. Teodorescu şi D. Găvănescu* — Bul. Inst. Politehnic. Buc., XVIII, 1—2 (1956).
7. *H. R. Fleck* — Analyst, 62,378 (1937).
8. *H. R. Fleck şi A. M. Ward* — Analyst, 58,388 (1933).
9. *H. Gotô* — J. Chem. Soc. Japan, 54,725 (1933).
10. *H. Gotô* — J. Chem. Soc. Japan, 56,314 (1935).
11. *R. Berg* — J. pr. Chem., 115,178 (1927).
12. *J. M. Kolthoff* — Chem. Weekblad, 24,606 (1927).
13. *H. R. Fleck, J. Greenane şi A. M. Ward* — Analyst, 59,325 (1934).
14. *R. Berg* — Ztschr. f. anal. Chem., 71,171 (1927).
15. *J. Dick* — Ztschr. f. anal. Chem., 82, 401 (1930).
16. *J. Dick* — Ztschr. f. anal. Chem., 82,404 (1930).

## К ВОПРОСУ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ ХЛОРАМИНА *Т*

### Обьемная дозировка цинка и магнезия

(Краткое содержание)

Описанный метод представляет собой косвенную обьемную дозировку цинка и магнезия при помощи их осаждения 8—окси кинолеина с последующим растворением в соляной кислоте. Полученный раствор обрабатывается титрованным раствором хлорамина *Т* в избытке с последующим повторным титрованным избытка титрованным раствором тиосульфата натрия. Отделение цинка от магнезия проводится во время осаждения при помощи подходящих pH. Этот способ заменяет раствор бромистого-брома используя хлорамины *Т* в качестве окисляющего агента.

## CONTRIBUTIONS A L'EMPLOI DE LA CHLORAMINE T DANS LA CHIMIE ANALYTIQUE

### I. LE DOSAGE DU ZINC ET DU MAGNÉSIUM

**(Résumé)**

La méthode présentée constitue un dosage volumétrique indirect du zinc et du magnésium, employant une précipitation par la 8-hydroxyquinoléine suivie de la dissolution dans l'acide chlorhidrique. La solution résultée est traitée par un excès de solution titrée de chloramine *T* et l'excès est retitré avec une solution de thiosulfate de sodium.

La séparation du zinc d'avec le magnesium a lieu, pendant la précipitation, à des *pH* convénables.

Le procédé remplace la solution de bromate-bromure, comme agent oxidant, par la chloramine *T*.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

621.357.1

# COMPORTAREA ANOZILOR NICHELAȚI LA OBȚINEREA PERMANGANATULUI DE POTASIU

de GH. HAGYMAȘ și P. ANGHEL

Permanganatul de potasiu se obține în prezent aproape exclusiv prin metoda semielectrolitică. Prima etapă a acestei metode constă în prepararea manganatului de potasiu pe cale chimică prin topirea piroluzitei naturale sau artificiale cu hidroxid de potasiu, conform reacției:

$$MnO_2 + 2\,KOH + {}^1/_3\,O_2 \rightleftarrows K_2\,MnO_4 + H_2O$$

și solubilizarea manganatului de potasiu rezultat. În soluția obținută se prepară permanganatul de potasiu într-o a doua etapă — electrochimică — prin oxidarea anodică a manganatului.

$$MnO\ 4^{2-} \rightarrow MaO\ 4^{-} + \varepsilon$$

Oxidarea electrolitică decurge în practică pe anozi de fier sau de nichel. Anozii de nichel sînt mai rezistenți la coroziune și dau randamente de curent mai ridicate. În același timp blocurile anodice de nichel sînt costisitoare și se prelucrează greu [1].

Scopul lucrării de față constă în stabilirea comportării anodului re oțel, acoperit cu un strat de nichel, în condițiile grele de coroziune din soluții cu conținut concomitent de manganat, permanganat și hidroxid de potasiu. Este de așteptat ca un asemenea anod să prezinte avantajele inerentele anozilor-blocuri de nichel, permitînd totodată o economie de nichel și ușurarea confecționării electrodului. Anozii de oțel nichelat sînt întrebuințați cu succes pe scară industrială la electroliza topiturilor de hidroxid de sodiu. Stabilitatea depunerilor de nichel este mai mare de cît a oțelului în soluțiile cu conținut de ioni-$Cl^-$, $SO_4^{--}$, $OH^-$, $Na^+$, $Ca^{++}$, gaze $NH_3$, $CO_2$ și în condițiile regimului de lucru al evaporatoarelor de soluții alcaline [3]. În legătură cu utilizarea anozilor nichelați la electroliza permanganaților literatura nu dă indicații.

Pentru a putea evalua utilitatea aplicării anozilor nichelați în locul celor recomandați în prezent, am efectuat determinări comparative de rezistență la coroziune a oțelului, a nichelului electrolitic și a oțelului nichelat și am stabilit randamentele de curent ce pot fi atinse cu astfel de anozi la electroliza permanganatului de potasiu în diferite condiții de electroliză.

*Obținerea anozilor nichelați.* În încercările de mai jos în calitate de anod nichelat au servit plăci de bandă de oțel nichelate în baia specială recomandată de S. I. Pasecinic și M. G. Popova [2] ce conține

numai $Ni\ SO_4$. $7\ H_2O$ — *350 g/l* şi $H_2\ SO_4$ — *5 g/l*. S-a lucrat la temperatura de *70—80°* şi densitate de curent de 10 $A/dm^2$. Înainte de depunere plăcile au fost polisate, degresate şi decapate. Depozitele de nichel obţinute din aceste băi se deosebesc printr-o porozitate redusă.

După cum se ştie peliclele de nichel depuse pe oţel se caracterizează prin porozitatea pronunţată şi aderenţă slabă. Atît porozitatea cît şi aderenţa peliculei scad odată cu îngroşarea depunerii. La electroliza permanganatului anodul nichelat se va comporta cu atît mai bine cu cît va avea o porozitate mai mică şi cu cît legătura dintre oţel şi nichel va fi mai trainică. Pentru a îmbunătăţi aceste proprietăţi ale peliculei de nichel — am aplicat indicaţiile autorilor citaţi mai sus după care o ameliorare considerabilă a calităţii depunerilor poate fi realizată printr-un tratament termic al plăcilor nichelate. Pentru acesta la început s-a efectuat o încălzire lentă a plăcilor nichelate pînă la 300° în timp de o oră. Apoi probele s-au introdus într-un cuptor încălzit la 950°—1000° şi s-au menţinut la această temperatură timp de 20—60 minute după care au fost scoase şi lăsate să se răcească la aer. Drept rezultat s-au obţinut depuneri de nichel compacte, plastice şi cu o aderenţă mult mărită, ce nu se desprindeau de baza de oţel nici după îndoiri repetate. Gradul de aderenţă ridicat se atinge pe această cale datorită formării unui aliaj la limita dintre metalul de bază şi depunere prin difuziunea reciprocă a celor două metale.

Încălzirea atentă a electrodului în intervalul de temperatură pînă la 300° facilitează eliminarea treptată a hidrogenului din depunerea de nichel care în timpul unei încălziri rapide — dehidrogenîndu-se brusc — s-ar putea desprinde de metalul de bază. Între 300°—800° electrodul trebuie încălzit rapid pentru a evita apariţia modificaţiei fragile a nichelului.

Tratamentul termic se poate efectua în atmosferă reducătoare. In acest caz suprafaţa nichelului îşi păstrează aspectul agreabil cenuşiumat. Dacă tratamentul termic este efectuat în contact cu aerul-pelicula de oxizi care se formează strică aspectul exterior al depunerii dar nu influenţează practic proprietăţile sale anticorozive.

*Determinări comparative de randament de curent pe oţel obişnuit şi otel nichelat.* Determinările de randament de curent s-au făcut menţinînd constante densitatea de curent, natura catodului şi distanţa dintre electrozi. S-a folosit un culometru pe cupru iar variaţia concentraţiei electrolitului s-a determinat prin adăugare de $KIISO_4$ şi determinarea $MnO_2$ separat. Rezultatele s-au exprimat în valori medii pentru 10—20 minute.

Drept electrolizor s-a întrebuinţat un cristalizor în care s-au dispus simetric 4 anozi cu dimensiunile de 40/100/0,35 mm iar în faţa acestora la o distanţă de 5 cm 4 catozi-fire de sîrmă de oţel. Soluţiile de electrolit sau preparat din *KOH* pur şi piroluzită artificială. Pentru acesta, la început s-a pregătit — într-un creuzet de nichel — o soluţie concentrată de hidroxid de potasiu la care s-a adăugat cantitatea necesară de piroluzită fin pulverizată astfel ca să se păstreze raportul molar de $\frac{KOH}{MnO_2} = 3$. S-a încălzit apoi suspensia, agitînd-o mereu, pînă la for-

marea unei mase de bulgări de diametru de 0,3—1 cm. Materialul obținut s-a introdus într-o moară cu bile de porcelan. După o măcinare de circa 2 ore s-a determinat conținutul materialului în $K_2MnO_4$ s-a adăugat cantitatea necesară de apă distilată pentru a obține un electrolit de concentrație dorită. Piroluzita nereacționată s-a separat prin filtrare iar electrolitul s-a analizat din nou pentru determinarea conținutului de manganat de potasiu, prin metoda amintită mai sus.

Pentru electroliză s-au folosit 200 $cm^3$ de soluție din care s-au luat periodic probe de analiză de cîte 5 $cm^3$ electrolit, adăugînd totodată un volum de electrolit inițial, astfel încît variația conținutului de manganat datorită luării de probe, nu a trecut de 1% față de conținutul inițial în manganat. Rezultatele obținute sînt reprezentate în fig. 1.

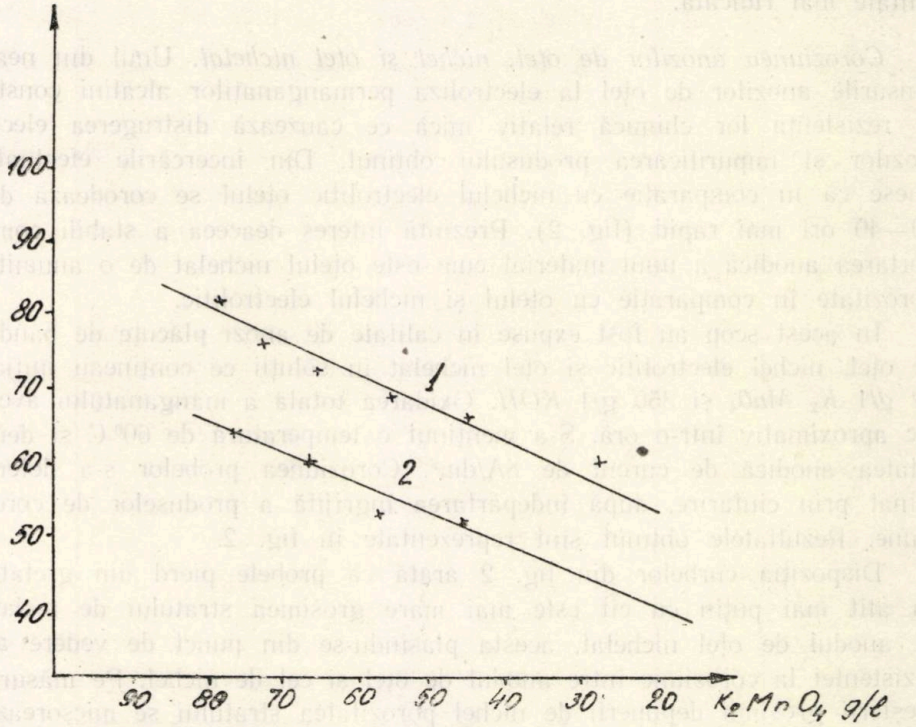



Fig. 1. — Variația randamentului instantaneu de curent la obținerea permanganatului de potasiu în funcție de natura anodului și concentrația electrolitului.

$D_a = 8$ A/dm² $T = 60^0$ C
$D_c = 80$ A/dm² Distanța între electrozi = 5 cm.

După cum reiese din fig. 1 variația randamentului anodic în funcție de concentrația manganatului de potasiu este lineară și mai mare în cazul utilizării anozilor nichelați cu aproximativ 15%. Menționăm că datele se referă la un electrod nichelat de calitate inferioară netratat termic, grosimea stratului nichel fiind numai de 20 microni. Electrodul acoperit

cu un strat mai gros de nichel și supus tratamentului termic conduce la rezultate mai bune.

Prezintă interes verificarea limitelor de temperatură și concentrație a hidroxidului de potasiu în care se obțin randamente maxime de curent în cazul înlocuirii anozilor de oțel cu oțel nichelat. Rezultatele obținute au arătat că randamentul de curent maxim în funcție de temperatură se realizează în jurul a 60° C indiferent de concentrația electrolitului și natura anodului — în concordanță cu datele literaturii. Ca limită admisibilă a concentrației hidroxidului de potasiu poate fi considerată concentrația de 300—350 g/l *KOH*. Trebuiesc preferați electroliții mai concentrați în hidroxid de potasiu, deoarece aceștia au o conductibilitate mai ridicată.

*Coroziunea anozilor de oțel, nichel și oțel nichelat.* Unul din neajunsurile anozilor de oțel la electroliza permanganaților alcalini constă în rezistența lor chimică relativ mică ce cauzează distrugerea electrozilor și impurificarea produsului obținut. Din încercările efectuate reiese că în comparație cu nichelul electrolitic oțelul se corodează de 20—40 ori mai rapid (fig. 2). Prezintă interes deaceea a stabili comportarea anodică a unui material cum este oțelul nichelat de o anumită porozitate în comparație cu oțelul și nichelul electrolitic.

În acest scop au fost expuse în calitate de anozi plăcuțe de bandă de oțel, nichel electrolitic și oțel nichelat în soluții ce conțineau inițial 92 g/l $K_2 MnO_4$ și 350 g/l *KOH*. Oxidarea totală a manganatului avea loc aproximativ într-o oră. S-a menținut o temperatură de 60° C și densitatea anodică de curent de 8A/dm$^2$. Coroziunea probelor s-a determinat prin cîntărire, după îndepărtarea îngrijită a produselor de coroziune. Rezultatele obținut sînt reprezentate în fig. 2.

Dispoziția curbelor din fig. 2 arată că probele pierd din gretate cu atît mai puțin cu cît este mai mare grosimea stratului de nichel pe anodul de oțel nichelat, acesta plasîndu-se din punct de vedere al rezistenței la coroziune între anodul de oțel și cel de nichel. Pe măsura creșterii grosimii depunerii de nichel porozitatea stratului se micșorează și materialul se apropie prin compararea sa anticorozivă tot mai mult de nichelul pur. Oțelul nichelat ($\delta_{ri} = 200\mu$) și tratat termic se comportă aproape identic cu nichelul pur ceeace indică o acoperire aproape totală a porilor prin tratamentul termic aplicat.

Pe baza datelor reprezentate în fig. 2 se poate admite că pe suprafața oțelului nichelat tratat termic, metalul de bază este complet acoperit de depunere dar pirn difuziunea fierului spre exteior pe microrelieful probei apar mici cantități de constituent mai electronegativ decît nichelul ceeace cauzează o oarecare mărire a vitezeii de coroziune față

de nichelul pur. Pe măsură ce acest constituent se consumă — viteza de coroziune a oțelului nichelat scade apropiindu-se de valoarea constantă a vitezii de coroziune a nicehelului electrolitic.

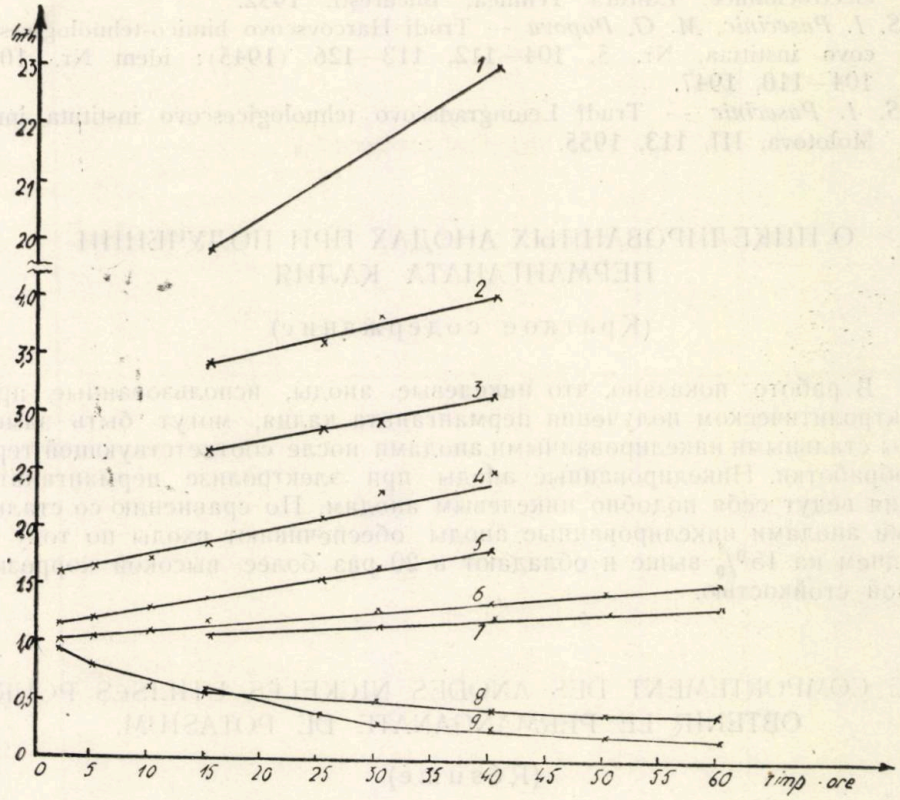



Fig. 2 — Variația vitezii de coroziune a anozilor în timpul electrolizei permanganatului de potasiu.

Pentru a avea date complecte asupra consumului de energie la electroliza permanganatului de potasiu cu diferiți anozi s-a determinat potențiometric tensiunea la borne în cazul utilizării anozilor de oțel și oțel nichelat. Valori mai mici s-au obținut la electroliza cu anozi nichelați. Randamentele de curent fiind mai mari pe anozi nichelați rezultă consumuri de energie mai scăzută în cazul utilizării acestor electrozi.

## CONCLUZII

Anozii de oțel nichelat supuși unui tratament termic adecuat pot fi utilizați în locul anozilor de nichel la obținerea electrolitică a permanganatului de potasiu. Prin utilizarea anozilor nichelați se intensifică procesul cu aproximativ 15% față de cazul utilizării anozilor de oțel și se micșorează consumul specific de energie electrică. Stabilitatea anozilor nichelați la electroliza permanganaților este de peste 20 ori mai mare de cît a anozilor de oțel.

*Laboratorul de Electrochimie — Institutul Politehnic București*

## BIBLIOGRAFIE

1. *V. G. Homiacov, V. P. Maşovet, L. L. Cuzmin* — Tehnologia produselor electrochimice, Editura Tehnică, Bucureşti, 1952.
2. *S. I. Pasecinic, M. G. Popova* — Trudî Harcovscovo himico-tehnologicescovo instituta, Nr. 5, 104—112, 113—126 (1945); idem Nr. 10, 104—110, 1947.
3. *S. I. Pasecinic* — Trudî Leningradscovo tehnologicescovo instituta im. Molotova, III, 113, 1955.

## О НИКЕЛИРОВАННЫХ АНОДАХ ПРИ ПОЛУЧЕНИИ ПЕРМАНГАНАТА КАЛИЯ

(Краткое содержание)

В работе показано, что никелевые аноды, использованные при электролитическом получении перманганата калия, могут быть заменены стальными никелированными анодами после соответствующей термообработки. Никелированные аноды при электролизе перманганата калия ведут себя подобно никелевым анодам. По сравнению со стальными анодами никелированные аноды обеспечивают входы по току в среднем на 15% выше и обладают в 20 раз более высокой коррозионной стойкостью.

## LE COMPORTEMENT DES ANODES NICKELÉS UTILISÉS POUR OBTENIR LE PERMANGANATE DE POTASIUM.

(Résumé)

On montre que les anodes nickelés utilisés dans le procésus d'obtention du permanganate de potassium peuvent être remplacés par des anodes d'acier nickelé aprés un traitement thermique adéquat. Les anodes nickelés se comportent d'une manière semblable aux anodes de nickel. Les rendements de courant obtenus avec des anodes nickelés sont approximativement à 15% plus hauts que les rendements obtenus avec les anodes d'acier.

La stabilité chimique des anodes nickelés dépasse approximativement 20. fois Celle des anodes d'acier.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

# CHIMIE ORGANICĂ

662.741.5

## ELEMENTE CARACTERISTICE ÎN PROCESUL DE COCSIFICARE AL CĂRBUNELUI

### I. ASUPRA BITUMENULUI DIN CĂRBUNII COCSIFICABILI

de I. L. BLUM

A. *Cocsurile de petrol.*

Într-o lucrare anterioară [1] m-am ocupat de anumite însușiri ale cocsurilor de petrol provenite din procesele de cracking din industria de petrol și anume, de modul de comportare la pirogenarea ulterioară a lor. Cocsul de petrol este rezidiul solid, poros, rezultat fie din distilarea pînă la sec a unui țiței fie produs prin cracarea specială a fracțiunilor grele din țiței cu depunere de carbon.

Cocsurile de petrol, mai pot proveni din instalațiile Knowles [2]. Cocsurile din instalațiile Knowles nu prezintă interes pentru problema pe care ne-am propus s-o desbatem, dat fiind că dau procente mici de materii volatile și rezidiul de la repirogenare este pulverulent.

Condițiunile fizice în care se face cracarea fracțiunilor grele, în industria de petrol, au creiat două procedeie generale de cracare termică *), și anume:

a. — cracarea la presiuni joase (0,5 — 4 at.) la temperaturi înalte (600 — 640°), cunoscută sub denumirea de cracare în fază de vapori, și

b. — cracare la presiuni înalte (25 — 55 at.) și temperaturi moderate (450—550°) denumită cracare în fază lichidă.

Presiunile joase fac ca reacțiile de polimerizare și copolimerizare să prezinte o intensitate oarecum redusă; cantitatea mică de polimeri formată dă reziduri solide puține, cantitate redusă atît de asfaltene cît și de carboide. Totuși, polimerizarea poate deveni activă și la presiuni joase, numai dacă temperaturile utilizate devin mult mai ridicate, peste 650°, chiar pînă la 700°C, dar se soldează cu producere de hidrocarburi aromatice. De altfel temperaturile ridicate duc la un procedeu cunoscut sub denumirea de aromatizare pirogenetică. Durată prelungită poate duce însă chiar la copolimerizări cu formare de rășini și de carboide.

Presiunile înalte favorizează cracarea pînă la rezidiu solid, în care factorul durată are un rol deosebit, astfel încît se ajunge la o dehidrogenare foarte accentuată cu formare de carboide solide necracabile.

*) Denumire care urmărește diferențiarea față de cracare catalitică.

Aceste carboide, alcătuite din particole de dimensiuni coloide, se aglomerează treptat, formînd cocsul de petrol.

Cracarea pînă la cocs se caracterizează deci prin copolimerizare și asfaltizare succesivă a fracțiunilor grele, concomitent cu dehidrogenarea, ceea ce constituie cauza principală a formării cocsului.

Cocsurile de petrol astfel obținute, alcătuiesc deci o diversitate de categorii, în funcție de gradul de cracaj la care au fost supuse în camera de cracking. Compoziția și proprietățile cocsurilor de petrol depind desigur de materia primă supusă cracajului, de predominanța unora sau a altor clase de hidrocarburi, dar sînt legate de durata și intensitatea cracării. Ca o primă diferențiere și cea mai importantă, a gradului de cracare, am folosit procentul de materii volatile care, la cocsurile de petrol poate varia de la 0% — cocsuri seci — pînă la cifre care depășesc 50 — 60%, astfel încît, pentru acestea din urmă, însăși aspectul materialului ne arată că denumirea de cocs nu mai este indicată. Mecanismul formării cocsului de petrol comportînd o succesiune de dehidrogenări și scindări de hidrocarburi din complexul de rezidiuri grele, produsul format conține și carbon elementar, dar trebuie considerat mai ales ca fiind alcătuit dintr-un complex de carbon, de hidrocarburi nesaturate cu greutăți moleculare foarte mari și substanțe smoloase. Variația în procentul de materii volatile, la diverse cocsuri de petrol, duce la concluzia că termenul de cocs de petrol este cu totul generic, incluzînd o gămă foarte mare de cocsuri ; fiecare cocs însă, poate fi caracterizat, în special, prin procentul de materii volatile, care alcătuiesc astfel o caracteristică a sa susceptibilă de a-l diferenția, atît constituțional, cît și în însușiri. Procentul de materii volatile se determină prin metode analoage celor aplicate cărbunilor fosili, adică cocsificarea, în creuzet de platină, a unui gram de cărbune pulverizat și pastilat.

In lucrarea noastră menționată am arătat că unele categorii de cocsuri de petrol, supuse unei pirogenări ulterioare adică cocsificate în condițiuni analoage celor aplicate huilelor, dau un cocs compact, dur, foarte asemănător cocsurilor din huilele de cocs, atît prin caracteristicile lor fizico-chimice cît și din punct devedere al structurii și al rezistenței mecanice. Alte cocsuri de petrol lasă un rezidiu cocsificat dar mai spongios. In sfîrșit altele se comportă ca și huilele antracitoase, lăsînd de asemenea un rezidiu dar acesta este pulverulent sau cu slab început de aglomerare.

Pentru o clasificare rațională a cocsurilor de petrol am arătat modul de comportare al lor în tratamentul pirogenetic ulterior în funcție de materiile voltaile degajate. In tabela 1 [3] sînt trecute caracteristicile chimico-tehnice ale unor tipuri reprezentative de cocsuri de petrol, așezate în ordinea crescîndă a procentelor de materii volatile.

Datele analitice și compoziția elementară a cocsurilor de petrol ca și aspectul butonilor de cocs, după executarea operației de determinare a materiilor volatile, acuză o foarte apropiată asemănare cu huilele. Această asemănare merge chiar mai departe încît, atît gudroanele cît și gazele adică materiile volatile degajate la recocsificare, au compoziția foarte apropiată de aceea a gudroanelor și gazelor rezultate din cocsificarea huilelor, bineînțeles, că randamentele și constituția lor chimică

Tabelul 1

**Caracteristicile chimico-tehnice ale probelor de cocs de petrol**

| | Nr. crt. probei | Compoziția generală | | | Cocsificarea (mat. uscat.) | | | Puterea cal. super. | Sulf | | | Compoziția elementară | | | | | Fuel. rație | Aspectul cocsului obținut din redistil cocsului de petrol |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Apă % | Cen. și % | Subst. comb. % | Cocs % | Mat. volat. % | Cărb. Fix % | kcal./kg. | Total % | Fix % | Comb. % | C % | H % | S % | N % | O % | Cărb. fix / mat. volatile | |
| Cocs de înaltă presiune | 1 | 1,02 | 1,60 | 97,38 | 93,75 | 6,25 | 91,13 | 8616 | 0,66 | 0,22 | 0,44 | 92,89 | 2,43 | 0,44 | 0,60 | 1,02 | 14 | Pulverulent |
| | 2 | 0,51 | 1,71 | 98,78 | 93,05 | 6,95 | 91,83 | 8640 | 0,62 | 0,08 | 0,54 | 92,87 | 2,43 | 0,54 | 0,63 | 1,30 | 13 | Pulverulent |
| | 3 | 0,32 | 0,98 | 98,70 | 91,07 | 8,93 | 89,77 | 8695 | 0,53 | 0,01 | 0,52 | 92,80 | 2,97 | 0,52 | 0,57 | 1,84 | 9 | Pulverulent |
| | 4 | 1,75 | 0,85 | 97,40 | 89,59 | 10,41 | 86,99 | 8854 | 0,51 | 0,19 | 0,42 | 92,00 | 3,36 | 0,42 | 0,63 | 0,99 | 8 | Pulv. slab aglomerat |
| Cocs de joasă presiune | 5 | 1,46 | 0,95 | 97,59 | 85,67 | 14,33 | 84,26 | 8873 | 0,75 | 0,39 | 0,36 | 91,35 | 3,36 | 0,36 | 0,60 | 1,65 | 6 | Cocs compact |
| | 6 | 1,27 | 0,98 | 97,85 | 81,50 | 18,50 | 78,25 | 9000 | 0,73 | 0,27 | 0,46 | 91,23 | 3,83 | 0,47 | 0,47 | 1,75 | 4 | Compact-topit slab spongios |
| | 7 | 1,53 | 1,01 | 97,46 | 79,59 | 20,41 | 77,05 | 9026 | 0,55 | 0,09 | 0,46 | 90,16 | 4,00 | 0,46 | 0,53 | 2,31 | 3 | Topit spongios |
| | 8 | 2,08 | 1,31 | 96,61 | 73,17 | 26,83 | 71,86 | 9143 | 0,46 | 0,11 | 0,35 | 87,13 | 6,15 | 0,35 | 0,41 | 2,57 | 3 | Topit f. spongios |
| | 9*) | 1,51 | 0,93 | 97,56 | 84,29 | 15,71 | 81,25 | 8913 | 0,62 | 0,19 | 0,43 | 91,43 | 3,62 | 0,43 | 0,51 | 1,57 | 4 | Compact, dur |
| | 10 | 2,36 | 1,75 | 95,89 | 36,84 | 63,16 | 34,48 | 9316 | 0,59 | 0,03 | 0,56 | 84,40 | 9,13 | 0,56 | 0,51 | 1,29 | 1 | Coaje de cocs |

*) Proba nr. 9 a fost obținută din amestecarea a: 30% din proba nr. 4 și 70% din proba nr. 6.

variază în funcție de particularitățile cocsurilor de petrol ce au fost supuse pirogenării ulterioare. Randamentul și compoziția gazelor de la pirogenarea cocsurilor de petrol, sînt arătate în tabelul 2.

Tabelul 2

| Nr. crt. al probei | Procente de mat. volatile în materialul inițial % | Cantitatea de gaze obținute, calculate la tona de cocs de petrol, m/³ tonă | Compozitia gazelor, fără aer: $CO_2$ % | $H_2S$ % | $C_nH_m$ % | $O_2$ % | $H_2$ % | CO % | $CH_4$ și homol. % | $N_2$ prin dif. % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,25 | 159 | — | — | — | — | 89,0 | 0,4 | 4,4 | 6,2 |
| 2 | 6,95 | 163 | — | urme | — | — | 88,2 | 0,4 | 3,6 | 7,8 |
| 3 | 8,93 | 261 | — | urme | — | — | 89,7 | 0,8 | 4,2 | 5,3 |
| 4 | 10,41 | 277 | — | — | — | — | 84,3 | 0,2 | 6,4 | 9,1 |
| 5 | 14,83 | 289 | — | — | — | — | 86,7 | 0,6 | 5,6 | 7,1 |
| 6 | 18,53 | 310 | — | urme | — | — | 81,5 | 0,9 | 9,3 | 8,3 |
| 7 | 20,41 | 315 | — | urme | — | — | 78,5 | 0,8 | 12,2 | 8,6 |

Din cercetarea acestui tabel desprindem următoarele:

1. — Cantitatea de hidrogen rezultată este foarte mare în compoziția procentuală a gazelor.

2. — Lipsește total $CO_2$.

3. — Cantități foarte mici de $CO$.

4. — Prezență de azot, în gaz, rezultat din compușii cu azot din cocsul de petrol inițial.

Gudroanele s-au dovedit foarte bogate în hidrocarburi aromatice, cu predominanța naftalinei.

In sfîrșit am arătat că, apele pirogenetice, ca și în cazul huilelor sînt ape amonicale, corespunzătoare unei transformări pînă la 25% din azotul aflat în compoziția elementară a cocsurilor de petrol studiate. Aceste ape, dat fiind cantitatea redusă de apă de inbibație preexistentă sînt formate aproape exclusiv pirogenetic. Prezența azotului, în țițeiuri, s-ar datori unor resturi proteice, și, cum se vede, se acumulează în reziduul solid de la cracarea fracțiunilor grele de țiței. Distribuirea azotului, la cocsificarea huilelor, în gudroane și gaze, sub formă de amoniac, grupări cianogenice și baze piridinice, precum și sub formă de azot elementar în gaze, o găsim și la recocsificarea cocsurilor de petrol. Multiplele asemănări dintre modul de comportare al cocsurilor de petrol cu acela al huilelor, în procesul de pirogenare al lor, duc la concluzia că trebuie să existe și o oarecare asemănare constituțională a lor. Dar fiind că în huile avem ca predominantă constituția humică, generată de componenții ligno-celulozici genetici, constituție humică ce nu poate fi existentă în cocsurile de petrol, rezultă că, produsele volatile degajate în procesul pirogenetic, din cocsurile de petrol, își pot găsi corespondentul, în huile, în componenții asemănători bitumenelor, fie că aceste bitumene sînt preexistente în parte, fie că ele se formează ca produse secundare prin pirogenarea huilelor.

Diferența accentuată în procentajul de materii volatile, între huile și cocsurile de petrol care dau butoni de cocs de rezistență mecanică egală, trebuie căutată, în special, în componentul vitritic al huilelor.

Se observă, de asemenea, că cocsurile de petrol, mai ales cele sărace în materii volatile, dau gaze foarte bogate în hidrogen. Din acest

punct de vedere, cocsurile de petrol, mai sărace în materii volatile, pot fi comparate cu antraciții care, cum a arătat Lebeau [4] dau, la cocsificare, gaze foarte bogate în hidrogen.

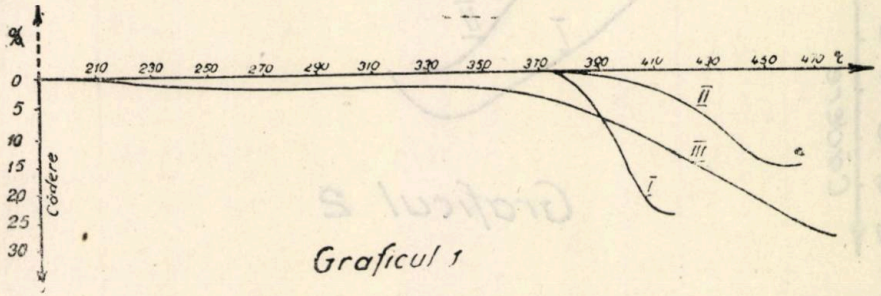
Absența $CO_2$ ca și micile procente de $CO$ în gazele rezultate din pirogrenarea tuturor tipurilor de cocs de petrol, studiate, pot fi explicate prin absența unor procente mai însemnate de oxigen constituțional.

Am putea, comparativ, să conchidem că $CO_2$ și $CO$ din constituția gazelor de la pirogenarea cărbunilor fosili se datorește, exclusiv masei humice, și constituie o caracteristică a sa, mai ales că în diferitele stadii de metamorfozare a cărbunilor fosili, cantitatea de $CO$ dar mai ales de $CO_2$ de la degazarea pirogenetică a cărbunilor fosili reprezintă tocmai aceste stadii [5].

Mai mult chiar, nu am reușit să stabilim prezența fenolo-crezolilor în gudroanele formate din cocsurile de petrol recocsificate *).

In ceea ce privește caracterele reziduiului de la recocsificare se constată că cocsurile de petrol, cu procente de materii volatile cuprinse aproximativ, între 13 — 18%, s-au dovedit că dau, la pirogenare, reziduriile cele mai compacte, deci formează un cocs asemănător huilelor de cocs. Procentul optim de materii volatile are valoare relativă și poate fi, pentru unele cocsuri de petrol, mai mare sau mai mic.

Ca și în cazul huilelor cocsificabile cocsul de petrol susceptibil să dea, prin recocsificare, reziduri solide compacte, se plastifiază înainte de a forma acest rezidiu compact, condiție necesară pentru aglutinare și cocsificare. Plastifierea se face după o curbă care are oarecari asemănări cu curbele de plastifiere ale huilelor. Astfel, la aparatul Kattwinkel- Baum-Shimomura, alura de cădere a curbei de plasticitate pentru o huilă de gaz — Lupeni —, o huilă de cocs — Anina — și un cocs de petrol de cracking, este arătat în graficul 1.




Graficul 1

Alura de cădere a curbei de plastifiere la o huilă de gaz (I), o huilă de cocs (II) și un cocs de petrol (III).

Principalele particularități chimico-tehnice ale cărbunilor comparați sînt următoarele :

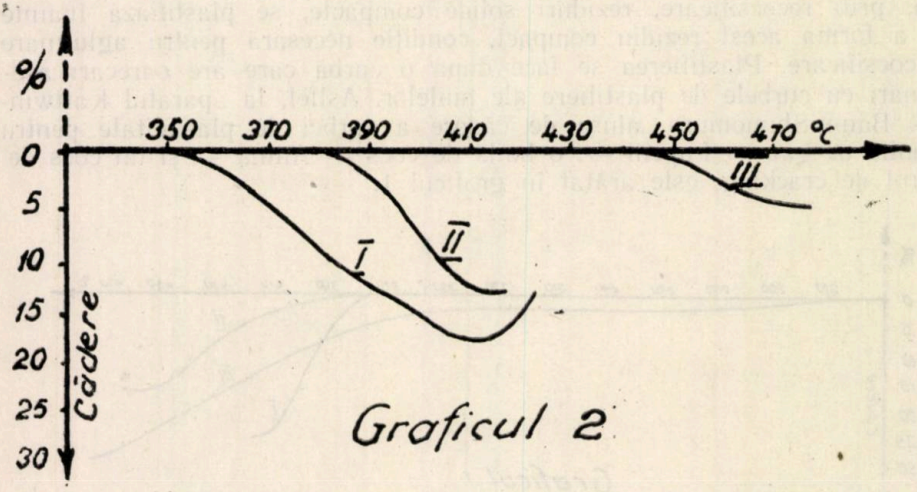
| | *I. Lupeni* | *II. Anina* | *III. Cocs de petrol* |
|---|---|---|---|
| Umiditate % | 1,86 | 1,55 | 1,46 |
| Cenușă % | 7,23 | 7,75 | 0,95 |
| Mat. volat. % | 38,44 | 28,14 | 14,33 |

*) O lucrare pe care o avem în curs va adînci mai mult cercetarea compoziției gudronului format la repirogenarea cocsurilor de petrol.

Intervalul plastic este foarte lung pentru cocsul de petrol menționat, pentrucă începutul de înmuiere este foarte jos și solidificarea mult întîrziată, dar căderea curbei este cam de același ordin de mărime.

Fără îndoală că intervalul de înmuiere este dependent în primul rînd de elementul plastic, bitumenele, a căror prezență cantitativă și calitativă în perioada de plastifiere determină însăși caracterul de plastifiere. Rezultă că un factor important va fi raportul între elementul plastic și cel neplastic (masa cărbunoasă) aceasta din urmă fiind caracterizată printr-un complex care se desagregă sub acțiunea termică, se dispersează în masa vîscoasă a bitumenelor dar nu posedă însușiri plastifiante.

Un factor care influențează intervalul plastic, începutul și finalul de înmuiere, ca și căderea curbei de plastifiere este însăși cantitatea de cenușă din cărbuni, respectiv sterilul conținut. Iată de pildă, alura curbei de plastifiere pentru diferite probe din huila de gaz — Uricani cu procente de cenușă variabile, graficul 2.

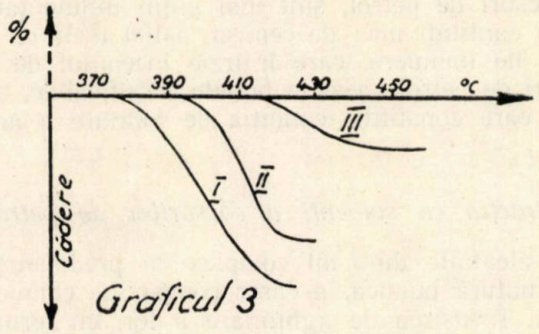



Graficul 2

Variație în alura de cădere a curbei de plastifiere la o huilă de gaz — Uricani — în raport cu procentul de steril conținut.

| | *Uricani* | | |
|---|---|---|---|
| Cenușă % | I. 7,65 | II. 19,11 | III. 41,78 |
| Inceput de înmuiere al cărbunelui | 360° | 390° | 450 |

sau pentru o altă huilă de gaz — Lupeni de asemenea cu procente de cenușă variabile, graficul 3,



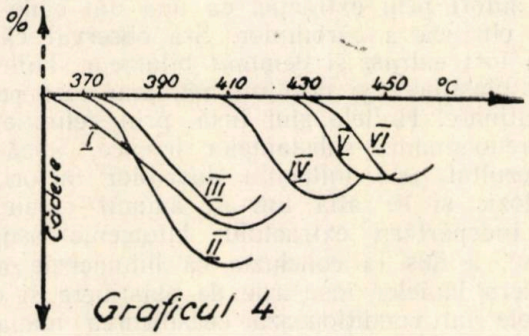

Alura curbei de plastifiere la o huilă de gaz — Lupeni — în raport cu procentul de steril conținut.

*Lupeni*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cenușă % | I. 7,23 | II. 10,86 | III. 28.84 |
| Început de înmuiere al cărbunilor | 375° | 405° | 415° |

din care reiese că conținutul de steril influențează alura curbei și intervalul de plastifiere.

Curba de plasticitate variază și în raport cu clasa granulometrică extrasă din cărbuni; aceasta poate fi tradusă prin dependența față de componentul petrografic predominant. Astfel, de ex. pentru huila de gaz Uricani, spălată, alura curbei, cum se vede în graficul 4, este diferită atît ca interval — început de înmuiere și sfîrșitul plasticității, — cît și ca alură de cădere a curbei în raport cu sortul granulometric.




Alura de cădere a curbei de plastifiere a unei huile de gaz — Uricani — în raport cu diferitele sorturi granulometrice, separate după spălare.

| *Sort granulometric* | *Cenușă %* | *Sort granulometric* | *Cenușă %* |
|---|---|---|---|
| I. Peste 50 mm | 7,83 | IV. 10—5 mm | 7,67 |
| II. 50—25 mm | 7,65 | V. 5—3 mm | 8,15 |
| III. 25—10 mm | 8,03 | VI. 3—1 mm | 7,24 |

Urmărind alura de cădere a curbei de plasticitate la cocsul de petrol menționat, se observă o cădere lentă pe un interval lung, cădere care devine mai bruscă mai tîrziu (graficul 1). Particularitățile curbei de plasticitate la cocsuri de petrol, sînt mai puțin influiențate de steril dat fiindcă ele conțin cantități mici de cenușă, astfel încît *nu* apare acea frînare a punctului de înmuiere, care întîrzie începutul de plastifiere. Dar la anumite cocsuri de petrol ca și la huilele cocsificabile, avem acea plastifiere prealabilă care constituie condiția de formare a unui rezidiu cocsificat.

*Extracția cu solvenți a cocsurilor de petrol*

Huilele sînt alcătuite dintr-un complex cu predominanța componenților organici de natură humică, a căror compoziție chimică este încă insuficient lămurită. Însușirea de aglutinare a lor, cu formare de cocsuri în raport cu felul huilei, de la cele mai slab aglomerate pînă la cocsuri compacte, dure și de mare rezistență mecanică, implică o plastifiere prealabilă, în limite de temperatură oarecum caracteristice, urmată de o compacizare. Așa dar două faze, bine definite, dar atît una cît și cealaltă au loc în urma unei descompuneri pirogenetice a huilelor și concomitent cu aceste descompuneri. Deoarece alte tipuri de cărbuni fosili, de ex. cărbunii bruni și antraciții, în condiții de tratament similare, deși suferă descompunere pirogenetică nu plastifiază și deci rezidul nu mai are aspectul caracteristic al cocsului de huile, deducem că există fie o diferențiere de componenți constituționali, nu numai cantitativă ci și calitativă, care împiedică, în condițiunile date, formarea de cocs, fie că în prezența unei diferențieri constituționale, influiența reciprocă a acestor constituienți împiedică prima fază — plastifierea — și deci nu mai poate avea loc cea de a doua fază, compacizarea, consecință a primei faze.

Încercările de stabilire a compoziției cărbunilor s-au făcut, între altele, de diverși autori prin extracție, ca una din căile care afectează minimal structura chimică a cărbunilor. S-a observat că prin îndepărtarea a ceea ce a fost extras, și denumit bitumene, huilele cocsificabile pierd însușirea de plastifiere și deci nu mai dau cocs pentrucă lipsește materialul de aglutinare. Huilele sînt însă, prin definiție, materiale caracterizate prin predominanța substanțelor humice, adică a acelor substanțe care au rezultat, sub influența diferiților factori, din materia! genetic ligno-celulozic și se află într-un anumit stadiu de metamorfozare. Influența îndepărtării extractului bitumenic asupra plastifierii și formării cocsului, a dus la concluzia că bitumenele alcătuiesc componentul care conferă huilelor însușirile de plastifiere și cocsificare. Desigur că bitumenele nu condiționează cocsificarea numai prin simpla lor prezență, la momentul respectiv, ci se pare că importanța primordială o are dispersiunea coloidală a bitumenelor în rețeaua micelară a cărbunelui. De aceea bitumenele readăugite unui rezidiu nu pot să mai dea un cocs în totul la fel cu cel inițial. De altfel în cercetările noastre asupra unor probe de huile de gaz — Lupeni — și care dă un cocos spongios, îndepărtarea extractului bitumenic obținut cu benzen sub presiune, au dus la un rezidiu care supus cocsificării, dă un cocs mai compact, în loc să-și piardă însușirile de cocsificare, cum vom arăta într-o lucrare

ulterioară. Comparat cu o huilă de cocs — Anina — care după extracția bitumenului, în aceleași condiții, pierde însușirea de cocsificare, cantitatea de extras din Lupeni era totuși mult mai mare.

Cocsurile de petrol, rezultate din procesele de cracare de înaltă presiune, se pot caracteriza prin cantitatea redusă de materii volatile ca o consecință a unor polimerizări foarte accentuate, pînă la carboide; cele de joasă presiune, au procente mai mari de procente volatile, *cauza primordială a acestor materii volatile o constituie rezidiul bituminos mai mult sau mai puțin asfaltizat*, alcătuind, cu particolele de carbon, un complex coloidal.

S-au identificat în cocsurile de petrol, hodrocarburi ca picene $C_{22}H_{24}$, crachene $C_{42}H_{18}$, *antracene* $C_{14}H_{10}$, fenantrene $C_{14}H_{10}$, *chrisene* $C_{18}H_{22}$, etc. ca o consecință a reacțiilor de ordinul II, adică polimerizări ale hidrocarburilor aromatice sau hidrogenarea parțială și urmată de condensarea radicalilor ciclici formați, precum și copolimerizări, condensarea radicalilor ciclici și arilici formați după dehidrogenarea parțială. Conțin însă și rășini și asfaltene formate din nucleie aromatice, intens condensate, adică rezultate din reacții paralele de copolimerizare cu oxigen, cu sulf și cu azot.

*Compoziția elementară a cocsurilor de petrol în raport cu procentajul de materii volatile, ne poate servi ca indicator al gradului de carboidificare al rezidului solid de la cracking*, întrucît carboidificarea mai mult sau mai puțin accentuată se stabilește ușor prin degajarea unei cantități mai mici sau mai mari de materii volatile, la proba de cocsificare. ,

Comparînd cu huilele se observă că cocsurile de petrol care au materii volatile între cca 12 — 18% dau, la repirogenare, cele mai compacte rezidiuri.

Procentul de materii volatile din huile se datorește atît bitumenului preexistent, cunoscut sub denumirea de bitumen A, aflat în cantități deosebit de mici cît și descompunerii complexului humic care, din punct de vedere petrografic este reprezentat prin diverși componenți, în care componentul format din spori contribuie cu procentele cele mai mari. Ca valoarea absolută, vitrita fiind predominantă, ea este și sursa cea mai importantă de materii volatile. Evident că bitumenul care apare în perioada de plastifiere, suferă o descompunere și participă la formarea materiilor volatile. În cocsurile de petrol materiile volatile se formează în măsură corespunzătoare din eventualele resturi de hidrocarburi, dar în cea mai mare parte din substanțele bituminoase — asfalto-rășinoase — și eventual din descompunerea carboidelor, descompunere redusă, dat fiind că rezidiul de la recocsificarea lor mai are ceva hidrogen.

Așa dar la cocsurile de petrol, o contribuție importantă în formarea materiilor volatile o au componenții polimeri și copolimeri, material preexistent în aceste cocsuri și aflat într-o dispersie deosebit de fină în masa carboidică. Componenții aceștia pot fi asemuiți cu bitumenul B din huile, întrucît au același rol în cocsificarea ulterioară a cocsurilor de petrol care dau reziduri cocsificate, adică plastifiază masa și provoacă formarea cocsului; ei nu pot fi extrași numai prin simplă solvire în benzen, ci numai dacă folosim presiune și temperatură ridicată ca și la extracția bitumenului B din huile.

Alegerea solventului la studiul huilelor prin extracție diferă după scopul urmărit. Numărul solvenților utilizabili este foarte mare dar, după modul lor de acțiune, se pot considera două grupe: a piridinei și a benzenului, fiecare din acești solvenți fiind tipul reprezentativ pentru o clasă întreagă de solvenți. Pentru a extrage pe cît posibil componenți cît mai puțin alterați și a afecta minimum posibil masa cărbunoasă, s-au studiat, la huile, comportarea așa zișilor solvenți chimic inerți, benzen, cloroform, etc. și la temperaturi mici și presiune ordinară. S-a constatat că în acest caz cantitatea de extras este foarte mică. Utilizarea benzenului ca solvent, la temperaturi apropiate de punctele sale critice dă randamente mai mari. Un principiu general al cocsificării, nu se cunoaște încă, cocsificarea este însă determinată de procese pirogenetice, cum ar fi acela de descompunere al bitumenelor. Acest fapt se observă foarte bine în modul de comportare al cocsurilor de petrol cu conținut de materii volatile mai ridicat.

*Extracții cu benzen la rece.*

Cocsul de petrol antrenează, în procesul său de formare, substanțe asemănătoare bitumenelor depuse superficial pe cocsul de petrol dar neintegrate coloidal. Aceste substanțe pot fi ușor îndepărtate prin simplă spălare, cu benzen, la rece. Cantitatea de bitumere reținută superficial este mai mare la cocsurile foarte bogate în materii volatile în care rezidiul carboidic este în cantitate mică.

Astfel dintr-un cocs de petrol, cu cca 63% materii volatile, prin spălare, cu benzen, la rece, s-a redus procentul de materii volatile la cca 31%. Interesant că această spălare aplicată unor probe de cocs de petrol, cu materii voltatile reduse, nu a afectat însușirile lor de cocsificare, deși în unele cocsuri, anume acele din probele 7 și 8 s-au extras pînă la cca 3,7%; dimpotrivă, la proba 10, la care a ajuns de la 63% la 31%, materii volatile, butonul de cocs, care la proba inițială era foarte umflat, umplea creuzetul ca și în probele Conradson; după spălare cu benzen, la rece, pentru îndepărtarea bitumenului, acest cocs de petrol prezintă la cocsificare, un buton mult mai puțin umflat, cu început de compacizare, ceea ce denotă că bitumenele reținute superficial influențează și ele procesul de plastifiere și că deci umflarea cocsului se datorește și acestui component, deși în mică măsură.

*Extracții cu benzen la fierbere și presiune ordinară, în Soxhlet.*

Neglijînd influența factorului granulație, materialul supus extracției a fost măcinat sub 5 mm și s-a ales sortul 0,5—5 mm. Randamentul în bitumene extrase este foarte asemenea aceluia de la extracția la rece. Comportarea rezidiului, la recocsificare, seamănă cu aceea observată la rezidiurile de la extragerea cu benzen la rece.

Desprindem, de aci, concluzia că, în afara cocsurilor cu multe materii volatile, celelalte au bitumenele bine fixate în complexul coloid deci nu pot fi îndepărtate numai prin simplă spălare cu solvent.

*Extracții cu benzen sub presiune.*

S-a lucrat cu același sort granulometric în autoclavă de 1 litru capacitate, în mișcare. S-au supus extracției 200 g material cu cca 500 $cm^3$ benzen și s-a obținut ușor cca 52—58 at. și 270—280°C; au fost necesare cca 2 ore pentru a se atinge presiunea de regim după care, la această presiune, s-a mai ținut timp de cca 1 oră. Extracțiile s-au repetat de cîteva ori cu benzen proaspăt în aceleași condițiuni, dar, după fiecare extracție rezidiul era în prealabil spălat cu benzen rece. S-au repetat extracțiile pînă la atingerea unui randament al extracției de cca 0,1—0,2% după care s-a considerat extracția epuizată și anume după a 5-a extracție. Rezistența butonilor de cocs scade cu avansarea extracției și chiar înainte de epuizarea finală a extracției, butonul de cocs din cocsurile de petrol care neextrase dădeau cocsuri compacte, rămîne neaglutinat, prăfos.

Procentele de bitumen extrase variază, după cum se vede în tabelul 3.

Tabelul 3

**Extracție cu benzen sub presiune, pînă la epuizare**

| Nr. crt. al probei | Materii volatile (inițial) % | Bitumen după prima extracție | Numărul total al extracțiilor | Total bitumen extras % | ASPECTUL BUTONULUI DE COCS | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Materialul inițial | După prima extracție | După ultima extracție |
| 5 | 14,33 | 5,83 | 5 | 7,51 | Compact | Sfărîmicios | Sfărîmicios, rezistență foarte mică |
| 6 | 18,50 | 7,75 | 5 | 10,65 | Compact puțin spongios | Idem | Idem |
| 8 | 26,83 | 8,43 | 5 | 11,30 | Topit spongios | Idem început de aglutinare | Idem |
| 10 | 63,10 | 34,11 | 5 | 39,62 | Început de aglutinare fără rezistență, umflat | Umflat început de aglutinare | Praf. aglomerat |

Tabelul 4 indică cantitatea de bitumene obținute la extragere cu benzen sub presiune, în raport cu numărul succesiv de operații în extracții.

Tabelul 4

**Randament de extracții pentru fiecare extracție succesivă, cu benzen sub presiune**

| Nr. crt. al probei | Materii volatile | RANDAMENT IN BITUMEN | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Extracția I | Extracția II | Extracția III | Extracția IV | Extracția V | Extras total |
| | % | % | % | % | % | % | % |
| 5 | 14,33 | 5,23 | 1,00 | 0,86 | 0,25 | 0,17 | 7,51 |
| 6 | 18,50 | 7,75 | 1,32 | 0,66 | 0,80 | 0,12 | 10,65 |
| 8 | 26,83 | 8,43 | 1,44 | 0,83 | 0,40 | 0,20 | 11,30 |
| 10 | 63,10 | 34,11 | 3,57 | 1,08 | 0,77 | 0,09 | 39,62 |

Randamentul în extras este mai mare în prima extracție apoi devine din ce în ce mai redus.

Extracția sub presiune, ca și în cazul huilelor duce la un rezidiu care, la recocsificare, prezintă butoni de cocs slăbiți. Fiecare extracție, în parte, slăbește butonul de cocs, în raport cu particularitățile inițiale de cocsificare, respectiv cu procentul de materii volatile. Considerînd că bitumenele, care conferă însușirea de cocsificare, sînt extrase succesiv, extragerea lor are ca efect o diminuare succesivă a capacității de aglutinare.

*Compoziția bitumenelor extrase.*

Bitumenul obținut din tratamentul cu benzen în Soxhlet, din diferitele probe de cocs de petrol, se poate împărți în trei categorii:

a) din cocsurile de petrol seci, adică din acelea cu pînă la 6% materii volatile, extrasele sînt de culoare deschisă, cafenie-gălbuie, solide și uneori lipicioase.

b) din cocsurile de petrol cu procente de materii volatile pînă la cca. 22%, extrasele sînt aproape lichide, vîscoase, de culoare neagră.

c) din cocsurile de petrol cu procente de materii volatile mai mari sau foarte mari, extrasele sînt aproape lichide, vîscoase, de culoare neagră.

La extracția cu benzen sub presiune, toate extrasele sînt negre, poate cu o nuanță mai cafenie la cocsurile de petrol avînd inițial materii volatile mai reduse; extrasele sînt solide, ușor fluidizabile, dar vîscoase și lipicioase pentru acelea provenite din materialele cu procente ridicate de materii volatile.

Analiza elementară a bitumenelor extrase sub presiune, ca atare, nu acuză deferențieri prea mari, cum se vede în tabela 5.

Tabela 5

**Compoziția elementară a extractului bitumenic de la extracția cu benzen, sub presiune**

| Extrasul bitumenic | C % | H % | S % | O + N % prin diferență | Rația atomică C/H |
|---|---|---|---|---|---|
| Din proba 5 | 86,76 | 10,03 | 0,55 | 2,66 | 0,72 |
| Idem proba 6 | 87,16 | 9,25 | 0,34 | 3,25 | 0,78 |
| Idem proba 8 | 84,18 | 10,84 | 0,78 | 4,20 | 0,66 |
| Idem proba 10 | 85,94 | 11,37 | 0,64 | 2,05 | 0,63 |

*Extracții cu alți solvenți.*

În lucrarea noastră menționată, am făcut cîteva încercări de extracție cu alți cîțiva solvenți.

Este de reținut că, după extracția cu benzen sub presiune ca și cu piridină la punctul său de fierbere, rezidiul, deși în majoritatea cazurilor pierde însușirile de cocsificare, mai dă procente destul de mari de materii volatile.

Randamentul în extrasul cu piridină este mult mai mare comparat cu cel obținut cu benzen sub presiune, totuși, nu la nivelul diferențierii constatate la cărbunii fosili. Astfel proba 5 care la extragere cu benzen sub presiune a dat 7,51% bitumen, la extragere cu piridină cantitatea de extras a ajuns la 11,43%, deci, deși mai mare, nu este depășită de cît cu cca 50%, în timp ce, în majoritatea cazurilor, la cărbuni fosili, depășirea este un multiplu și anume de 3 sau 4 ori și chiar mai mult în extracția cu piridină față de extracția cu benzen sub presiune.

Butonii de cocs din rezidurile după extracții cu piridină, în toate cazurile, sînt neaglutinați.

*Concluziuni.*

1) Între cărbunii fosili — huile și antraciți — deoparte și cocsurile de petrol rezultate de la crackingul păcurilor, de altă parte, există unele elemente comune atît în ceeace privește constituția lor cît și sub raportul unor însușiri reologice, deși genetic sînt materiale cu totul diferite.

a) Astfel, unele categorii de cocsuri de petrol, ca și unele huile supuse unui tratament pirogenetic se înmoaie, trec printr-un stadiu de plastifiere apoi lasă un rezidiu compact dur.

b) Calitățile fizico-mecanice ale acestor reziduri pot fi deduse, în oarecare măsură, atît la cocsurile de petrol ca și la huile, din procentajul de materii volatile, procentaj care reprezintă pentru huile gradul de metamorfozare, pentru cocsurile de petrol gradul de cracare.

c) Din punct de vedere cristalografic, studiile moderne, efectuate cu ajutorul razelor *X*, au arătat diferite structuri ale cocsului de petrol cu interferențe similare grafitului. Cu ajutorul difracției de raze catodice și a microscopului electronic s-a dovedit prezența unor cristale de grafit, formînd un schelet înconjurat de compuși organici, cu greutate moleculară mare.

Unii cercetători consideră cocsurile de petrol ca fiind sisteme disperse, formate din cristale foarte mici înecate într-o masă amorfă de compuși aromatici foarte condensați. Cristalele, pe măsură ce cracajul avansează, se dezvoltă în detrimentul masei amorfe, căreia i se reduce succesiv, din materiile volatile și-și schimbă treptat caracterul. În consecință, diversele tipuri de cocsuri de petrol, pe care noi le-am caracterizat prin diferența în procente de materii volatile, pot fi considerate ca aparținînd unei serii continuie de sisteme disperse, între asfalt și grafit, fiecare etapă, față de precedenta, fiind mai bogată în cristalite și rezultată din cracajul progresiv al compușilor secundari și terțiari de reacție.

Cercetările röntgenografice aplicate huilelor au arătat că în cărbuni se găsesc deasemeni cristalite rigide alături de așa numitele cristalite mobile. În reprezentarea structurală a lui Reily [6] cristalitele rigide sînt constituite din straturi grafitice paralele, iar cele mobile conțin diferite grupe laterale. Acestea din urmă, în procesul de formare al cărbunilor, pierd, succesiv din grupele laterale, în raport cu stadiul de metamorfozare, transformîndu-se astfel în cristalite rigide și mărind astfel, pentru fiecare etapă ulterioară, numărul cristalitelor rigide. Așa dar există o tendință ca în etapa finală de metamorfozare a cărbunilor fosili să apară un sistem alcătuit totalmente din cristalite rigide, adică numai din straturi grafitice paralele, tendință pe care o găsim și la cocsurile de petrol, cu

avansarea gradului de cracaj. De altfel, dacă se supun huilele unor operații pirogenetice brutale, cum ar fi cocsificarea lor, procesul se desfășoară în același sens, pe contul grupelor laterale mobile, care trec astfel die cristalite mobile în cristalite rigide [7].

Structura cristalografică a bitumenelor extrase cu piridină, din huile, este foarte asemănătoare acelea găsite pentru substanțele humice [8] după cum se pare că se dovedește și pe cale chimică deci cu predominanța nucleelor aromatice [9].

d) Bitumenele derivate ca rezidiu la distilarea țițeiurilor, adică tocmai materialul din care, prin cracare, derivă cocsurile de petrol, prezintă o valoare pentru rația *C/H* foarte mare și mai ales, cu atît mai ridicată, cu cît materialul a suferit un cracaj mai avansat; ele se caracterizează deci prin predominanța nucleelor aromatice [10]. Röntgenogramele corespunzătoare duc la concluzii similare adică a unor reprezentări corespunzătoare unor nuclee aromatice [11].

Cercetările efectuate asupra structurii chimice a cărbunilor fosili, prin metode chimice, au stabilit caracterul aromatic policiclic al cărbunilor, ceiace se confirmă și prin cercetările cu metodele de spectroscopie infraroșie [12].

E Veselovski [13] presupune că chiar în perioadele inițiale de formare a cărbunilor încep să apară combinații aromatice policiclice alcătuind uriașe molecule — **stratificate** într-o rețea grafitică — pe marginile căreia se află grupe legate chimic și în cari se găsesc pe lîngă carbon și alți atomi.

S-au făcut diverse reprezentări privitor la numărul de nuclee. După unii cercetători numărul lor variază între 14 pentru 80% carbon și 20 pentru 89% carbon. Nelson [14] care urmărește în vitrita unor huile diferite, cuprinzînd de la 77% la 89% carbon, distribuția statistică a atomilor învecinați ai unui atom dat, folosind analizele integralelor Fourier și evitînd astfel prezumțiile privind natura moleculară sau cristalinitatea substanței cercetate, conchide că pot exista și grupe de 4 nucleie, dacă, din carbonul total, 75%, s-ar afla în nucleele aromatice.

În reprezentarea lui Nesterenco [15] huilele sînt considerate drept amestecuri complexe de diferite substanțe macromoleculare, în care grupa vitritei are proprietățile coloizilor liofili și ar fi alcătuită din unități structurale identice în compoziție.

e) Condensatele derivate din materiile volatile degajate la recocsificarea cocsurilor de petrol sînt alcătuite în special din hidrocarburi aromatice policiclice ca și gudroanele din huile; cocsurile de petrol sînt, cum s-a arătat, tocmai consecința unor polimerizări cu dehidrogenări parțiale a hidrocarburilor aromatice, deci pot fi considerate ca fiind tocmai reprezentantul tipic al unor hidrocarburi aromatice polinucleare.

f) Considerînd cele de mai sus, rezultă că există unele similitudini importante între cocsurile de petrol și huile, mai ales în stadii mai avansate de metamorfozare a huilelor. Dacă ținem seama că dintre constituienții petrografici ai huilelor, constituientul vitric este cel mai bogat în oxigen și în același timp alcătuiește, în majoritatea cazurilor, componentul predominant, urmează că se poate considera că $CO_2$ *și* $CO$ din compoziția gazelor, de la piroliza huilelor, se datorește vitritei. Cărbunii din stadiile de incarbonizare naturală, mai avansate, degajînd la pirogenare în raport cu gradul de metamorfozare, din ce în ce mai puțin $CO$ și $CO_2$ pot fi considerate ca reprezentînd în raport cu gradul de in-

carbonizare, o îmbogățire mai acentuată în cristalite rigide, pe măsură ce cristalitele mobile pierd $CO$ și $CO_2$ adică sărăcesc în oxigen. Această sărăcire a fost dovedită experimental de Kirby, Lakey și Sarjant [16]. din lucrările cărora reiese că în cărbunii mai metamorfozați se evidențiază o structură mai condensată din care scade conținutul în catene laterale alifatice ca și acelea de $CO$.

g) Apele pirogenetice rezultate la recocsificarea cocsurilor de petrol sînt ape amoniacale ca și acelea de la cocsificarea huilelor [17].

h) Cercetarea mai adîncă a constituției cocsurilor de petrol și a modului cum se desfășoară formarea lor în procesul de cracaj, este de natură a aduce elemente importante în lămurirea constituției cărbunilor fosili și a schimbărilor structurale ce se produc în diferitele stadii de metamorfozare atît în legătură cu carbonul, hidrogenul și oxigenul constituțional cît și în ceiace privește compușii cu azot.

*Facultatea de Chimie Industrială*
*Institutul Politehnic București*

## BIBLIOGRAFIE

1. *Blum I.* și *Popescu P.* — Studiul cocsurilor de petrol, Monit. Petr. Roum. (1943).
2. *Fischer A.* — Journ. Inst. Fuel (1935); Stroud, W. F., Jr. The Science of Petroleum IV. Oxford University Press (1938).
3. *Blum I.* și *Popescu P.* — Loc. cit.
4. *Lebeau* — Compte — Rendu, 177 (1923); 178 (1924).
5. *Blum I.* — Soc. Roum. Sci. Bull. Ch. pure et appliquée, XXX (1927).
6. Proc. Conf. on the ultrafine structure ol coals und cokes. London (1944); *Mackowsky M. Th.*, Brennstoff-Chemie 30 (1949).
7. Idem.
8. Idem.
9. *Kreulen D. J. W., Fuel* — London 25 (1946).
10. *Pfeiffer I. Ph.* — The Proprieties of Asphaltic Bitumen. Elsevier Publishing Comp. Inc. N.—J., Amsterdam, London, Brussels (1950).
11. Idem.
12. *Kirkby W. A., Lakey* — I. R. A. and Sarjent R. J., Fuel, London XXXIII, (1954).
13. *L. L. Nesterenco* — Trudî pervogo vsesoiuznogo sovesania (1950). Izdatelstvo Akademii Nauk S.S.S.R. Moscva (1953); *Veseloski B. C.*, — Uglerod, almazî, grafitî i ugoli ih metodologia ih isledovania (1936).
14. *Nelson J. B.* — Fuel, London XXXIII (1954).
15. Idem.
16. *Kirkby W. A., Lackey* — I. R. A. and Sarjent R. J., loc. cit.
17. *Blum I.* și *Popescu P.*, — loc. cit.

# ХАРАКТЕРНЫЕ ЗЛЕМЕНТЫ ПРОЦЕССА КОКСИФИКАЦИИ УГЛЯ

## I, Об битуме извлеченном из угля который может быть коксифицирован

(Краткое содержание)

Автор изучает поведение при коксификации (в тех же условиях, что при коксификации каменного угля) нефтяных коксов, полученных в результате крекинга и причины образования плотного и твердого кокса из этих повторно коксифицированных нефтяных коксов. Автор выявляет аналогию пирогенетического поведения по сравнению с каменным углем, который можно подвергнуть коксификации ; он изучает особенности битумных веществ, извлеченных при помощи растворителей из нефтяных коксов с разнообразными процентами летучих веществ.

Автоп выводит заключение, что нефтяные коксы, как и каменный уголь, образованы из поликонцентрированных ароматических ядер.

# ÉLÉMENTS CARACTERISTIQUES DANS LE PROCESUS DE COKÉFACTION DU CHARBON.

## I. SUR LE BITUME DES CHARBONS COKÉFIABLES

(Résumé)

On étudie le comportement à la cokéfaction, — des cokes de pétrole, povenus du cracking ainsi que les causes qui mènent à la formation d'un coke compact et dur des cokes de pétrole recokéfié, dans les mêmes conditions de la la cokéfaction des huilles.

On poursuiut l'analogie du comportement pyrogénétique à celui des houilles cokéfiables et on étudie les particuluarités des substances bitumineuses, contenues dans les cokes de pétrole, ayant des pourcentages variés de matierès volatiles, extraites par des solvents.

En conclusion, on déduit que les cokes de pétrole aussi commes les houilles, sont formés des noyaux aromatiques polycondensés.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

662.66

# DETERMINĂRI GRAVIMETRICE, CA ELEMENT DE CLASIFICARE AL UNOR HUILE ROMÎNEȘTI

de I. BLUM și I. NISTOR

Dezvoltarea continuă a industriei este strîns legată de o folosire rațională și economică a combustibililor adecvați. Siderurgia, baza industrializării țării, trebuie asigurată cu un cocs metalurgic de calitate, pentru buna funcționare a furnalelor înalte și ameliorarea indicilor economici.

Chimiei cărbunelui îi revine rolul de a rezolva această problemă și progresele realizate pînă acum pe plan științific nu merg paralel cu cele realizate pe plan tehnologic, unde s-au obținut unele rezultate remarcabile.

Această rămînere în urmă pe plan științific, se datorește în mare parte metodelor de cercetare utilizate [1]. Cercetarea chimică a cărbunelui întîmpină două aspecte negative: descompunerea cărbunelui este ireversibilă, iar substanțele obținute sînt prea complexe pentru a putea fi studiate ca atare [2].

Cărbunele nu este o substanță omogenă, ci este un complex alcătuit din componenți cu proprietăți fizico-chimice mult diferite.

Studiul cărbunilor și în special cel al huilelor, considerate ca un tot, a dat mult material științific, totuși nu suficient pentru complecta lămurire a comportării cărbunilor în diversele procese tehnologice. Pentru cercetări mai profunde, care să pătrundă dincolo de suprafața fenomenelor, în esența lor, este necesară abordarea studiului părților componente ale cărbunilor.

Separarea clasică a componenților petrografici în vitrită, clarită, durită și fuzită a fost simplificată, masa organică a huilelor fiind separată de către cercetătorii sovietici în 3 componenți principali: masa vitritică, fuzita și corpurile figurate [1].

Fiecare din acești componenți cuprinde o serie de microingrediente caracteristice.

Alți cercetători, au reunit constituienții elementari ai cărbunilor, maceralele, în 3 grupe principale: grupa exinitei (micro- și megaspori, cuticule și rezinite), grupa vitrinitei (colinita și telinita) și grupa inertitei (semifuzinita, fuzinita, sclerotinita și micrinita).

Această grupare ternară este bazată pe analogii microscopice și permite simplificarea studiului compoziției cărbunilor și așa destul de complex [3].

Gruparea ternară, se bazează pe faptul că durita şi clarita nu sînt omogene, în consecinţă, ele pot fi considerate drept amestecuri ale componenţilor principali. Se crede că fiecare din aceşti componenţi principali, ar avea o linie proprie de formare în procesul de geneză al cărbunilor [4].

Substanţa fundamentală a huilelor este vitrita, care are un rol esenţial în determinarea caracteristicilor de cocsificare. Corpurile figurate (spori, etc.) sînt părţile mai rezistente ale plantelor, a căror metamorfozare a evoluat mai puţin în timpul procesului de formare al cărbunelui. Fuzita, a suferit probail în stadiul iniţial al formării cărbunelui o incarbonizare puternică, urmată ulterior de mai puţine modificări.

Astfel, componenţii petrografici se comportă diferit în timpul procesului de metamorfozare, în funcţie de structura chimică a materialului genetic şi de condiţiile fizico-chimice din stadiul primar al formării cărbunelui [4].

Faptul că proprietăţile tehnologice sînt condiţionate şi de componenţii petrografici, face ca o clasificare industrială a cărbunilor, să fie în deplină concordanţă cu clasificarea genetică [5].

Componenţa petrografică şi gradul de incarbonizare, sînt două variabile dependente, care pot defini şi caracteriza cărbunele. Conţinutul de substanţe anorganice, ar constitui un al treilea factor, independent, care determină calitatea cărbunelui [6].

*
* *

Separări petrografice, s-au încercat şi realizat cu ajutorul pensetei, sub microscop, prin măcinare selectivă şi în ultima vreme prin separarea în lichide grele.

Metoda fracţionării gravimetrice ca mijloc de separare al unor grupe de componenţi din cărbuni, se bazează pe existenţa corelaţiilor între proprietăţile fizice, petrografice şi fără îndoială geneza huilelor [7].

Metoda constă în fracţionarea cărbunilor, măcinaţi sub granulaţia cibile cu masa cărbunelui. Fracţiunile obţinute sînt apoi caracterizate de 250 μ în lichide organice cu greutăţi specifice diferite şi uşor misprin metodele curente de analiză. Această metodă diferă de o spălare obişnuită a cărbunelui întrucît realizează o fracţionare mult mai fină, putîndu-se separa de exemplu diferite fracţiuni de vitrită, care cu ajutorul microscopului petrografic nu se pot diferenţia.

Pe măsură ce creşte gradul de evoluţie, adică gradul de maturizare al cărbunelui, aceasta se va reflecta în distribuţia materialului obţinut prin fracţionare în lichide organice, atît dealungul fracţiunilor cît şi în constituţia lor.

Determinările gravimetrice sînt dependente de granulaţia cărbunilor, compoziţia petrografică, felul şi diseminarea substanţelor minerale, reflectînd stadiul de metamorfozare ca şi caracterul chimic al mediului genetic. Pentru realizarea fracţionării gravimetrice proba de cărbune uscată la aer, în cantitatea de 300 g. a fost separată în amestecuri de tetraclorură de carbon (d= 1,59) şi benzen (d= 0,87) cu următoarele densităţi: 1,40 — 1,35 — 1,30 — 1,28 — 1,27 — 1,26.

Determinările s-au făcut de la densităţile mari spre cele mici. Fracţiunea care pluteşte este impurificată puternic cu fracţiuni mai grele după o singură separare şi de aceea au fost necesare fracţionări repetate.

Impurificarea fracțiunii ușoare este datorită probabil îndepărtării treptate a aerului sau a solventului cu greutate specifică mai mică — benzenul — din porii cărbunelui, de către solventul mai greu — tetraclorura de carbon.

Fracțiunea depusă, este dimpotrivă mult mai curată fiind însoțită numai de mici cantități de fracțiuni mai ușoare, provenite probabil prin antrenare mecanică. [8]. Această fracțiune se usucă în etuvă la 70°C.

In timpul separării desigur că are loc și o solubilizare a componenților solubili din cărbuni (ceruri, rășini) însă numai pînă la 0,1% ceea ce nu influențează comportarea ulterioară a fracțiunilor separate.

Considerînd că la granulația indicată separarea gravimetrică cu lichide organice nu reprezintă doar o fracționare imprimată de substanța anorganică conținută în cărbune, ci o fracționare dependentă în special de structura deosebită a masei organice, scoasă astfel în evidență de greutatea specifică respectivă, am folosit aceatsă metodă pentru a studia cărbunii de la minele Petrila, Uricani, Lupeni, Secul și Doman.

Pentru caracterizarea fracțiunilor obținute s-au determinat materiile volatile exprimate de masa combustibilă și indicii de umflare (după metoda germană).

Tabelul 1

**Separarea gravimetrică a cărbunelui din mina Petrila**

| Greutatea specifică | Rand. fracțiunii % | $U_h$ % | $Cen_a$ % | $MV_{mc}$ % | Indice de umflare |
|---|---|---|---|---|---|
| >1,4 | 5,40 | 2,25 | 29,00 | 47,07 | 1 |
| 1,40—1,35 | 2,60 | 2,93 | 8,62 | 45,76 | 1 |
| 1,35—1,30 | 56,30 | 3,05 | 1,90 | 42,28 | 1 |
| 1,30—1,28 | 29,95 | 2,90 | 1,67 | 44,96 | 1 |
| <1,28— | 5,75 | 2,30 | 1,22 | 49,64 | 1 |
| Cărb. Petrila | — | 4,34 | 3,28 | 43,43 | 1 |

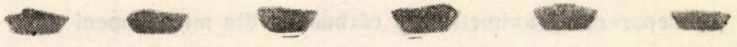



Fig. 1.

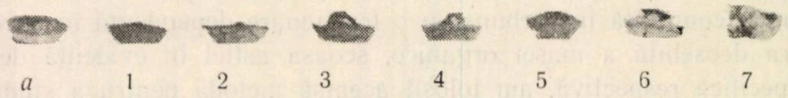
Indicii de umflare din fracțiunile separate din cărbunii de Petrila.
*a* = cărb. inițial ; 1 = fracț. > 1,4 ; 2 = fracț. 1,40—1,35 ; 3 = fracț. 1,35—1,30 ; 4 = fracț. 1,30—1,28 ; 5 = fracț. < 1,28.

Din tabelul 1 se observă că materiile volatile care la cărbunele inițial sînt de ordinul a 43,43%, variază în clasele separate de la 42,28% la 49,64%. Indicii de umflare — foarte asemănători.

Tabelul 2

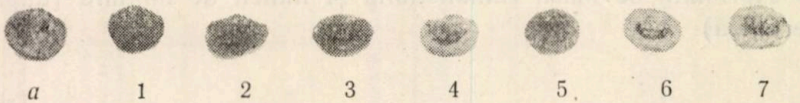
**Separarea gravimetrică a cărbunelui din mina Uricani**

| Greutatea specifică | Rand. fracţiunii % | Uh % | Cena % | MVmc % | Indice de umflare |
|---|---|---|---|---|---|
| >1,4 | 11,10 | 1,16 | 30,52 | 47,95 | 1 |
| 1,40—1,35 | 8,0 | 2,15 | 10,23 | 45,01 | 1½ |
| 1,35—1,30 | 14,40 | 1,90 | 5,87 | 42,75 | 2 |
| 1,30—1,28 | 25,60 | 1,04 | 2,98 | 42,89 | 2 |
| 1,28—1,27 | 19,70 | 1,30 | 1,63 | 43,07 | 2 |
| 1,27—1,26 | 14,10 | 1,35 | 1,55 | 44,71 | 2 |
| <1,26 | 7,10 | 0,72 | 1,41 | 47,72 | 2 |
| Cărb. Uricani | — | 1,97 | 6,05 | 42,71 | 1½ |



*a* 1 2 3 4 5 6 7

Fig. 2.



*a* 1 2 3 4 5 6 7

Fig. 3.

Indicii de umflare din fracţiunile separate din huila de gaz Uricani.

*a* = cărb. iniţial ; 1 = fracţ. > 1,4 ; 2 = fracţ. 1,40—1,35 ; 3 = fracţ. 1,35—1,35 ; 4 = fracţ. 1,30—1,23 ; 5 = 1,28—1,27 ; 6 = fracţ. 1,27—1,26 ; 7 = fracţ. < 1,26.

Materiile volatile la cărbunele iniţial 42,71%, variază în clasele separate de la 42,75% la 47,27%. Indicii de umflare au mici variaţii de la 1 — 2, faţă de 1½ cît a avut cărbunele iniţial. Se observă la clasele densimetrice mai mari o separare mai pronunţată a cărbunelui.

Tabelul 3

**Separarea gravimetrică a cărbunelui din mina Lupeni**

| Greutatea specifică | Rand. fracţiunii % | Uh % | Cena % | MVmc % | Indice de umflare |
|---|---|---|---|---|---|
| >1,4 | 10,60 | 0,76 | 33,95 | 49,62 | 1½ |
| 1,40—1,35 | 2,90 | 1,20 | 13,34 | 43,47 | 2 |
| 1,35—1,30 | 9,10 | 1,57 | 6,76 | 47,84 | 2 |
| 1,30—1,28 | 9,30 | 1,50 | 3,75 | 48,13 | 2 |
| 1,28—1,27 | 26,30 | 1,70 | 2,37 | 48,55 | 2 |
| 1,27—1,26 | 33,30 | 1,74 | 1,43 | 50,06 | 2½ |
| <1,26 | 8,50 | 1,55 | 1,14 | 51,43 | 3 |
| Cărb. Lupeni | — | 1,50 | 5,81 | 44,54 | 2 |

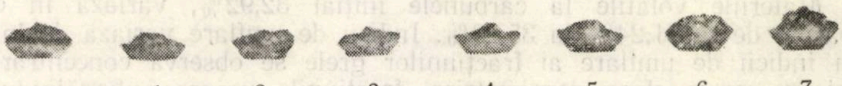



Fig. 4.

Fig. 5.

Indicii de umflare din fracțiunile separate din huila de gaz Lupeni.

$a$ = cărb. inițial ; 1 = fracț. > 1,4 ; 2 = fracț. 1,40—1,35 ; 3 = fracț. 1,35—1,30 ; 4 = fracț. 1,30—1,28 ; 5 = fracț. 1,28—1,27 ; 6 = fracț. 1,27—1,26 ; 7 = fracț. < 1,26.

Materiile volatile la cărbunele inițial reprezintă 44,54%, iar în clasele separate variază de la 43,47% la 51,43%. Indicii de umflare variază între $1\frac{1}{2}$ — 3, față de 2, cît este indicele de umflare al cărbunelui inițial.

Se remarcă din culoarea butonilor de cocs, conținutul redus de fuzită.

Tabelul 4

**Separarea gravimetrică a cărbunelui din mina Secul**

| Greutatea specifică | Rand. fracțiunii % | Uh % | Cena % | $MV_{mc}$ % | Indice de umflare |
|---|---|---|---|---|---|
| >1,4 | 16,40 | 0,35 | 43.40 | 63,06 | 2 |
| 1,40—1,35 | 2,60 | 0,93 | 13,05 | 31,24 | $2\frac{1}{2}$ |
| 1,35—1,30 | 11,80 | 0,71 | 6,82 | 31,45 | 3 |
| 1,30—1,28 | 28,20 | 1,13 | 2,36 | 32,02 | $3\frac{1}{2}$ |
| 1,28—1,27 | 37,30 | 0,60 | 1,40 | 32,85 | $4\frac{1}{2}$ |
| <1,27 | 3,70 | 0,71 | 1,21 | 35,23 | 5 |
| Cărb. Secul. | — | 0,66 | 9,31 | 32,92 | $4\frac{1}{2}$ |

Fig. 6.

Fig. 7.

Indicii de umflare din fracțiunile separate din huila grasă Secul.

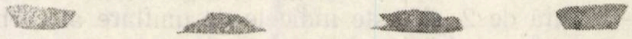
$a$ = cărb. inițial ; 1 = fracț. > 1,4 ; 2 = fracț. 1,40—1,35 ; 3 = fracț. 1,35—1,30 ; 4 = 1,30—1,28 ; 5 = fracț. 128—1,27 ; 6, = fracț. < 1,27.

Materiile volatile la cărbunele inițial 32,92%, variază în clasele separate de la 31,24% la 35,23%. Indicii de umflare variază de la 2—5. Din indicii de umflare ai fracțiunilor grele se observă concentrarea fuzitei în aceste clase densimetrice, fracțiunile ușoare îmbogățindu-se în spori, cuticule, etc.

Tabelul 5

**Separarea gravimetrică a cărbunelui din mina Doman**

| Greutatea specifică | Rand. fracțiunii % | $U_h$ % | $Cen_a$ % | $MV_{mc}$ % | Indice de umflare |
|---|---|---|---|---|---|
| >1,4 | 3,25 | 0,44 | 29,36 | 22,72 | 1/2 |
| 1,40—1,35 | 13,60 | 0,95 | 2,82 | 15,49 | 1/2 |
| 1,35—1,30 | 82,50 | 1,14 | 0,81 | 16,46 | 1 |
| <1,3 | 0,65 | — | — | — | — |
| Cărb. Doman | — | 0,82 | 1,91 | 15,35 | 1 |

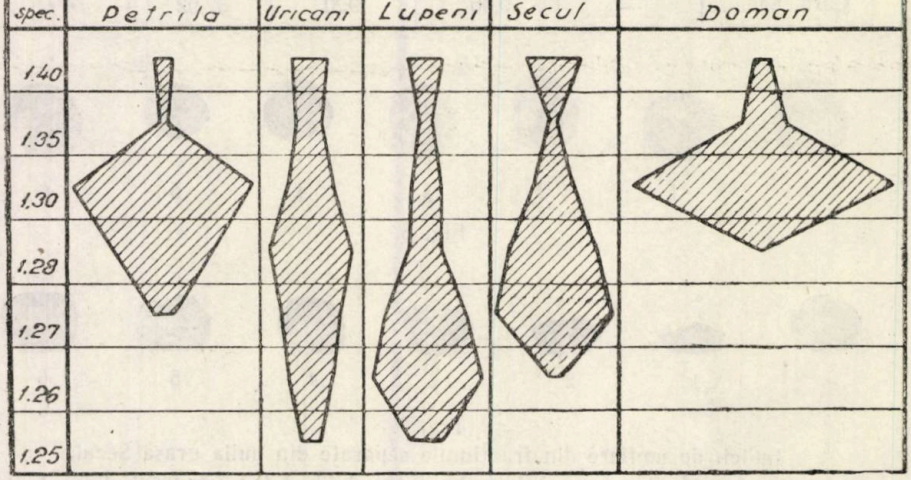


*a* 1 2 3

Fig. 8.

Indicii de umflare din fracțiunile separate din huila slabă Doman.
*a* = cărb. inițial; 1 = fracț. > 1,4; 2 = fracț. 1,40—1,35; 3 = fracț. 1,35—1,30.

Materiile volatile la cărbunele inițial 15,35%, variază în clasele separate de la 15,49 — 16,46%. Reprezentînd grafic rezultatele separării gravimetrice a huilelor, se observă că fiecare dintre ele, se caracterizează printr-o lungime a gamei de separare, care este mică la cărbunii de la Petrila, maximă la hiulele de gaz (Lupeni) și descrește apoi ajungînd minimă la huilele slabe (Doman).




Graficul separării gravimetrice a huilelor

De asemenea fiecare huilă, are un maxim de depunere, care la huilele tinere este la densitatea 1,3, la cele de gaz la densitatea 1,26—1,25 și în cazul huilelor slabe, la densitatea 1,30, însă cu o lungime a gamei se separare mult mai redusă [7].

Depunerea unor fracțiuni mai mari din cărbunele Petrila la densități mai ridicate, este cauzată probabil de porozitatea submicroscopică a acestora, în care pătrunde amestecul de lichide organice mărind greutatea specifică a cărbunelui.

La densitățile mici se separă fracțunile bogate în spori, cuticule, corpi rășinoși etc.

Fracțiunile grele conțin fuzita și substanțe minerale în cantități mari, formînd un concentrat fuzitic.

Vitrita se dispune în fracțiunile medii, fiind în cantitate mare între greutățile specifice 1,30—1,26 [7, 8].

## CONCLUZII

Studiul petrografiei cărbunelui s-a dezvoltat în două direcții. Geologii, au descris stratul de cărbuni și incluziunile din el (spori cuticule, rășini, ceruri, subst. minerale), stabilind o serie de microstructuri; au făcut de asemenea interesante studii paleobotanice.

O a doua direcție a fost cea a studiului proprietăților chimico-tehnice și tehnologice ale constituienților petrografici sau mai precis acelea ale concentratelor petrografice [9].

S-au tras astfel o serie de concluzii printre care și aceea că prezența fuzitului micșorează aptitudinea de cocsificare a huilelor.

Meoda gravimetrică de fracționare a huilelor, permite obținerea unor fracțiuni de cărbuni cu procente mici de substanță anorganică, ceea ce este important întrucît compoziția părții minerale și diseminarea ei în cărbune, duce la diverse deformări în determinarea proprietăților masei organice.

Meoda gravimetrică mai permite obținerea concentratelor petrografice precum și separarea vitritului în diverse clase.

Metoda este utilă atît pentru dezvoltarea cercetărilor științifice în vederea elucidării problemelor teoretice de structură, cît și în scopuri practice, de pildă ca un parametru al clasificării cărbunilor. Separarea gravimetrică este un ghid mai sensibil în cercetarea gradului de incarbonizare, decît analizele chimice [8].

O dovadă grăitoare în sprijinul acestei afirmații o constituie huilele de Uricani și Lupeni, care prin metodele clasice de analiză chimico-tehnică nu se pot deosebi, totuși nu se poate explica cauza diferențierii lor evidente, în procesul de cosificare.

Separînd gravimetric aceste huile, se produce o depunere mai mare la densități ridicate a cărbunelui de la Uricani, avînd maximum de depunere la $d = 1{,}28$, în timp ce cărbunele de Lupeni prezintă acest maximum la $d = 1{,}26$.

Aceasta ar indica că huila de gaz de la Lupeni ar fi mai metamorfozată decît cea de la Uricani.

Cărbunele de la Petrila, prezintă un grafic de separare gravimetrică asemănător huilelor cu flacără lungă și caracteristicile sale gravimetrice coroborate cu cele chimico-tehnice și tehnologice, îl situează la limita de separare între huilele cu flacără lungă și cărbunii bruni.

Astfel apare că sporii, cuticulele și rășinile suferă de la o anumită etapă de incarbonizare (de exemplu, din stadiul de huilă de gaz) o transformare, trecînd din substanțe cu densități joase, în altele cu densități mai ridicate. Modificarea densității lor este mult mai profundă decît a vitritei și de aceea trec în operațiile de separare, în fracțiunile mai grele ale cărbunilor. *Diferența între greutățile specifice ale fracțiunilor separate gravimetric prin metoda indicată, se datorește așa dar unei constituții a masei organice,* exceptînd poate cazul fracțiunilor grele la care apare și contribuția substanțelor minerale.

Huila de Secul care este o huilă grasă, se situează foarte aproape de o huilă de cocs, iar cea de la Doman se comportă ca o huilă slabă.

Indicii de umi.are dupa cum rezultă și din fotografiile anexate, la cărbunii de la Petrila și Doman, sînt fără deosebiri pregnante, iar la cărbunii Secul, Uricani și Lupeni arată o creștere progresivă de la fracțiunea grea către cea ușoară.

Cu ajutorul acestei metode de cercetare se pot acumula încă multe date noi despre structura și comportarea huilelor, care să înrîurească în mod deosebit asupra dezvoltării tehnicei de prelucrarea cărbunilor ; unele roade încep să se arate, în prepararea petrografică industrială a huilelor, fie prin măcinarea selectivă, fie prin spălarea mărunților în lichide dense, urmate de separarea centrifugală. Ele sînt de natură a aduce contribuții la ameliorarea metodelor industriale de cocsificare.

## BIBLIOGRAFIE

1. *L. L. Nesterenko* — Himia i genezis tverdîh goriucih iscopaemih, Moscova, 1953.
2. *A. Whitaker* — Journal of the Institute of Fuel, 5, 1955.
3. *B. Alpern* — Industrie Chimique Belge — XXVII-è Congrès de Chimie Industrielle — Bruxelles, Sept. 1954.
4. *L. M. Sapojnicov* și *V. I. Kasatocikin* — Vestnik Academii Nauk S.S.S.R., 2. 1954.
5. *N. G. Titov* — Himia i genezis tverdîh goriucih iscopaemîh, Moscova, 1953.
6. *I. A. Jemciujnicov* — idem.
7. *I. I. Ammosov* — Idem.
8. *L. Horton* — Fuel, 3, 1952.
9. *L. M. Mayer* — Himia i genezis tverdîh goriucih iscopaemîh, Moscova, 1953.

## ГРАВИМЕТРИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, КАК ЭЛЕМЕНТ КЛАССИФИКАЦИИ НЕКОТОРЫХ СОРТОВ РУМЫНСКОГО КАМЕННОГО УГЛЯ

(Краткое содержание)

Автор изучает гравиметрическое отделение некоторых сортов румынского каменного угля; полученные плотнометрические классы обязаны структуре различного состава органической массы и лишь частично неорганической части.

Таким образом можно получить некоторое количество петрографических концентраций.

В тоже время с помощью этого метода можно различать породы угля с сходными химическими анализами и объяснить их различное поведение в технологическом процессе.

## DETERMINATIONS GRAVIMETRIQUES COMME ELEMENT DE CLASSIFICATION DES HOUILLES ROUMAINES.

(Résumé)

On examine la séparation gravimétrique de quelques houilles roumaines; les classes densimétriques obtenues sont dues à une constitution différente de la masse organique et seulement partiel au stéril.

Ainsi peut on obtenir une série des concentrates pétrographfiques.

Toutefois, à l'aide de cette méthode on peut différencier les charbons avec une analys chimique semblable et expliquer leur comportement différent dans les processus technologiques.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

## CHIMIE TEHNOLOGICĂ

# ACŢIUNEA DE MINERALIZATOR ŞI FONDANT A FLUORAPATITEI LA CIMENTUL PORTLAND

de P. VOICHESCU şi A. DINESCU

In industria cimentului portland se obişnuieşte să se folosească nişte adausuri la materiile prime, care au ca scop să uşureze arderea, mai ales atunci cînd se urmăreşte să se obţină clinchere cu grad de saturare urcat, cît şi atunci cînd materiile prime conţin un procent ridicat de alcalii. Aceste adausuri se numesc mineralizatori.

Acţiunea mineralizatorilor este cunoscută mai bine de 50 ani. Ea a fost studiată de mai mulţi cercetători şi rezultatele la care s-a ajuns pot fi rezumate astfel:

1) Mineralizatorul acţionează prin distrugerea radicală a reţelelor cristaline ale unora din componenţii care reacţionează, încît atomii şi grupele de atomi captată o mai mare mobilitate, necesară pentru schimbare de poziţie. Din punct de vedere cinetic, atomii şi moleculele oscilează în jurul punctelor reţelelor lor spaţiale cu o intensitate mai mare, dînd posibilitatea ca un număr important din aceste corpuscule să-şi schimbe locul cu atomii şi moleculele unei alte substanţe, care se găseşte în vecinătate şi care este capabilă să reacţioneze. Se creează astfel condiţii favorabile ca reacţiile în stare solidă să fie mult uşurate.

2) Mineralizatorul coboară temperatura de formare a fazei lichide, determinînd apariţia acesteia mai devreme de limita obişnuită şi totodată determină şi sfîrşitul ei mai tîrziu. Practic are loc o lungire a zonei de vitrefiere, lăsînd ca oxizii componenţi ai materiilor prime să aibă la dispoziţie mai mult timp pentru legare.

3) Prin adaus de mineralizator la amestecul brut faza lichidă devine mai puţin vîscoasă, fapt care determină o mobilitate mai mare a componenţilor oxizi şi ca urmare are loc legarea mai uşoară a calcei într-un clincher cu grad de saturare ridicat, astfel că formarea alitului este mult favorizată.

Ca mineralizatori mai întrebuinţaţi în clincherizarea cimentului portland pot fi numiţi, fluorura de calciu, fluorosilicaţii de calciu şi magneziu, oxidul feric, oxidul de magneziu, sulfatul de calciu, clorura de calciu, fosfaţii de calciu şi cei alcalini, bioxidul de titan etc.

In lucrarea noastră, am studiat comportarea ca mineralizator a fluorapatitei naturale, de povenienţă din peninsula Kola (U.R.S.S.), care conţine mineralul curat $3Ca_3(PO_4)_2 . CaF_2$ în proporţie de 91,48%, aşa cum reese din compoziţia sa chimică. Fluorapatita se importă şi de ţara noastră, fiind materia primă pentru fabricarea îngrăşămintelor fosfatice.

Fluorapatita pură se găseşte foarte rar. Ea cristalizează în sistemul hexagonal, clasa piramidală. (Fig. 1). Alături de fluor, mai poate conţine cantităţi mici de $Cl^-$, $OH^-$ şi $CO_3^{2-}$. Sub formă de amestecuri isomorfe conţine oxizi alcalini, poate conţine pămînturi rare (mai ales $Ce_2O_3$, apoi *MgO şi în cantităţi mici* $Fe_2O_3$ şi $Al_2O_3$.

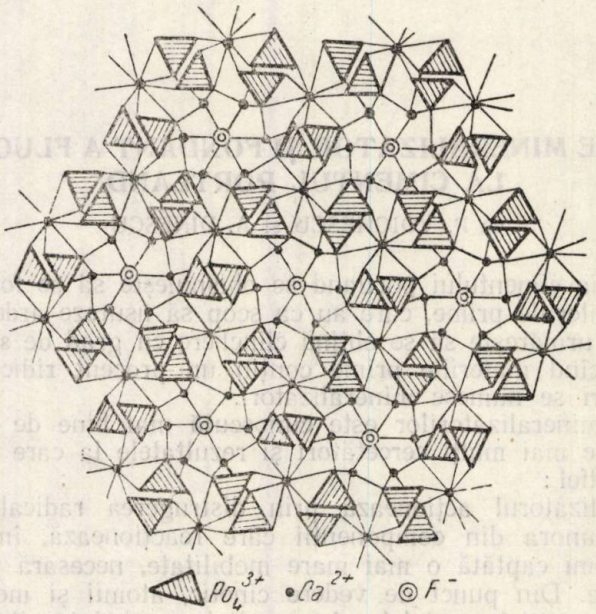



Fig. 1. — Aspectul general al reţelei cristaline e fluorapatidei în proiecţia pe planul [001].

Fluorapatita poate fi obţinută artificial prin cristalizarea topiturii de $CaF_2$ şi $Ca_3(PO_4)_2$, după cum arată diagrama studiată de R. Nacken [1]. (Fig. 2).

Punctul *g* corespunde la raportul molar $CaF_2 : 3Ca_3(PO_4)_2$ adică 78,1 : 931,65, iar eutecticul $E_1$ cu punctul de fuziune 1205°, corespunde la proporţia de 64% $CaF_2$ : 36% $Ca_3(PO_4)_2$.

Fluorura de calciu naturală (fluorina) a fost pînă mai acum cîtva timp singurul mineral care şi-a găsit aplicare destul de mare în fabricarea cimentului portland. Ea reprezintă deşeul rezultat la exploatarea rocelor filoniene de fluorină.

Aşa după cum arată Juravlev şi colaboratoii [2] utilizarea fluorinei se bazează pe proprietatea ce o au, în general, fluorurile de a disocia hidrolitic atunci cînd ele sînt încălzite într-un curent de aer ce conţine vapori de apă. Prin această hidroliză ia naştere acid fluorhidric, care atacă o parte din silice dînd naştere tetrafluorurii de siliciu, conform reacţiunilor :

$$CaF_2 + 2H_2O = Ca(OH)_2 + 2HF$$

$$SiO_2 + 4HF = SiF_4 + 2H_2O$$

și prin asta se distruge rețeaua cristalină a silicei. Reacțiuni de acest fel sînt posibile mai ales în zonele mai reci ale cuptorului, în zona de uscare și preîncălzire, unde pot exista în permanență cantități mai mari de vapori de apă, fie din materii prime, fie din arderea combustibilului.

Se cunoaște, de asemenea, rolul de mineralizator și fondant al fluorurii de calciu față de silicați. Sistemul binar $CaF_2$ — $2CaO \cdot SiO_2$ și sistemul ternar $CaF_2$ — $CaO$ — $2CaO \cdot SiO_2$ pun în evidență această acțiune

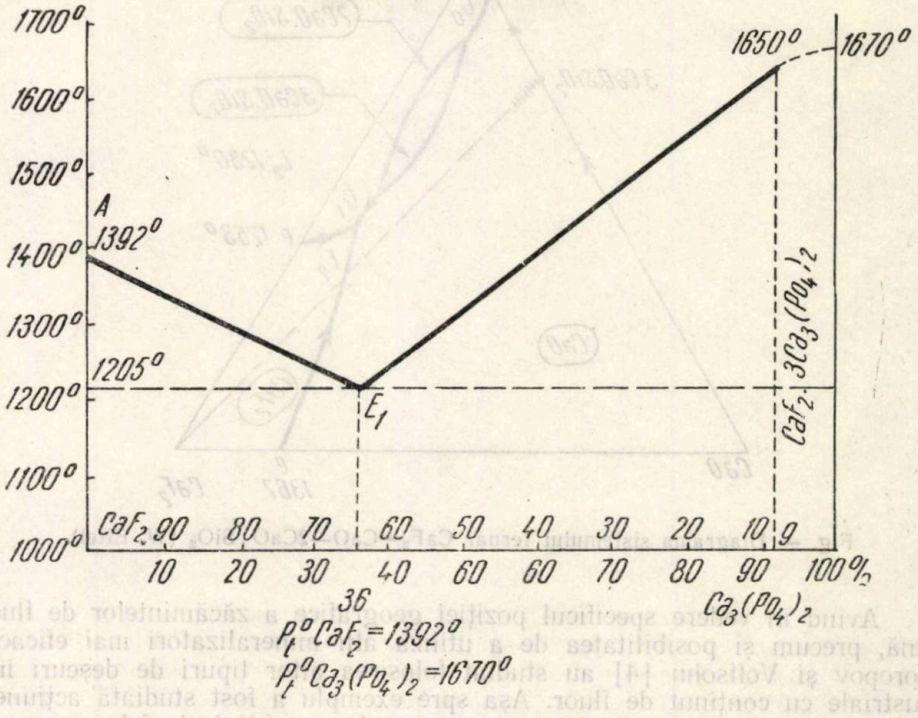



Fig. 2. — Diagrama binară de formare a fluorapatitei din solidificarea unei topituri de $CaF_2$ și $Ca_3(PO4)_2$ (R. Nacken).

Interes pentru chimia cimentului portland prezintă sistemul ternar, unde fluorura de calciu este folosită ca mineralizator. După cum se vede în diagrama studiată de Eitel [3] apare acolo un compartiment îngust de cristalizare primară a $3CaO \cdot SiO_2$. (Fig. 3).

Acest compus poate să ia naștere din topitură eutectică $E_2$ la 1230° în sistemul $CaF_2$ — $CaO$ — $2CaO \cdot SiO_2$ spre deosebire de sistemul $CaO$—$Al_2O_2$—$SiO_2$, unde acest compus incongruent ia naștere (prin cristalizare primară din topiturile peritecticelor $g_1$ și $g_2$) la temperaturi mai ridicate și anume la 1455° respectiv 1470°C. Iată cum se pune în evidență rolul de mineralizator și fondant al fluorurii de calciu la formarea alitului, componentul mineral de seamă al cimentului portland.

Afară de cele arătate, adausul de fluoruri se indică și atunci cînd amestecul de materii prime conține un procent prea ridicat de alcalii

(argile cu feldspat, mică). Acidul fluorhidric rezultat prin hidroliza fluorurilor, la cald în atmosferă umedă, distruge uşor compusul $K_2O$ ..$23CaO$ . $12SiO_2$, care împiedică formarea clincherului alitic de calitate superioară, cît şi compusul $Na_2O$ . $8CaO$ . $3Al_2O_3$, în care sodiul a intrat în structura $3CaO$ . $Al_2O_3$.

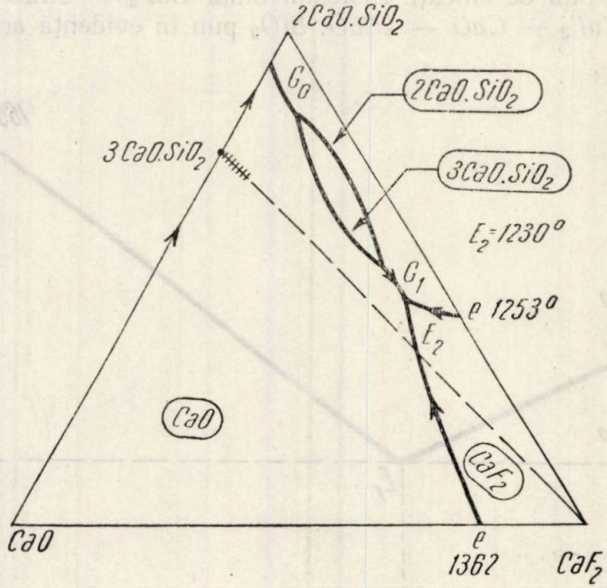



Fig. — Diagrama sistemului ternar $CaF_2$—CaO—$2CaO . SiO_2$ (W. Eitel).

Avînd în vedere specificul poziţiei geografice a zăcămintelor de fluorină, precum şi posibilitatea de a utiliza alţi mineralizatori mai eficace, Toropov şi Volfsohn [4] au studiat folosirea altor tipuri de deşeuri industriale cu conţinut de fluor. Aşa spre exemplu a fost studiată acţiunea de mineralizare la o serie de produse secundare rezultate la fabricarea superfosfaţilor, ca fluorosilicaţii de sodiu, de calciu şi de magneziu. In urma cercetărilor făcute, autorii ajung la următoarele concluzii:

a) Prin introducerea în calitate de mineralizator a fluorurilor şi fluorosicaţilor se permite coborîrea temperaturii de ardere a clincherului de ciment portland şi adausul nu contribuie la micşorarea rezistenţelor mecanice ale cimenturilor.

b) Fluorosilicaţii introduşi în amestecul de materii prime în cantităţi echivalente cu fluorurile, exercită o influenţă mult mai eficace decît fluorurile cu aceeaşi cationi, ei fiind mai bogaţi în fluor.

Fluorurile nu acţionează, însă, ca stabilizator pentru $2CaO.SiO_2$ în sensul să lărgească zona de stabilitate al acestuia.

Adaosul de fluoruri este limitat la aproximativ 0,24—0,5% fluor, căci un adaos mai mare are desavantajul să distrugă căptuşeala refractară a cuptorului.

Fosfaţii sînt întrebuinţaţi, de asemenea, ca mineralizatori şi fondanţi în ceramică. Rolul de mineralizator al $P_2O_5$ faţă de silicaţi este deosebit de important.

Pe de o parte el contribuie la coborîrea temperaturii de fuziune a fazei lichide şi face ca faza de cristalizare primară, alcătuită din silicaţi, să se depună în condiţii de echilibru termic normal la temperaturi mai coborîte şi mult mai activ.

Pe de altă parte dă loc la fenomene de izomorfie cu silicaţii, cu urmări importante în ceeace priveşte reactivitatea reţelelor, transformărilor lor, sau stabilitatea acestora.

Un exemplu deosebit de interesant îl prezintă diagrama sistemului binar $2CaO.SiO_2$—$3CaO.P_2O_5$. studiată de Bredig [5] şi Tromel (Fig. 4).

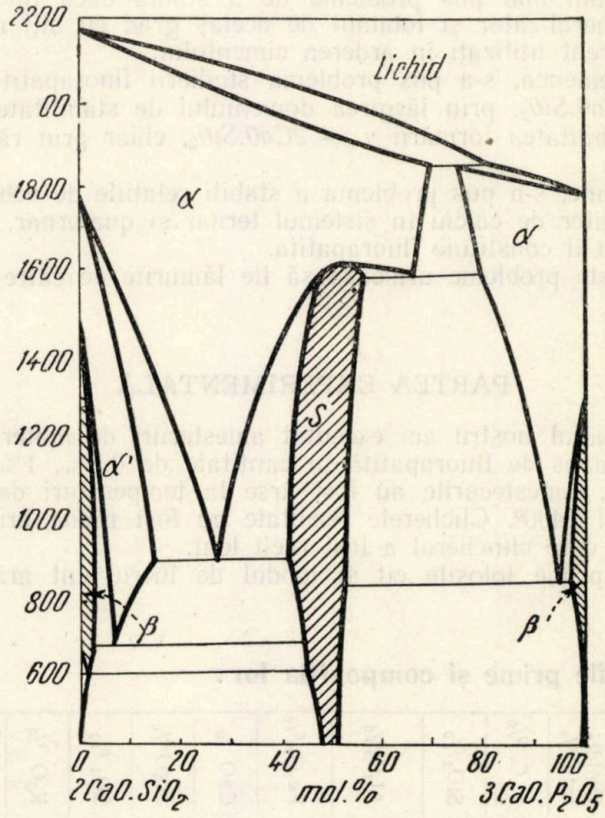



Fig. 4.—Diagrama sis emului binar $2CaO . SiO_2$—$3CaO . P_2OS$. (Bredig şi Tromel).

Pe diagramă se pot urmări repercursiunile pe cari le implică prezenţa izomorfă a $3CaO.P_2O_5$ în reţeaua $2CaO.SiO_2$, în ceeace priveşte transformările polimorfe ale acestei reţele şi acţiunea de stabilizator asupra silicatului. Punctele de transformare al formelor α 1730° α'1436° β 675° γ ale $2CaO.SiO_2$ sînt coborîte cu aprox. 800°. Acest lucru poate avea urmări favorabile în chimia cimentului, în ceea ce priveşte domeniul de stabilitate pentru formele α şi β ale $2CaO.SiO_2$ şi asupra răcirii încete a clincherului.

Din cele cunoscute se ştie că fosfatul tricalcic are acţiune de mineralizator mai scăzută decît fluorurile. El acţionează mai mult ca fondant şi mai ales ca stabilizator pentru $2CaO.SiO_2$.

Cunoscind caracterul de mineralizator şi fondant al $CaF_2$ cît şi al $Ca_4(PO_3)_2$, s-au pus mai multe probleme cari urmau să fie lămurite:

a) Am pus problema de astudia acţiunea de mineralizator a unei substanţe care adăogate la amestecul de materii prime obişnuite să acţioneze concomitent atît după specificiul florurei de calciu, cît şi după specificul fosfatului tricalcic. Acesta a fost unul din motive care a determinat folosirea ca mineralizator şi fondant al fluorapatitei.

b) Apoi, am mai pus problema de a studia dacă fluorapatita are acţiune de mineralizator şi fondant de acelaş grad cu alţi mineralizatori şi fondanţi curent utilizaţi în arderea cimentului.

c) De asemenea, s-a pus problema studierii fluorapatitei ca stabilizator al $\beta$-$2CaO.SiO_2$, prin lărgirea domeniului de stabilitate al acestuia, eliminînd posibilitatea formării $\gamma$ — $2CaO.SiO_2$, chiar prin răcirea înceată a clincherului.

d) Şi în fine, s-a pus problema a stabili relaţiile de echilibru asupra formării silicaţilor de calciu în sistemul ternar şi quaternar, în care unul din componenţi îl constituie fluorapatita.

Toate aceste probleme urmează să fie lămurite de către partea practică a lucrării.

## PARTEA EXPERIMENTALĂ

Pentru studiul nostru am executat amestecuri de materii prime fără adaos şi cu adaos de fluorapatită în cantitate de 0,5%, 1%, 1,5%, 2%, 2,5% şi 3,5%. Amestecurile au fost arse la temperaturi de aproximativ 1300°, 1350° şi 1400°. Clicherele rezultate au fost răcite brusc, afară de un amestec la care clincherul a fost răcit lent.

Materiile prime folosite cît şi modul de lucru sînt arătate în cele ce urmează:

### 1. Materiile prime şi compoziţia lor:

| Materia primă | Umiditate % | P. C. % | $SiO_2$ % | $Al_2O_3$ % | $Fe_2O_3$ % | CaO % | MgO % | $SO_3$ % | $K_2O$ % | $Na_2O$ % | $P_2O_5$ % | F % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Calcar de Lespezi | — | 43,12 | 2,73 | 0,89 | 1,38 | 50 | 0,14 | 1,58 | — | — | — | — |
| Marnă de Brădeni | — | 21,4 | 41,5 | 10,21 | 2,79 | 22,5 | 0,73 | 0,52 | — | — | — | — |
| Caolin de Aghireş | — | 11,49 | 53,47 | 32,49 | 0,8 | 0,44 | 0,25 | — | 0,49 | 0,19 | — | — |
| Diatomit de Pătîrlagele | — | 7,59 | 84,75 | 4,55 | 1,33 | 0,53 | 1,25 | — | — | — | — | — |
| Fluorapatita de Kola (URSS) | 0,76 | — | 3,17 | $Al_2O_3$ + 1,76 | $Fe_2O_3$ | 50,9 | 1,04 | — | 0,65 | — | 38,86 | 2,94 |

## 2) Dozajul amestecului de materii prime

Pentru stabilirea dozajului de materii prime am ales modularea:

$$K_s = 0{,}95 \qquad M_{Si} = 3 \qquad M_{Al} = 2{,}4$$

După cum se vede modulii corespund unui amestec făinos cu ardere greoaie, aleasă astfel tocmai pentru a pune mai bine în evidență influența mineralizatorului.

Rezolvînd relațiile corespunzătoare modulării impuse s-a obținut următoarea proporție de materii prime pentru amestec:

| | |
|---|---|
| Calcar | 1 parte |
| Marnă | 0,0363 „ |
| Caolin | 0,0702 „ |
| Diatomit | 0,1080 „ |

## 3) Măcinarea și omogenizarea amestecului făinos

Conform dozajului indicat s-a preparat de 7 ori aproxim. 10 kgr. amestec.

| | |
|---|---|
| La amestecul 1 nu s-a adăogat | fluorapatită |
| La amestecul 2 s-a adăogat | 0,5% |
| La amestecul 3 s-a adăogat | 1 % |
| La amestecul 4 s-a adăogat | 1,5% |
| La amestecul 5 s-a adăogat | 2 % |
| La amestecul 6 s-a adăogat | 2,5% |
| La amestecul 7 s-a adăogat | 3,5% |

Amestecurile astfel obținute au fost supuse măcinării și omogenizării, într-o moară cu bile, pînă la o finețe de măcinare de 10% rezidiuu pe sita Nr.0,09 (4900 ochiuri/cm$^2$).

## 4) Brichetarea amestecurilor făinoase

La amestecurile, preparate ca la pt. 3, s-a adăogat apă (30—40%) pentru a forma o pastă de consistență normală, apoi au fost brichetate în formă de mici cărămizi de dimensiune 80×40×18 mm. Cărămizile au fost îngăurite, din loc în loc, pentru ca schimbul de căldură, la uscare și ardere, să se facă în condițiuni cît mai bune și în sfîrșit ele s-au uscat într-o etuvă la 100—105°C. După uscare brichetele corespunzătoare fiecăruia dintre amestecuri au fost împărțite în 3 părți, creindu-se astfel 3 serii de brichete I, II, III cari urmau să fie arse la temperaturile de aprox. 1300°, 1350° și 1400°C.

Afară de amestecurile mai sus arătate, s-a mai preparat un amestec cu 3,5% mineralizator (IV), care a fost măcinat și omogenizat, cît și brichetat și uscat, la fel ca și celelalte amestecuri. Acest amestec urma să fie ars la temperatura de 1350°, iar clincherul rezultat să fie răcit încet, în cuptor, odată cu răcirea cuptorului.

### 5) Arderea amestecurilor şi răcirea clincherelor

a) Seria de brichete I a fost arsă la 1310°; arderea a durat 6 ore, palier la 1310° timp de 45 minute. Răcirea clincherelor s-a făcut brusc prin scoaterea lor la aer. Cele cu mineralizator au culoarea verde deschis şi nu prezintă pulverizare. Clincherele fără mineralizator au culoarea gris deschis slab verzui şi prezintă pulverizare.

b) Seria de brichete IIa fost arsă la 1350°; arderea a durat 6 ore, palier la 1350° timp de 45 minute. Răcirea clinocherelor s-a făcut brusc, prin scoaterea la aer. Cele cu mineralizator au culoarea verde mai pronunţată ca cele arse la 1300° şi nu prezintă pulverizare. Clincherele fără mineralizator au culoarea gris deschis cu un verde mai pronunţat decît cele arse la 1300° şi prezintă o slabă pulverizare.

c) Seria de brichete III s-a ars la 1410°; arderea a durat 7 ore, palier la 1410° timp de 45 minute. Clincherele au fost răcite brusc, prin scoaterea la aer de la temperatura de 1410° la temperatura ambiantă. Cele cu mineralizator au culoarea verde mai pronunţată decît cele arse la 1310° şi 1350° şi nu prezintă pulverizare. Clincherele fără mineralizator au culoarea gris mai închisă şi cu nuanţă verzuie. Unele brichete prezintă pulverizări.

d) Seria de brichete IV s-a ars la 1350°; arderea a durat 6 ore, palier la 1350° timp de 45 minute. Clincherele au fost lăsate să se răcească în cuptor timp de 18 ore. Au aceeaşi culoare ca şi brichetele arse la 1350° şi răcite brusc şi nu prezintă pulverizare.

### 6) Măcinarea clincherelor

Toate clincherele au fost măcinate în moara cu bile, cu un adaos de 3% gips, pînă la fineţea de 10% reziduu pe sita Nr. 0,09. S-a obţinut în acest fel 22 de cimenturi.

### 7) Încercări asupra cimenturilor

Asupra celor 2 sorturi de cimenturi au fost executate încercările:

Apa de consistenţă normală
Timp de priză
Constanţa de volum
Rezistenţa la compresiune şi tracţiune
Calcea liberă

Pentru primele patru încercări s-a respectat instrucţiunile Standardului de Stat Nr. 227—49.

Calcea liberă a fost determinată după metoda W. Lerch şi R. H. Bogue [7] cu ajutorul unei extracţii de alcool şi glicerină şi care metodă se bazează pe solubilitatea calcei într-un amestec de alcool — glicerină cu formarea de glicerat de calciu şi apoi titrarea calciului cu o soluţie de acetat de amoniu.

Rezultatele medii ale încercărilor noastre sînt arătate 'de tabel:

| Nr. ciment | Temp. de ardere în °C | % fluorapatita adăogat la amestec | Finețea de măcinare a cim. în %. Sita 009 | Apa de consistență normală % | Priza în ore | | Constanța de volum pe turte | Rezistențele kg/cm² Compresiune | | Tracțiune | | CaO liberă % | Observații |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Inceput | Sfîrșit | | 7 zile | 28 zile | 7 zile | 28 zile | | |
| 1 | 1310° | 0 | 10 | | | | Inconstant | 16 | 22 | 5 | 5 | | prezintă pulveriz |
| 2 | „ | 0,5 | „ | | | | | 86 | 330 | 16,4 | 21,2 | | |
| 3 | „ | 1,0 | „ | | | | | 231 | 360 | 20,75 | 27 | | |
| 4 | „ | 1,5 | „ | | | | | | | | | | Inconstanță de volum |
| 5 | „ | 2,0 | „ | | | | | 96 | 170 | 17 | 24 | | „ |
| 6 | „ | 2,5 | „ | | | | | 18 | 18 | | | | „ |
| 7 | „ | 3,5 | „ | | | | | — | — | — | — | | „ |
| 8 | 1350° | 0 | „ | 26 | 0,45 | 2,45 | Inconstant | 54 | 82 | 11,30 | 20 | | slabă pulveriz. |
| 9 | „ | 0,5 | „ | 24 | 1 | 2,45 | | 186 | 332 | 13 | 22 | | |
| 10 | „ | 1 | „ | 24 | 1,15 | 2,45 | | 233 | 365 | 18,13 | 25 | | |
| 11 | „ | 1,5 | „ | 25 | 1 | 2,15 | | 323 | 390 | 27,5 | 41,5 | | |
| 12 | „ | 2,0 | „ | 23 | 1,15 | 3,15 | | 124 | 167 | 24,3 | 28 | | |
| 13 | „ | 2,5 | „ | 24 | 1 | 2,45 | | 55 | 67 | 9,6 | 24 | | |
| 14 | răcire bruscă | 3,5 | „ | 25 | 1,45 | 3,30 | | 198 | 292 | 22 | 31 | | |
| 15 | răc. lent | 3,5 | „ | 24 | 1,45 | 3.30 | | 195 | 290 | 20 | 30,5 | | |
| 16 | 1410 | 0 | „ | 25 | 0,45 | 2,30 | | 52 | 77 | 5,6 | 23 | 3,93 | unele bric. prez. pulv. |
| 17 | „ | 0,5 | „ | 24 | 1,15 | 3 | | 193,5 | 360 | 21,5 | 25,4 | 1,25 | |
| 18 | „ | 1,0 | „ | 24 | 1,30 | 3,15 | | 252 | 385 | 22,6 | 25,2 | 1,11 | |
| 19 | „ | 1,5 | „ | 25 | 1 | 2,45 | | 374 | 500 | 27,15 | 32 | 0,58 | |
| 20 | „ | 2,0 | „ | 26 | 1,45 | 3,45 | | 286 | 300 | 31,70 | 34 | 0,76 | |
| 21 | „ | 2,5 | „ | 24 | 1,30 | 3 | | 201 | 226 | 23,10 | 30 | 0,93 | |
| 22 | „ | 3,5 | „ | 24 | 2 | 4 | | 252 | 280 | 27 | 30 | 1,77 | |

*Concluziuni*

Încercările experimentale executate asupra celor 22 sorturi de cimenturi a permis să deducem următoarele concluziuni asupra eficacității ca mineralizator și fondant al fluorapatitei:

1) Amestecul de materii prime pregătit după modularea $K_s = 0,95$; $M_{Si} = 3$; $M_{Al} = 0,24$, fără adaos de mineralizator și ars la 1310°, 1350° și 1410°, nu a clincherizat în condiții bune. Acest lucru l-am constatat prin pulverizarea, în mare parte, a brichetelor. Acelaș lucru îl confirmă și inconstanța de volum și valoarea mare pe care o prezintă calcea liberă.

Amestecul de materii prime cu aceeași modulare însă cu adaos de mineralizator, a clincherizat în condițiuni normale, nu prezintă pulverizare și cimenturile au constanță de volum.

La temperatura de clincherizare de 1410° s-a putut ajunge la un ciment de marcă P. 500. Folosind temperaturi de clincherizare mai ridicate se pot obține, bine înțeles, cimenturi cu rezistențe mai mari.

2. Priza cimenturilor clincherizate cu mineralizator este încadrată în limitele prevăzute de STAS.

3. Rezistențele mecanice indică că, valorile cele mai ridicate corespund mortarelor normale cu cimenturi clincherizate cu adaos de 1,5% fluorapatită. Un adaos mai mic sau mai mare face ca rezistențele să scadă. Dacă un adaos mai mic este insuficient pentru mineralizare, un adaos mai mare face să crească % de calce liberă în cimenturi, așa cum reese din tabel.

4. Avînd în vedere că, clincherele mineralizate nu prezintă pulverizare nici la o răcire lentă, se deduce că fluorapatita acționează și ca stabilizator al formei $\beta$-$2CaO.SiO_2$, prin lărgirea zonei de stabilitate al acesteia pînă aproape de temperatura ambiantă. Prin aceasta se exclude trecerea prin răcire, a formei $\beta$-$2CaO.SiO_2$ în formă $\gamma$-$2CaO.SiO_2$, care nu prezintă proprietăți hidraulice și ca atare se elimină pulverizarea clincherului obținut prin răcire lentă.

5. Rezistențele mecanice ale mortarelor normale cu ciment din clinchere răcite lent fiind aproximativ egale cu ale cimenturilor din clinchere răcite brusc, se deduce că clincherele mineralizate cu fluorapatita pot fi răcite în orice condițiuni, fără ca aceste rezistențe să sufere scăderi.

6. Cantitatea de fluor introdusă în amestec de fluorapatită este foarte mică. Considerînd ca adaos optim de mineralizare 1,5%, atunci cantitatea de fluor corespunde la 0,056%.

Dacă se utilizează $CaF_2$ ca mineralizator, atunci la un adaos de 0,5 — 1% de fluorură se introduce în amestec o cantitate de 0,24—0,48% fluor, adică 4—8 ori mai mare. Această comparație indică, că întrebuințînd fluorapatita ca mineralizator se elimină posibilitatea ca căptușala refractară a cuptorului să sufere atacuri agresive din partea fluorului. respectiv acidului fluorhidric.

7. Datele noastre experimentale ne conduc și la un aspect științific al lucrării. Este interesant a cunoaște relațiile de echilibru într-un sistem quarternar asupra formării silicaților, unde unul din colțuri este ocupat de fluorapatită. Cunoscîndu-se aceste relații se poate lămuri acțiunea de mineralizator, fondant și stabilizator a fluorapatitei.

Din punctul de vedere al echilibrelor termice mecanismul mineralizatorului fluorapatita asupra silicaților de calciu nu a fost încă pre-

cizat. Acțiunea fluorapatitei asupra silicaților de calciu trebuie încadrată în sistemul quaternar $CaO$-$2CaO.SiO_2$—$CaF_2$—$3CaO.P_2O_5$. Acest sistem este parțial studiat numai prin sistemele ternare ce îl compun și anume prin:

— Sistemul ternar $CaO$-$2CaO.SiO_2$-$CaF_2$ studiat de W. Eitel [3] care are eutecticul ternar de temperatură joasă la 1230°.

— Sistemul ternar $CaO$-$2CaO.SiO_2$—$3CaO.P_2O_5$ care avînd o serie izomorfă continuă în cadrul sistemului binar $2CaO.SiO_2$—$3CaO.P_2O_5$ dată de M. Bredig [4], prezintă o curbă eutectică între temperaturile 2065° după W. Eitel (loc. cit.) și 1580° după G. Tromel [6] cum și după E. Hill, G. Faust și D. Reynolds [8].

— Sistemul ternar $2CaO.SiO_3$—$CaF_2$—$3CaO.P_2O_5$ care avînd o serie izomorfă continuă în cadru sistemului binar $2CaO.SiO_2$—$3CaO.P_2O_5$ (M. Bredig loc. cit.), are o curbă eutectică de temperatură joasă între 1250° după W. Eitel (loc. cit.) și 1205° după R. Nacken [1].

— Sistemul ternar $CaO$—$CaF$—$3CaO.P_2O_5$ avînd cele trei eutectice binare la temperaturile 1580° (G. Tromel loc. cit.) 1362° (W. Eitel loc. cit.) și 1205° (R. Nacken loc. cit.). Din aceste eutectice binare se se poate deduce că eutecticul ternar se găsește la o temperatură cu puțin mai joasă de 1205°.

Trecînd acum la examinarea sistemului quaternar, $CaO$-$2CaO.SiO_2$-$CaF_2$—$3CaO.P_2O_5$, am ajuns la concluzia calitativă că *eutecticul quaternar trebuie să aibă punctul de topire la o temperatură și mai mică decît eutecticele ternare din care acesta derivă. În orice caz eutecticul quaternar al sistemului se găsește la o temperatură sub 1205°.*

Acest rezultat calitativ este suficient ca să precizăm în cele ce urmează, rolul de fondant, cît și rolul mineralizant a fluorapatitei asupra reacției silicaților de calciu din clincherul de ciment și anume:

a) *Rolul fondant:* Fluorapatita formează topituri la o temperatură joasă, sub 1205°. Cunoscînd că la clincherul normal, în sistemul $CaO$-$Al_2O_3$—$Fe_2O_3$—$SiO_2$, temperatura de formare a fazei lichide este la 1338°, după cum arată F. Lea și T. Parker [9], fluorapatita scade această temperatură de formare a fazei lichide cu cel puțin 138°. Fluorapatita scade temperatura de formare a fazei lichide cu cel puțin 40° față de adaosul mineralizant al $CaF_2$ (W. Eitel loc. cit.).

b) *Rolul mineralizant:* așa cum s-a arătat, prezența seriei izomorfe continue $2CaO.SiO_2$—$3CaO.P_2O_5$ în sistemul quaternar $CaO$-$2CaO.SiO_2$-$CaF_2$-$3CaO.P_2O_5$ în care se încadrează clincherul de ciment cu adaos de fluorapatită, stă în primul rînd la baza mecanismului mineralizării. În plus se cuplează rolul mineralizant al ionului de $F^-$ așa cum a fost arătat de Juravlev cu ocazia discutării rolului mineralizant al $CaF_2$ asupra clincherului.

În rezumat se poate afirma că utilizînd fluorapatita ca mineralizator și fondant, se pot obține cimenturi de mărci superioare și că este un mineralizator și fondant de calitate superioară, cu dublă acțiune.

## BIBLIOGRAFIE

1. *R. Nacken* — Despre formarea apatitelor. Zentralblatt Miner. (1912), pag. 549.
2. *V. F. Juravlev, S. Volfsohn, M. M. Sicev* și *V. I. Jitomirskaia* — Țement, 3 (1950).
3. *W. Eitel.* — Zement (1938), pag. 469.

4. *N. A. Toropov* şi *S. L. Volfsohn* — Ţement, 4 (1953).
5. *Bredig* — Am. Mineral (1943), pag. 600.
6. *Tromel* — Stahl und Eisen (1943), pag. 21.
7. *W. Lerch* şi *R. H. Bogue* — Ind. Engng. Chem. Analit. Edit. 2 (3), 296 (1930).
8. *E. Hill, G. Faust* şi *D. Reynolds. Am.* — J. Si (1944), pag. 469.
9. *F. Lea* şi *T. Parker* — Trans. Roy. Soc. (1934), pag. 16.

## МИНЕРАЛИЗУЮЩЕЕ И ПОНИЖАЮЩЕЕ ТОЧКИ ПЛАВЛЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЕ ФЛУОРОПАТИТА НА ПОРТЛАНДСКИЙ ЦЕМЕН

(Краткое содержание)

Работа представляет собой исследование минерализующего, стабилизующего и понижающего точку плавленя действия флуоропатита на портландский цемент.

Выводы, полученные на основе экспериментальных даных, указывают следующее :

Смеси сырья, минерализованного флоропатитам, превращаются в клинкер уже при температуре 1410°, дающим цемент марки Р 500.

Наличие непрерывной изомерной серии $2\,CaO\,.\,SiO_2$—$3\,CaO\,.\,P_2O_5$ в цетырехкомпонентной системе $CaO$—$2\,CaOSiO_2$—$Ca\,5_2$—$3\,CaO\,.\,P_2O_5$ к которой относится и цементный клинкер с добавкой флорапатита—является главной основой механизма минерализации. Сюда же нужно отнести и минерализующее действие иона флуора, который получается из $CaF_2$ при высокой температуре и в влажной среде.

Переходя к исследованию четырехкомпонентой системы $CaO$ — $2\,CaOSiO_2$—$CaF_2$—$3\,CaO\,.\,P_2O_5$ устанавливают, что ее евтетическая точка лежит ниже температуры 1205°, откуда вытекает, кто флуоропатит образует сплав при сравнительно низкой температуре.

Это обстоятельство очень важно, если принять во внимание, что нормальный клинкер в системе $CaO$ — $Al_2O_3$ — $Fe_2O_3$ — $SiO_2$ образует жидкую фазу при температуре 1338°.

Флуорапатит понижает температуру образования жидкой фазы по меньшей мере на 40°, в сравнении с минерализующей добавкой $CaF_2$.

Учитывая, что клинкеры с примесью флуоропатита не распыляются, даже при медленном охлаждении, приходим к заключению, кто флуоропатит оказывает стабилизующее действие на форму β $2\,CaO\,.\,SiO_2$ расширяя ее зону устойчивости почти до температуры окружающей среды.

Этим исключается переход при охлаждении формы β в форму γ $2\,CaOSiO_2$.

Учитывая, что механическая прочность нормальных цементных растворов из клинкера, полученного по способу медленного охлаж-

дения, почти одинаковы с прочностью цементов из клинкера, полученного по способу резкого охлаждения—приходим к выводу, что клинкеры минепализованные флуоропатитом могут быть охлаждаемы любым способом, что не оказывает влияния на прочность растворов.

Кафедра Технологии и строительных материалов

## L'ACTION DE MINÉRALISATEUR ET FONDANT DE LA FLUORAPATITE SUR LE CIMENT DE PORTLAND

(Résumé)

Les auteurs présentent une étude sur l'action de minéralisateur, fondant et stabilisateur de la fluorapatite sur le ciment de Portland.

Les conclusions de l'étude experimentale montrent :

— Le mélange des matières crues minéralisé avec fluorapatite a vitrifié à une température de 1410°C; on obtient un ciment de marque P500.

— La présence de la série isomorphe continue $2CaO.SiO_2$—$3CaO.P_2O_5$ dans le système quaternaire $CaO$—$2CaO.SiO_2$—$CaF_2$-$3CaO.P_2O_5$ dans lequel se place le clinker du ciment additioné de la fluorapatite, constitue la base du mécanisme de la minéralisation. Intervient aussi le role mineralisateur de l'ion de fluor — résulté de la décomposition du $CaF_2$ aux températures élevées et en présence de l'humidité.

— En examinant le système quaternaire on conclut que l'éutectique quaternaire du système se trouve à une température au dessous de 1205°C.

Donc, la fluorapatite, forme une masse fondue à une basse température, même sous 1205°C.

Ce fait est important, si l'on considère que le clinker normal dans le système $CaO$—$Al_2O_3$—$Fe_2O_3$—$SiO_2$, forme la phase liquide à la température de 1338°$C_3$. La fluorapatite diminue la température de formation de la phase liquide d'au moins 40°C, vu le rôle minéralisant de la $CaF_2$.

— En considérant que les clinkers minéralisés avec fluorapatite ne présentent pas la pulvérisation même à un refroidissement lent, on déduit que $P_2O_5$ se manifeste aussi comme stabilisateur de la forme $\beta_{,2}$ -$_2CaO.SiO$ $SiO_2$ élargissant la zône de stabilité de celui-ci, jusqu à proximité de la température ambiante.

Ainsi on bloque la transformation par refroidissement de la forme $\beta$ en forme $\gamma$-$2CaO.SiO_2$, forme qui ne présente pas de propriétés hydrauliques.

— Les résistances mécaniques des mortiers normaux à ciments résultés des clinkers lentement refroidis étant aproximativement égaux avec celles des ciments résultés des clinkers brusquement refroidis; on déduit que les clinkers minéralisés avec fluorapatite peuvent être refroidis en n'importe quelle condition, sans que les résistances es souffrent.

La quantité de fluor apportée par la fluorapatite utilisée comme mineralisateur (1,5% l"optimum de fluorapatite)" est beaucoup plus petite que celle qui est apportée par l'utilisation de la $CaF_2$ comme minéralisateur ainsi la maçonnerie réfractaire du four subira de même dans d'une moindre mesure l'action agressive du fluor, c'est-à-dire de l'acide fluorhydrique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

# ELECTROTEHNICĂ

621.3.025

## APLICAȚII ÎN PRACTICĂ DE SUPRAPUNERE A FENOMENELOR REACTIVE ȘI DEFORMANTE

de C. I. BUDEANU

1. — Suprapunerea de fenomene reactive și deformante în o rețea, se supune proprietății de conservare, după cum am avut ocazia a arăta odată cu stabilirea teoriei fenomenelor deformante.

Ecuațiile corespunzătoare acestei importante proprietăți se pot rezuma prin:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma_s\,(\Sigma_p U_p I_p \cos\varphi_p) = \Sigma_s P = 0\\
&\Sigma_s\,(\Sigma_p U_p I_p \sin\varphi_p) = \Sigma_s Q = 0\\
&\Sigma_s\,[U_p I_q \cos(\alpha_p+\beta_q) - U_q I_p \cos(\alpha_q+\beta_p)] = \Sigma_s \delta'_{pq} = 0\\
&\Sigma_s\,[U_p I_q \sin(\alpha_p+\beta_q) - U_q I_p \sin(\alpha_q+\beta_p)] = \Sigma_s \delta''_{pq} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

în care s-a notat:

$P$ puterea activă în fiecare latură

$Q$ puterea reactivă în fiecare latură,

Indicele $s$ se referă la laturile rețelei,

Indicii $p$ și $q$ se referă la ordinile armonicelor, în o funcție nesinusoidală.

$U_p$, $U_q$, $\cdots$ sînt valorile eficace ale tensiunilor armonicelor de ordin $p$, $q$, .... între nodurile adiacente unei laturi oarecare.

$I_p$, $I_q$ $\cdots$ sînt valorile eficace ale curenților de ordin $p$, $q$, ... în o latură oarecare.

$\varphi_p$ și $\varphi_q$ $\cdots$ sînt defazajele între tensiunile și curenții pe aceiași latură ale armonicelor de ordin $p$ și $q$.

$\alpha_p, \alpha_q$ sînt defazajele tensiunilor armonicelor de ordin $p$, $q$ din o latură în raport cu originea de timp comună.

$\beta_p, \beta_q$ sînt defazajele curenților armonicelor de ordin $p$, $q$ din o latură în raport cu originea de timp comună.

$\delta'_{pq}$, $\delta''_{pq}$ sînt ceeace am denumit puterile deformante elementare de ordin $pq$ desvoltate în fiecare latură a rețelei

*Conservarea algebrică* a mărimilor $\delta'_{pq}$ și $\delta''_{pq}$ ne conduce la *conservarea vectorială*, în un spațiu multidimensional de puteri, a mărimii $\overline{D}$ al cărei modul în o latură se vede că este:

$$D = |\overline{D}| = \sqrt{\Sigma\,\delta'^2_{pq} + \Sigma\,\delta''^2_{pq}} = \sqrt{\Sigma\,[U_p^2 I_q^2 + U_q^2 I_p^2 - 2U_p U_q I_p I_q \cos(\varphi_p - \varphi_q)]} \quad (2)$$

și pe care am introdus-o în electrotehnică sub numele de *putere deformantă*.

Din relațiile (1) și (2) rezultă modulul puterii aparente

$$S = |\overline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} = U \cdot I \tag{3}$$

Conservarea vectorială a puterii deformante în întreaga rețea, se scrie deci sub forma:

$$\Sigma_s \overline{D} = \Sigma_s \left[ \Sigma_{pq} \left( U_p I_q \left| \underline{\alpha_p + \beta_q} - U_q I_p \right| \alpha_q + \beta_p \right) \right] = 0 \tag{4}$$

Aceste proprietăți se verifică prin numeroase aplicații, cît și, după cum am arătat, prin metode experimentale [6].

Ele reprezintă proprietăți generale corespunzînd la suprapuneri de fenomene active, reactive și deformante, adaptate la fiecare caz în parte.

2. În cele ce urmează ne propunem de a aplica proprietățile generale, mai sus expuse, la cîteva situații uzuale din practică.

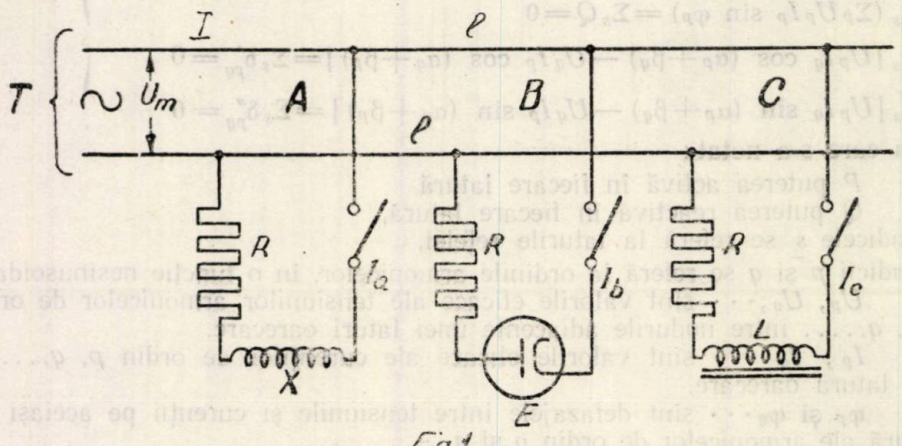



Fig. 1

Fie sistemul din fig. 1, în care sursa $T$ alimentează cu o tensiune sinusoidală, a cărei valoare maximă este $U_m$, barele electrice $l$.

$I$ este valoarea eficace a curentului total debitat de sursă.

La barele $l$ se racordează trei categorii de circuite $A, B, C$, de constituții și natură diferită. Curenții respectivi sînt $I_a$, $I_b$, $I_c$.

Pentru simplificarea raționamentului admitem că barele $l$ au rezistență și reactanță neglijabile.

*Circuitul* A este constituit din o rezistență $R$ în serie cu o reactanță $X$.

În cazul acesta, al unui circuit în regim sinusoidal, soluția are forma simplă cunoscută

$$\text{Curent eficace } I_a = \frac{U_m}{\sqrt{2\,(R^2+X^2)}}$$

$$\text{Putere activă } P_a = R I_a^2 = R \frac{U_m^2}{2(R^2+X^2)}$$

$$\text{Putere reactivă } Q_a = X I_a^2 = X \frac{U_m^2}{2(R^2+X^2)} \qquad (5)'$$

$$\text{Putere deformantă } D_a = 0$$

Putere aparentă (modul):

$$S_a = \sqrt{P_a + Q_a^2} = \frac{U_m^2}{2\sqrt{R^2+X^2}}$$

Expresia complexă a puterii aparente

$$S_a = P_a + j\,Q_a = \frac{U_m^2}{2(R^2+X^2)}\,(R+jX)$$

Factorul de putere (5)''

$$\lambda_a = \cos\varphi_a = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}$$

în care $j$ reprezintă, ca de obicei, operatorul de rotire cu $\frac{\pi}{2}$ în cazul de față, în planul puterilor activ-reactiv.

Indicele $a$ se referă la elementele circuitului $A$.

*Circuitul B* este constituit din o aceiași rezistență $R$, în serie cu o supapă electronică $E$. Presupunem, ceeace este admisibil, că eventuala rezistență internă a supapei, este inclusă tot în rezistența $R$. Supapa are astfel o funcționare teoretică ideală.

Soluția unui astfel de circuit a fost dată deja, în cea mai mare parte, atît pe cale teoretică cît și experimentală [6], [8], [9].

Reexaminăm în cele ce urmează considerațiile în legătură cu soluția unui astfel de circuit.

Curentul $i_b$ în circuitul $B$ este o funcțiune de jumătate de undă sinusoidală. Acest curent are deci proprietățile unui curent nesinusoidal.

*Valoarea eficace* a curentului este astfel:

$$I_b = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2} i_b^2\,dt} = \frac{U_m}{R}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2} \sin^2\omega t\,dt} = \frac{1}{2}\frac{U_m}{R} \qquad (6)$$

*Puterea* activă în circuitul $B$ se dezvoltă numai în rezistența $R$ avînd valoarea

$$P_b = R \cdot I_b^2 = \frac{1}{4} \frac{U_m^2}{R} \tag{7}$$

*Putere reactivă* în circuitul $B$ nu avem, deoarece descompunînd în armonice tensiunea (de forma jumătate undă sinusoidală) atît la bornele rezistenței $R$, cît și a supapei, observăm că toate componentele acestor tensiuni, sînt fie în fază ($\varphi=0$) fie în opoziție ($\varphi=\pi$) cu componentele corespunzătoare ale curentului, inclusiv unda fundamentală.

În consecință:

$$Q_b = \Sigma U_p I_p \sin \varphi_p = 0 \tag{8}$$

atît la fiecare din cele două aparate, componente ($R$ și $E$) cît și la originea circuitului $B$ (punctul de derivație din barele $l$) pe baza principiului conservării.

*Putere deformantă în circuitul B* se dezvoltă numai în aparatul $E$. Ea este datorită în acest aparat deformării relative a tensiunii instantanee față de curentul instantaneu. Acest aparat, prin faptul că rezistența sa interioară am exteriorizat-o în rezistența $R$, nu este sediul de putere activă, și nici de putere reactivă (relația 8) ci numai de putere deformantă. În consecință puterea deformantă a acestui aparat este identică cu puterea sa aparentă (relația 3).

Întrucît tensiunea la bornele aparatului $E$ este o funcție de jumătate undă sinusoidală, valoarea sa eficace este:

$$U_E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u^2\,dt} = U_m \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega t\,dt} = \frac{1}{2} U_m \tag{9}$$

În consecință puterea deformantă a supapei electronice $E$ rezultă din relațiile (6) și (9):

$$D_b = U_E I_b = \frac{U_m^2}{4R} \tag{10}$$

pe care o regăsim, cu aceiași valoare, la extremitatea circuitului $B$, unde verificăm astfel modulul puterii aparente

$$S_b = U I_b = \sqrt{P_b^2 + D_b^2} = \sqrt{\left(\frac{U_m^2}{4R}\right)^2 + \left(\frac{U_m^2}{4R}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{U_m^2}{R}$$

în care $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ și $I_b$ este valoarea eficace a curentului (relația 6) Se verifică astfel puterea aparentă la bare cu aceea rezultînd din valorile interne ale circuitului.

Expresia complexă a puterii aparente în circuitul B este astfel:

$$S_b = P_b + K_1 D_b = \frac{1}{4} \frac{U_m^2}{R} + K_1 \frac{1}{4} \frac{U_m^2}{R} = \frac{1}{4} \frac{U_m^2}{R} (1 + K_1 \cdot 1) \tag{11}$$

în care $K_1$ reprezintă, ca și în cazul precedent tot un operator de rotire cu $\frac{\pi}{2}$, însă în planul puterilor activ-deformant, care este cu totul altul decît planul activ-reactiv, din cazul precedent, în care rotește operatorul $j$.

Planurile puterilor activ-reactiv și activ deformant sînt normale între ele în spațiul multidimensional a puterilor în care intervine un fenomen deformant (în concordanță cu relația 2)

Factorul de putere al circuitului B este

$$\lambda_b = \frac{P_b}{S_b} = \frac{1}{4}\frac{U_m^2}{R}\cdot\frac{2\sqrt{2}R}{U_m^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \qquad (12)$$

care se vede că este totdeauna același pentru un circuit format din o rezistență în serie cu o supapă electronică.

Acest factor de putere este de natură pur deformantă și deci cu totul diferit de acela de natură reactivă al circuitului $A$.

*Circuitul C* este format din o aceiași rezistență $R$, în serie cu o inductanță $L$ cu fier. În acest caz curentul circuitului este nesinusoidal, din cauza naturii inductanței $L$.

Rezistența inductanței $L$ este deasemeni presupusă exteriorizată și inclusă în rezistența $R$

Întregul sistem al acestui circuit este astfel străbătut de curentul nesinusoidal avînd o valoare eficace $I_c$, care include în el un reziduu deformant $I_{dc} = \sqrt{I_c^2 - I_{1c}^2}$ în care $I_{1c}$ este valoarea eficace a undei fundamentale a curentului nesinusoidal $I_c$.

Raportul între $I_c$ și $I_{dc}$ depinde de gradul de saturație al inductanței $L$ și de proprietățile miezului de fier.

Circuitul $C$ fiind astfel determinat, soluția sa este formată din valorile cunoscute experimental $I_c$ și $I_{1c}$, complectate cu următoarele elemente:

Putere activă $$P_c = R I_c^2 \qquad (13)$$

Putere deformantă $$D_c = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I_{dc} \qquad (14)$$

Aceasta este expresia la care se reduce, în acest caz particular, expresia generală (2) cînd tensiunea la surse este sinusoidală. Puterea deformantă astfel stabilită la extremitatea circuitului $C$, pe baza principiului conservării este egală cu acea localizată în inductanța $L$

Puterea aparentă la extremitatea circuitului $C$, are modulul:

$$S_c = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I_c \qquad (15)$$

*Puterea reactivă* la extremitatea circuitului, și deci egală cu aceea localizată în inductanța $L$, este potrivit relației (3).

$$Q_c = \sqrt{S_c^2 - P_c^2 - D_c^2} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2} I_c^2 - (R I_c^2)^2 - \frac{U_m^2}{2} I_{dc}^2}$$

Expresia complexă a puterii aparente în circuitul C devine astfel:

$$S_c = P_c + j\,Q_c + K_2 D_c \tag{17}$$

în care $j$ este operatorul obișnuit de rotație cu $\frac{\pi}{2}$ în planul puterilor activ-reactiv, iar $K_2$ este un alt operator de rotație cu $\frac{\pi}{2}$ în planul puterilor activ-deformant la extremitatea circuitului $C$.

Planurile puterilor activ-reactiv și activ-deformant, ca și în cazul circuitului $B$, sînt normale între ele în spațiul multidimensional al puterilor, însă planurile activ-deformant ale circuitelor $B$ și $C$ nu sînt aceleași.

Factorul de putere al circuitului $C$ este:

$$\lambda_c = \frac{P_c}{S_c} = \frac{P_c}{\sqrt{P_c^2 + Q_c^2 + D_c^2}} = \frac{\sqrt{2}\,R I_c}{U_m} \tag{18}$$

Acest factor de putere, după cum se vede, este datorit atît fenomenelor reactive, cît și fenomenelor deformante ale circuitului $C$.

3. — Puterile active-reactive și deformante în cazul diferitelor circuite la care ne-am referit mai sus, pot fi determinate și pe alte căi, urmînd ca în practică să adoptăm, după împrejurări unele sau altele din aceste căi. Astfel, ca titlu de exemplu, menționăm cîteva dintre aceste variante de exprimare a puterilor respective:

a) În cazul circuitului $A$, puterile active, reactive, aparente pot fi scrise la extremitatea circuitului direct sub forma:

$$\left.\begin{aligned} P_a &= U \cdot I_a \cos \varphi_a = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I_a \cos \varphi_a \\ Q_a &= U \cdot I_a \sin \varphi_a = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I_a \sin \varphi_a \\ S_a &= U \cdot I_a = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot I_a \end{aligned}\right| \tag{19}$$

Aceste rezultate se vede că sînt identice cu acelea din relațiile (5)′ și (5)″. În adevăr relațiile (5)′ și (5)″ sînt scrise pe baza consumației interne în circuit, iar acelea din relațiile (19) sînt valorile respective la extremitatea circuitului. Pe baza principiului conservării, cele două categorii de valori trebuie să fie identice, ceeace se verifică ușor.

b) Puterea activă absorbită de circuitul B, poate fi scrisă și sub forma:

$$P_b = U \cdot I_{1b} \cos \varphi_b = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I_{1b} \cos \varphi_b \tag{20}$$

în care $I_{1b}$ este valoarea eficace a undei fundamentale a curentului $I_b$, iar $\varphi_b$ unghiul dintre tensiunea $U$ și unda fundamentală de curent. Descom-

punînd în armonice curentul $i$, ceeace în acest caz este analitic ușor posibil [8] se vede că $\varphi_b = 0$ iar:

$$I_{1b} = \frac{U_m}{2\sqrt{2}\,R} \tag{21}$$

Din (20) și (21) regăsim identitatea cu puterea activă dată mai sus prin relația (7).

Această identitate reprezintă deasemeni egalitatea, pe baza principiului conservării, între situațiile constatate la extremitatea circuitului și în interiorul circuitului.

Mai observăm tot odată că relația (20) ne arată că puterea activă este absorbită de circuitul B numai prin unda fundamentală, adică acea de aceeași pulsație cu tensiunea $U$, ceea ce e natural. Însă relația (7) ne arată că puterea activă se consumă în circuit în rezistența $R$ prin curentul care include toate armonicele. Această situație se explică prin faptul că puterea activă absorbită pe unda fndamentală, o parte se consumă în $R$ pe unda fundamentală, iar restul este transmisă supapei electronice care o *restituie pe armonice în sens invers*. Se verifică în acest caz particular *teorema* pe care am enunțat-o asupra funcționării unui aparat deformant [4].

c) Puterea reactivă absorbită de circuitul $B$ este nulă deoarece:

$$Q_b = U I_{1b} \sin \varphi_b = 0 \tag{22}$$

în care, după cum am văzut mai sus $\varphi_b = 0$

Acest rezultat este identic cu acela obținut prin relația (8).

d) — Puterea deformantă consumată în circuitul $B$ o putem găsi deasemeni prin valoarea constatată la extremitatea circuitului sub forma:

$$D_b = U \cdot I_{db} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{U_m}{R} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \frac{U_m^2}{R} \tag{23}$$

în care $U$ este valoarea eficace a tensiunii la extremitatea circuitului, iar $I_{db} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{U_m}{R}$ este reziduul deformant al acestui circuit, după cum am arătat anterior, pe care îl putem stabili precis în cazul acestui circuit [8].

Regăsim identitatea între cele două feluri de determinare a puterii deformante prin relațiile (10) și (23), ceeace și aci reprezintă identitatea pe baza principiului conservării între puterea deformantă constatată la extremitatea circuitului și acea din circuit.

e) Puterea activă absorbită de circuitul $C$ poate fi exprimată prin situația constatată la originea circuitului $C$.

$$P_c = U \cdot I_{1c} \cos \varphi_{1c} \tag{24}$$

Această relație ne conduce la identitatea cu relația (13), deoarece:

$$U \cdot I_{1c} \cos \varphi_{1c} = R I_{1c}^2 + R I_{dc}^2 = R I_c^2 \tag{25}$$

în care $\varphi_{1c}$ este defazajul între tensiunea $U$ și unda fundamentală a curentului.

$I_{1c}$ și $I_{dc}$ sînt unda fundamentală și reziduul deformant al curentului $I_c$

Şi aci, ca şi la aliniatul *b* de mai sus, constatăm dubla circulaţie de puteri pe unda fundamentală şi armonice prin rezistenţa *R*

f) Puterea reactivă a circuitului *C* poate fi exprimată prin

$$Q_c = U I_{1c} \sin \varphi_{1c} \tag{26}$$

în care $I_{1c}$ şi $\varphi_{1c}$ au aceleaşi semnificaţii ca mai sus.

Această expresie se verifică cu acea dată prin relaţia (16)

În adevăr din relaţia (25) deducem:

$$Q_c = \sqrt{U^2 I_{1c}^2 - U^2 I_{1c}^2 \cos^2 \varphi_{1c}}$$

însă ţinînd seama de (25) obţinem tocmai relaţia (16) deoarece:

$$U^2 = \frac{U_m^2}{2} \text{ şi } I_{1c}^2 = I_c^2 - I_{dc}^2$$

g) Puterea deformantă a circuitului *C* o deducem din (24), (26), şi (3).

$$D_c = \sqrt{U^2 I_c^2 - U^2 I_{1c}^2 \cos^2 \varphi_c - U^2 I_{1c}^2 \sin^2 \varphi_c} = U I_{dc} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I_{dc}$$

adică identică cu ceea ce am scris direct prin relaţia (14) . $I_{dc}$ este reziduul deformant al curentului în circuitul *C*.

4. — În cazul cînd circuitele *A*, *B* şi *C* funcţionează simultan în parte sau în total, puterile active, reactive şi deformante la sursa *T* vor fi constituite, pe baza principiului conservării, prin suma puterilor corespunzătoare fiecăruia dintre acele circuite. Aceste sume se efectuează algebric pentru puterile active şi reactive şi vectorial pentru puterile deformante şi aparente în spaţiul multidimensional al puterilor [2], [3], [5].

Suma *vectorială* a puterilor deformante [1], [2], [10], rezultă din conservarea *algebrică* a puterilor deformante elementare $\delta'_{pq}$ şi $\delta''_{pq}$ (relaţia 1)

În consecinţă expresia complexă a puterii aparente la sursa *T* are forma:

$$S = P + jQ + K(|\overline{D}_b + \overline{D}_c|) \tag{27}$$

în care *j* şi *K* sînt operatori de rotaţii cu $\frac{\pi}{2}$ în planuri normale între ele. Planul corespunzător operatorului *K* este diferit de acelea ale operatorilor $K_1$ şi $K_2$ corespunzînd puterilor deformante $D_b$ şi $D_c$ ale circuitelor *B* şi *C*.

Modulele puterilor deformante $\overline{D}_b$, $\overline{D}_c$ şi $|\overline{D}_b + \overline{D}_c|$ se comportă ca cele trei laturi ale unui triunghiu.

Calculul modulului $|\overline{D}_b + \overline{D}_c|$ se efectuează după cazuri, fie analitic, cînd se cunoaşte expresia analitică ale tensiunilor şi curenţilor nesinusoidali, fie prin calculul puterilor deformante elementare pentru termenii mai importanţi şi neglijîndu-se ceilalţi, fie prin anume formule aproximative care au fost stabilite cu o valabilitate practic admisibilă, fie

prin determinarea pe cale expeirmentală a reziduurilor deformante de curenți, cînd tensiunea este practic sinusoidală și cînd deci se poate pune riguros $D = U \cdot I_d$

În schema din fig. 1 am admis, după cum am văzut, că barele de distribuție $l$ au rezistența și inductanta neglijabile. Dacă aceste elemente nu sînt neglijabile trebuie să ținem seama și de puterea activă consumată în rezistența barelor, cît și de puterile reactive și deformante în inductanțele lor.

Calculul se poate face și în acest caz tot pe baza principiului conservării. El este însă de data aceasta mai migălos.

Expresiile complexe ale puterilor aparente în regim activ-reactiv-deformant, date mai sus prin relațiile (11), (17), (27) constitue de fapt o aplicare și o generalizare a *cuaternionilor lui Hamilton* la un spațiu multidimensional al puterilor.

5. — Pentru evidențierea și precizarea proprietăților mai sus relevate, considerăm util a le exemplifica prin cîteva aplicații numerice.

Astfel considerăm că în circuitul $A$, rezistența $R$ și reactanța $X$ au valorile $R = X = 20\,\Omega$

În circuitul $B$, rezistența $R = 20\,\Omega$

În circuitul $C$, rezistența $R = 20\,\Omega$,

valoarea eficace a curentului total, în circuitul $C$, $I_c = 10\ A$ iar valoarea reziduului deformant $I_{dc} = 5\ A$

Valoarea tensiunii maxime la barele $l$, și deci aceeași pentru toate circuitele este $U_m = 400\ V$.

Cu aceste date numerice obținem

*În Circuit A*, din relațiile (5′) și (5″)

Curentul eficace: $I_a = \dfrac{400}{\sqrt{2 \cdot 800}} = 10\ A$

Putere activă: $P_a = 20 \cdot 10^2 = 2000\ W$

Putere aparentă $S_a = \dfrac{400}{\sqrt{2}} \cdot 10 = \dfrac{4000}{\sqrt{2}}\ V \cdot A$

Factor de putere $\lambda_a = \cos \varphi_a = \dfrac{\sqrt{2} \cdot 2000}{4000} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$

*În circuit B*

Curent eficace $I_b = \dfrac{400}{2 \cdot 20} = 10\ A$ (relația 6)

Putere activă $P_b = \dfrac{400^2}{4 \cdot 20} = 2000\ W$ (relația 7)

Putere aparentă $S_b = \dfrac{400}{\sqrt{2}} \cdot 10 = \dfrac{4000}{\sqrt{2}}\ V \cdot A$ (relația 10)

Factor de putere $\lambda_b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ (relația 12)

*În circuit C*

Curent eficace $I_c = 10\,A$ (prin enunț)

Putere activă $P_c = 20 \cdot 10^2 = 2000\,W$ (relația 13)

Putere aparentă $S_c = \frac{400}{\sqrt{2}} \cdot 10 = \frac{4000}{\sqrt{2}}\,V \cdot A$ (relația 15)

Factor de putere $\lambda_c = \frac{\sqrt{2} \cdot 20 \cdot 10}{400} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ (relația 18)

Observăm că, toate aceste trei circuite au același curent eficace 10 *A*, aceeași putere activă 2000 *W*, aceeași putere aparentă $\frac{4000}{\sqrt{2}}\,V\,A$, același factor de putere $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Și totuși aceste trei circuite sînt cu totul diferite între ele atît ca constituție, cît și ca condiție de funcționare.

În adevăr, în circuitul *A*, factorul de putere este de natură exclusiv reactivă. Dacă montăm în paralel o capacitate convenabil calculată factorul de putere poate fi integral compensat.

În circuitul *B* dacă montăm în paralel orice capacitate sau orice inductanță pură, factorul de putere se înrăutățește; factorul de putere al acestui circuit e de natură exclusiv deformantă.

În circuitul *C*, factorul de putere este de natură reactivă și deformantă în același timp. Dacă montăm în paralel o capacitate convenabil calculată, putem numai îmbunătăți factorul de putere fără a-l compensa integral.

Distincția fizică între acele trei circuite este datorită naturii cu totul diferită a *puterilor neactive* care sînt cauzele factorului de putere.

Reamintim că prin *puterea neactivă* am înțeles

$$\sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{Q^2 + D^2}$$

Circuitul *A*, conține ca putere neactivă numai o putere reactivă

$$Q_a = 20 \cdot 10^2 = 2000\ Var \text{ (relația 5)}$$

Circuitul *B* conține ca putere neactivă numai o putere deformantă

$$D_b = \frac{1}{4} \cdot \frac{400^2}{20} = 2000\ Vad \text{ (relația 10)}$$

Circuitul *C* conține ca puteri neactive atît o putere reactivă

$$Q_c = \sqrt{\frac{400^2}{2}\,10^2 - (20 \cdot 10^2) - \frac{400^2}{2}\,5^2} = \sqrt{2} \cdot 10^3\ Var \text{ (relația 16)}$$

cît și o putere deformantă

$$D_c = \frac{400}{\sqrt{2}} \cdot 5 = \sqrt{2} \cdot 10^3\ Vad \text{ (relația 14)}$$

Observăm că aceste două puteri dau, pirn adunarea lor *vectorială*, o componentă totală neactivă

$$\sqrt{Q_c^2 + D_c^2} = \sqrt{2} \cdot 10^3 \cdot \sqrt{2} = 2000 \ V \cdot A$$

Deci în cele trei circuite găsim aceeași valoare de putere neactivă, însă de naturi fizice diferite.

Distincția fizică a acelor trei circuite se manifestă mai ales prin rezultatul diferit al compunerii sau funcționării lor simultane, deși este vorba de circuite de aceleași puteri active și aparente, cît și de același factor de putere.

În adevăr, dacă la barele $l$ sînt legate două circuite identice, fie de tipul $A$, fie de tipul $B$, fie de tipul $C$, atunci la sursa $T$ constatăm o putere activă dublă, o putere neactivă dublă, o putere aparentă dublă, cît și un curent eficace $I$ dublu, față de elementele corespunzătoare ale tipului de circuite folosite. Deasemeni în acest caz factorul de putere la sursa $T$ este același ca acela al fiecărora dintre circuitele $A$, $B$, $C$.

Altă va fi însă situația, dacă la barele $l$, legăm două circuite de tip diferit.

Astfel presupunem că la barele $l$ legăm circuitele $A$, $B$, de natură diferită, deși cu datele numerice adoptate au aceleași valori de putere activă, de putere neactivă cit și de putere aparentă, aceleași valori eficace de curent, și același factor de putere.

Expresiile complexe ale puterilor aparente corespunzătoare celor două circuite potrivit relațiilor (5) și (11), și ținînd seama de datele numerice mai sus obținute sînt:

$$\left.\begin{aligned} S_a &= P_a + j\,Q_a = 2000 + j\,2000 \ VA \\ S_b &= P_b + K_1 D_b = 2000 + K_1\,2000 \ VA \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

iar puterea complexă totală la sursă, pe baza principiului conservării este

$$S = S_a + S_b = P + jQ + K_1 D = 4000 + j\,2000 + K_1\,2000 \ VA \quad (29$$

în care

$$P = P_a + P_b \ ; \ Q = Q_a \ ; \ D = D_b$$

Observăm că regăsim la sursa $T$ puterea activă egală cu suma puterilor active a celor două circuite, puterea reactivă egală cu aceea a circuitului $A$ și puterea deformantă acea a circuitului $B$.

Modulul expresiei complexe totale a relației (29) devine astfel

$$S = |\overline{S}| = \sqrt{(4000)^2 + (2000)^2 + (2000)^2} = 2000\sqrt{6}\ VA \quad (30)$$

Curentul $I$ la sursă în acest caz este

$$I = \frac{S}{U} = \frac{\sqrt{2}\,S}{U_m} = \frac{\sqrt{12} \cdot 2000}{400} = \sqrt{3} \cdot 10 \ A \quad (31)$$

valoare care e mai mică decît $2 \cdot 10$ $A$ pe care am constatat-o la sursă dacă la barele $l$ s-ar lega tot două circuite în paralel ($A$, $B$ sau $C$) însă de același tip.

$$\text{Factorul de putere } \lambda = \frac{4000}{2000\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{32}$$

este mai bun decît $\frac{1}{\sqrt{2}}$ corespunzînd la cazul a două circuite de același tip în paralel.

În mod analog, dacă la barele $l$, am lega circuitele $A$ și $C$, am obține:

Expresiile complexe ale puterilor aparente corespunzătoare celor două circuite (relațiile 5 și 17)

$$\left.\begin{aligned} S_a &= P_a + j\,Q_a = 2000 + j\,2000 \ V\,A \\ S_c &= P_c + j\,Q_c + K_2 D_c = 2000 + j\sqrt{2}\cdot 10^3 + K_2\sqrt{2}\cdot 10^3 \ V\,A \end{aligned}\right| \tag{33}$$

Puterea complexă totală la sursă

$$S = P + jQ + K_2 D = 4000 + j\,(2000 + \sqrt{2}\cdot 10^3) + K_2\sqrt{2}\cdot 10^3 \ V\,A$$

în care

$$P = P_a + P_c\,; \quad Q = Q_a + Q_c\,; \quad D = D_c$$

Modulul puterii aparente:

$$S = |\bar{S}| = \sqrt{(4000)^2 + (2+\sqrt{2})^2 10^6 + 2\cdot 10^6} = 2000\sqrt{6+\sqrt{2}}$$

Curentul $I$ la sursă:

$$I = \frac{\sqrt{2}\,S}{U_m} = \frac{\left(\sqrt{12+2\sqrt{2}}\right)\cdot 2000}{400} = \sqrt{3+\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot 10 \ A \tag{34}$$

valoare mai mare decît acea din cazul precedent al circuitelor $A+B$, dar totuși mai mică decît 2.10 A din cazul a două circuite de același tip legate în paralel

Factorul de putere

$$\lambda = \frac{4000}{2000\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3+\frac{1}{\sqrt{2}}}} \tag{35}$$

este mai mic decît în cazul precedent a circuitelor $A+B$, dar totuși mai bun decît în cazul a două circuite de același tip în paralel.

Dacă am lega la barele $l$, circuitele $B$ și $C$, situația ar fi mai complexă, însă fenomenul are la bază tot principiul conservării puterilor mai sus expus.

Expresiile complexe ale puterilor aparente corespunzătoare celor două circuite ($B$ și $C$), așa cum reiese din relațiile (11) și (17):

$$\left.\begin{aligned} S_b &= P_b + K_1 D_b = 2000 + K_1 2000 \ VA \\ S_c &= P_c + jQ_c + K_2 D_c = 2000 + j\sqrt{3}\cdot 10^3 + K_2\sqrt{3}\cdot 10^3 \ VA \end{aligned}\right| \quad (36)$$

iar puterea aparentă complexă la sursă, potrivit relației (27), capătă forma:

$$S = P + jQ + KD \quad (37)$$

în care $P = P_b + P_c = 4000 \ W$

iar $D = |\overline{D}_b + \overline{D}_c|$ asupra căruia dăm următoarele precizări.

Vectorii de puteri deformante $\overline{D}, \overline{D}_b, \overline{D}_c$ în spațiul multidimensional al puterilor sînt toți normali pe planul activ-reactiv, însă de direcție diferită ceeace este posibil în un spațiu multidimensional, așa după cum în un spațiu tridimensional, în un punct pe o dreaptă putem duce mai multe perpendiculare însă în direcții diferite [5]

Operatorul $K_1$ (relația 36) rotește cu $\frac{\pi}{2}$ din planul activ-reactiv în direcția $\overline{D}_1$, iar operatorul $K$ din relația (37) rotește tot cu $\frac{\pi}{2}$ din planul activ-reactiv însă în direcția $\overline{D}$

Pentru a găsi modulul $|\overline{D}|$ teoretic se recurge la proprietățile de *conservare algebrică* ale puterilor deformante elementare (relațiile 1 și 2). Practic se poate recurge, după cum am văzut, la anume metode simplificatoare. În cazul de față, fiind vorba de o tensiune sinusoidală, modulul puterii deformante totale la sursă, corespunzînd suprapunerii ambelor circuite B și C, este riguros:

$$D = |\overline{D}| = |\overline{D}_b + \overline{D}_c| = UI_d \quad (38)$$

în care $I_d$ este reziduul deformant al curentului instantaneu total

$$i = i_b + i_c$$

Curentul $i_b$ are o formă analitică precisă [8], [9], iar $i_c$ trebuie determinat în fiecare caz în parte, potrivit proprietății fierului inductanței $L$ din circuitul $C$ și gradul său de saturație.

Determinînd astfel pe $D$ la bare (relația 38) și ținînd seama și de (37), modulul puterii aparente totale $S$ la sursa $T$ corespunzător ambelor circuite B și C devine:

$$S = |\overline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} \quad (39)$$

iar curentul $I$ total la sursă $T$

$$I = \frac{S}{U} = \frac{1}{U}\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} \quad (40)$$

În mod analog se rezolvă situația suprapunerii celor trei circuite simultan.

Modulul puterii aparente la sursa $T$ va avea o expresie analogă relației (39) în care însa de data această:

$$P = P_a + P_b + P_c = 6000\ W\ ;\ Q = Q_a + Q_c = 2000 + \sqrt{3} \cdot 10^3\ Var$$

iar $D$ are o expresie identică cu acea dată în (38)

Curentul total va avea forma relației (40) în care însă introducem noile valori de $P$ și $Q$, iar factorul de putere total la sursa $T$

$$\lambda = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}$$

6. — Asupra celor mai sus expuse adăogăm următoarele cîteva observații și precizări:

a) Asupra expresiei complexe a puterii aparente in regim sinusoidal, găsim în literatură uneori două forme de prezentare și anume:

$$S = U^* \cdot I = P - jQ \tag{41}$$

$$S = U \cdot I^* = P + jQ \tag{42}$$

Distincția între cele două forme este pur formală și de natură convențională.

In primul rînd precizăm că prin semnele lui $P$ și $Q$ înțelegem semnele senzurilor de *circulație.*

Pentru puterea activă chestiunea e simplă. Toată lumea este de acord că semnul pozitiv este acela al circulației de la generator spre receptor (motor etc.). Un generator *produce* o putere activă pozitivă și *primește* o putere activă negativă. Invers un receptor *primește* o putere activă pozitivă și *produce* o putere activă negativă.

Pentru puterea reactivă este nevoie însă de o convenție prealabilă pentru definirea sensului ei pozitiv de circulație. Dacă adoptăm convențional puterea reactivă *primită* de o bobină de inductantă ca positivă. forma (42) este valabilă. Dacă invers considerăm pozitivă puterea reactivă *produsă* de o bobină de inductantă și deci acea *primită* de o capacitate, forma (41), ar fi valabilă.

Adoptînd prezentarea (42), puterea complexă produsă de un generator sincron supraexcitat se scrie $P+jQ$ și acea produsă de un generator subexcitat $P-jQ$. In acest caz generatorul sincron subexcitat este *receptor* de putere reactivă și deci producător de putere reactivă negativă.

Forma (42) este cea mai răspîndită. Ea a fost adoptată de J. Fallou [10]. de M. Perecalin [14]. Insuși C. Crug, după ce menționează ambele forme, preferă forma (42).

Comisiunea Electrotehnica Internațională în sesiunea din 1954, notează puterea reactivă ca pozitivă, cînd se referă la o energie electrică a unui receptor inductiv, ceeace corespunde la forma relației (42). Deasemeni autori ca R. Becker, K. Polivanov. J. Stratton au folosit tot forma (42).

Aceasta e forma pe care noi înșine am folosit-o în permanență, și deci inclusiv în prezentul studiu.

Chiar în cazul prezentării (42) poate să apară $P-jQ$ însă numai acolo unde conform acelei convenții, $Q$ e negativ, ca de exemplu puterea reactivă *primită* de un condensator.

b) În ceeace privește puterea deformantă, fiind vorba de o mărime cu caracter vectorial, în spațiul multidimensional al puterilor, nu mai interesează semnul său algebric, ci *sensul* ei în acest spațiu.

Cînd ne interesează neapărat acest sens recurgem la o expresie de forma relației (4).

În prezentul studiu ne-am folosit în special de noțiunea de modul al puterii deformante, ca de exemplu relațiile (14), (23), (38), (39), (40) etc. În acest caz noțiunile de senz și de semn numai interesează. Suma însă a două puteri deformante trebuie s-o înțelegem vectorial, ca de exemplu relația (38).

c) Circuitul *B*, care conține o supapa electronică, trebuie înțeles în sensul că are o aceeași funcționare din punct de vedere al regimului de puteri, factor de putere etc., dacă am înlocui supapa electronică prin orice alt aparat echivalent, care ar absorbi sub o tensiune sinusoidală un curent de forma unor semiunde.

d) Am notat prin indicii *a, b, c,* mărimile care se referă la circuitele *A, B. C.*

*Concluzii*

Distingem din prezentul studiu următoarele cîteva concluzii mai importante:

a) Funcționarea unui sistem energetic în care se suprapun fenomene reactive și deformante se bazează pe proprietatea de conservare. Această proprietate reprezintă o conservare algebrică pentru puterile active, reactive și deformante elementare sau o conservare vectorială pentru puterile deformante și aparente [1], [2], [10], [3].

b) O distincție precisă apare între cele trei categorii principale de puteri active, reactive și deformante. Se poate să avem circuite, caracterizate prin aceleași puteri active, aparentă, curent, factor de putere și care totuși să se comporte diferit, din punct de vedere fizic, după proporția dintre puterile reactive și deformante în aceste circuite. Compunerea unor astfel de circuite conduce deasemeni la manifestări diferite.

c) În un sistem energetic sinusoidal reprezentarea puterilor se face în un spațiu bidimensional (în un plan) pentru întreg sistemul. Alta e situația în un regim nesinusoidal, unde reprezentarea puterilor aparține unui spațiu multidimensional.

d) În regim sinusoidal folosim un singur operator $j$ reprezentînd o rotire cu $\frac{\pi}{2}$ în planul respectiv al puterilor. Cu totul alta este situația în un regim nesinusoidal, unde operatorul $j = \frac{\pi}{2}$ nu mai este același. În un astfel de regim trebuie să folosim diferiți operatori care rotesc tot cu $\frac{\pi}{2}$ însă în plane diferite. Exprimarea complexă a puterilor (și chiar a curenților și a tensiunilor) trebuie să țină seama de această proprietate [5]

În regim nesinusoidal exprimarea complexă a curenților, tensiunilor și puterilor poate fi considerată ca o extindere a cuaternionilor lui Hamilton.

Ar fi o greșală ca în un regim nesinusoidal să folosim *același* operator $j=\frac{\pi}{2}$ și care deci implicit ar reprezenta o rotire în un același plan, pentru toate noțiunile de putere.

e) Și în acest domeniu trebuie să facem o distincție între expresii, care se bazează pe proprietăți ale fenomenelor și acelea care se bazează pe convenții facultative, cum e de exemplu acea relativ la semnele sensurilor de circulație a puterilor.

f) În general, după cum noțiunea de putere reactivă este utilă pentru studiul funcționării aparatelor introducînd fenomene reactive, deasemeni puterea deformantă poate fi utilă și a și fost adoptată deseori la studiul de aparate deformante (supape, redresori etc) [1], [11], [13], [7].

g) Constatările la care au condus considerațiile teoretice din prezentul studiu sînt confirmate prin verificări experimentale efective (valori de curenți, valori de puteri aparente, factori de putere și altele) [6]

h) Atît teoria cît și verificările experimentale ne scot în evidență, teorema, că un aparat deformant, aplicat la o tensiune sinusoidală produce o dublă circulație de putere activă în sens invers pe unda fundamentală și pe armonice [4], [8] între sursă și aparat.

i) Considerațiile de suprapunere a fenomenelor reactive și deformante mai sus expuse se pot extinde și la sisteme polifazate, tot pe baza principiului de conservare.

*Catedra de Electrotehnică*
*Inst. Polit. București*

## BIBLIOGRAFIE

1. *A. Blondel* — Courants alternatifs, J. B. Baillère et Fils, Paris (1933).
2. *C. Budeanu* — Puissances réactives et fictives, Inst. romîn de energie, București, (1927).
3. Quelques considérations sur le rôle physique des puissances instantanées, Bulet. Școalei Politehnice Nr. 1 (1928).
4. Sur le fonctionnement d'un appareil déformant, C. R. Académie des Science, Paris (1934), t. 199, p. 1598.
5. Quelques considérations sur les espaces supérieurs, Bulet. Școalei Politehnice Nr. 1 — 2 — 3. (1936—937),
6. Quelques confirmations expérimentales de la théorie des phénomènes déformants, Memoriu Academia Romînă, t. XIV (1939).
7. Asupra compensărilor și localizării fenomenelor deformante în o rețea electrică, Revista Universității C. Parhon (1952), Nr. 1.
8. Asupra funcționării supapelor electronice. In curs de publicare în Studii și cercetări de energetică.
9. *C. A. Crug* — Osnovi electrotehniki, Leningrad (1952).
10. *J. Fallou* — Leçons d'électrotechnique générale, Gauthier — Villars, Paris (1939).
11. *A. Fränkel* — Théorie der Wechselströme, I. Springer, Berlin, ed. III, (1930).

12. *A. Glaser* u. *K. Müller-Lùbech* — Theorie der Stromrichter, I. Springer, Berlin (1935).
13. *A. Mauduit* — Machines électriques, Dunod, Paris (1931), vol. II.
14. *M. A. Perekalin* — Elektriceskie țepi, Gosenergoizdat, Moscova—Leningrad (1950).
15. *T. Tănăsescu* — Bilanțul puterilor în unele circuite din radiotehnică, Electrotehnica Nr. 7, București (1955).

## ПРИМЕНЕНИЯ В ПРАКТИКЕ СОВПАДЕНИЯ РЕАКТИВНЫХ И ДЕФОРМИРУЮЩИХ ЯВЛЕНИЙ

(Краткое содержание)

В настоящей работе, после краткого перечисления общих свойст в, которые лежат в основе совпадения реактивных и деформипующих явлений, автор указывает применение этих свойств для нескольких практических целей. В особенности, он рассмотрел случай энергетической системы, состоящей из трех цепей различной физической природы, с точки зрения активных, реактивных и деформирующих яавлений.

Автоп определяет различные категории мощностей, развиваемых в этих цепях, применяя принцип сохранения.

Изучение заканчибается рядом наблюдений и определений.

## APPLICATIONS DANS LA PRATIQUE DE LA SUPERPOSITION DES PHÉNOMENES RÉACTIFS ET DÉFORMANTS

(Résumé)

Dans la présente étude, après une courte récapitulation des propriétés générales qui sont à la base de la superposition des phénomènes réactifs et déformants, l'auteur expose l'application de ces propriétés dans quelques situations usuelles de la pratique. Spécialement, il a été examiné le cas d'un sytème énergétique formé de trois circuits de nature physique différente, du point de vue de la manifestation des phénomènes actifs, réactifs et déformants.

L'auteur expose la détermination des diverses catégories de puissances développées dans ces circuits par l'application du principe de la conservation. Les effets du fonctionnement simultané des circuits de nature différente sont étudiés, les résultats étant illustrés par des applications numériques tout en mettant en évidence que des circuits ayant les mêmes puissances actives, non actives, apparentes et le même facteur de puissance peuvent se comporter différemment en fonction des puisances réactives et déformantes développées.

Il été mise en évidence la distinction entre l'opérateur de rotation avec $\pi/2$ des puissances réactives et déformantes. Il a été relevé la vérification du théorème énoncé par l'auteur depuis longtemps sur le fonctionnement des appareils déformants par la production dans les lignes d'une double circulation de puissances actives, en sens inverse, sur l'onde fondamentale et les harmoniques.

L'étude finit par une série d'observations et de précisions.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

621.317.785.082.744 : 621.3.025.018.3

# FUNCŢIONAREA CONTOARELOR DE INDUCŢIE INTR-UN REGIM DEFORMANT

de I. S. ANTONIU

1. Unul dintre aparatele de măsură cele mai răspîndite este contorul de inducţie. Într-adevăr, producerea şi utilizarea energiei electrice se face numai sub forma de curenţi alternativi, mono sau polifazaţi, curentul continuu necesar în anumite utilizări ale energiei electrice fiind obţinut astăzi numai prin transformarea curenţilor alternativi. Măsurarea acestei energii se face exclusiv cu contoare de inducţie, care sînt aparate simple ca realizare şi robuste.

Cunoştinţele noastre în ceea ce priveşte funcţionarea acestor contoare se bazează pe unele ipoteze făcute asupra fenomenelor ce se produc în discul de cupru sau de aluminiu sub acţiunea cîmpurilor de inducţie magnetică datorite bobinei de tensiune, bobinei de curent şi magnetului permanent. O cunoaştere exactă a teoriei funcţionării acestor contoare nu este posibilă deoarece nu este posibil să cunoaştem exact ceea ce se produce în disc.

Teoriile cunoscute ale contorului de inducţie sînt toate stabilite şi verificate în ipoteza funcţionării acestuia într-un regim sinusoidal. Ori, regimul energetic în reţelele electrice este departe a fi sinusoidal; prezenţa în aceste reţele a bobinelor cu miez de fier saturat, reprezentate prin transformatoarele electrice de diverse categorii, care sînt generatoare de putere deformantă, precum şi a cablurilor subterane, care sînt amplificatoare de regim deformant, fac ca regimul energetic normal să fie deformant. Importanţa cunoaşterii funcţionării unui contor de inducţie într-un regim deformant apare astfel ca evidentă.

2. Într-o notă anterioară [2], pornind de la expresia cuplului care acţionează asupra elementului mobil al unui aparat de inducţie, am arătat că, energia măsurată de un contor de inducţie funcţionînd în regim deformant este dată de relaţia

$$W = \frac{k'_1 \omega_1^2}{Z_1} \int_0^T U_1 I_1 \cos \varphi_1 \, dt + \sum_2^n \frac{k'_n \omega_n^2}{Z_n} \int_0^T U_n I_n \sin (\psi_n + \varphi_n) \, dt \qquad (1)$$

în care $k'_n$ reprezintă constanta contorului la funcţionarea acestuia într-un regim sinusoidal de armonică $n$. Din această relaţie, stabilită într-o ipoteză simplificatoare de calcul, rezultă imediat că, în cazul unui regim deformant total, în care ambele unde, de tensiune şi de curent nu sînt

sinusoidale, indicațiile unui contor de inducție sînt întotdeauna greșite. Atunci cînd unda de tensiune este sinusoidală — ceea ce se întîmplă în cazul contoarelor legate la barele centralelor electrice — al doilea termen al relației de mai sus este nul și se poate trage concluzia că într-un astfel de regim, în care tensiunea este practic sinusoidală, contoarele de inducție indică corect. La utilizare însă, tensiunea nu mai este sinusoidală dacă curentul nu este sinusoidal. Într-adevăr, fie $u_1$ tensiunea la barele centralei și $u_2$ tensiunea la barele utilizării. Dacă $Z$ este impedanța fiderului de alimentare și $i$ curentul absorbit de utilizare, neglijînd pierderile transversale (conductanța și susceptanța) ale fiderului, atunci se poate scrie

$$u_2 = u_1 - Zi \tag{2}$$

Din relația (2) se vede ușor că, dacă curentul $i$ nu este sinusoidal, chiar dacă tensiunea $u_1$ este perfect sinusoidală, tensiunea $u_2$ nu poate fi sinusoidală. În consecință, la utilizare va exista întotdeauna un regim deformant complet, astfel că relația (1) poate fi folosită pentru determinarea eroarei suplimentare a contorului în regim deformant. Această eroare este dată de relația, ușor de stabilit

$$\varepsilon = \sum_{2}^{n} \frac{k_n'}{k_n} \cdot \frac{Z_1}{Z_n} \cdot \frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{\int_0^T U_n I_n \sin(\psi_n + \varphi_n)\, dt}{\int_0^T U_1 I_1 \cos \varphi_1 \, dt}; \tag{3}$$

dacă se presupune că reactanța bobinei de tensiune este foarte mare în raport cu rezistența sa, care astfel poate fi neglijată, atunci [4]

$$Z_n = n Z_1$$

și cum

$$\omega_n = n \omega_1 ,$$

relația (3) poate fi scrisă:

$$\varepsilon' = \sum_{2}^{n} n \frac{k_n'}{k_n} \cdot \frac{\int_0^T U_n I_n \sin(\psi_n + \varphi_n)\, dt}{\int_0^T U_1 I_1 \cos \varphi_1 \, dt}, \tag{4}$$

care arată că, în expresia erorii nu pot fi neglijate efectele armonicilor superioare, chiar dacă sînt mici, deoarece ele se amplifică cu ordinul respectiv. Pe de altă parte, asupra semnului ei nu se poate spune nimic, semnul fiecărui termen al sumei (3) sau (4) poate fi pozitiv sau negativ, după semnul funcției $\sin(\psi_n - \varphi_n)$, în ipoteza că $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq +\frac{\pi}{2}$. Rezultă de aici că, *a priori*, nu se poate spune nimic asupra eroarei contorului în regimul deformant; este necesar să se cunoască atît regimul deformant cît și comportarea contorului la funcționarea în diverse regimuri sinusoidale de frecvență diferită.

3. La aceleași concluzii vom ajunge și dacă pornim de la teoria exactă a contorului de inducție. Există în literatura de specialitate mai multe teorii asupra funcționării contorului de inducție, stabilite pe baza anumitor ipoteze și care toate dau rezultate comparabile. Dintre acestea teoria lui Iliovici [5] ni se pare cea mai completă și mai aproape de realitate. După acest autor, viteza de regim a discului unui contor sub acțiunea cîmpurilor de inducție magnetică $B_1$, $B_2$ și $B$ este dată de relația

$$\omega' = \left[1 - \frac{(L_1^2 + L_2^2)\omega^2}{2R^2}\right] \frac{2\omega B_1 B_2 \sin(\psi + \psi')}{2B^2} + \frac{a\omega B_2^2}{B^2} - \frac{F}{B^2}, \qquad (5)$$

în care $B_1$ — este cîmpul de inducție magnetică produs de bobina serie;
$B_2$ — cîmpul de inducție magnetică produs de bobina derivație;
$B$ — cîmpul de inducție magnetică a magnetului permanent;
$\omega$ — pulsația curentului alternativ (pulsația armonicii fundamentale);
$R$ — rezistența discului, care se opune trecerii curentului indus în disc;
$L_1$ — inductivitatea discului în raport cu cîmpul $B_1$;
$L_2$ — idem, în raport cu cîmpul $B_2$;
$\psi$ — unghiul de decalaj dintre $B_1$ și $B_2$;
$\psi'$ — un unghi definit de relația

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{R(L_2 - L_1)}{R^2 + L_1 L_2 \omega^2}, \qquad (6)$$

$a$ — un factor, de dimensiunile unei suprafețe, corespunzător fluxului necesare compensării frecărilor;
$F$ — un factor ce caracterizează frecările.

În relația (5) s-a neglijat $B_1^2 + B_2^2$ față de $2B^2$.

Dacă ne aranjăm astfel încît

$$B_1 = k_1 I,$$

$$B_2 = k_2 i = k_2 \frac{U}{\lambda\omega} \sin\beta,$$

$$\sin(\psi + \psi') = \cos\varphi, \qquad (7)$$

în care $\lambda$ este inductivitatea bobinei derivație și $\beta$ defazajul curentului $i$ ce străbate spirele acestei bobine față de tensiunea $U$ aplicată la bornele sale (fig. 1), definit de relația

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\lambda\omega}{\varrho} \quad \therefore \quad \sin\beta = \frac{\lambda\omega}{\sqrt{\varrho^2 + \lambda^2\omega^2}}, \qquad (8)$$

în care $\varrho$ este rezistența bobinei derivație, atunci relația (5) poate fi scrisă

$$\omega' = (K_1 - K_2) P + K_3 U^2 - \frac{F}{B^2}. \qquad (9)$$

În această relație

$$K_1 = \frac{k_1 k_2}{\lambda B^2} \sin \beta = \frac{k_1 k_2}{\lambda B^2} \cos \psi',$$

$$K_2 = \frac{(L_1^2 + L_2^2)\,\omega^2 k_1 k_2}{2 R^2 \lambda B^2} \sin \beta = \frac{(L_1^2 + L_2^2)\,\omega^2 k_1 k_2}{2 R^2 \lambda B^2} \cos \psi',$$

$$K_3 = \frac{a k_2}{\lambda^2 B^2 \omega},$$

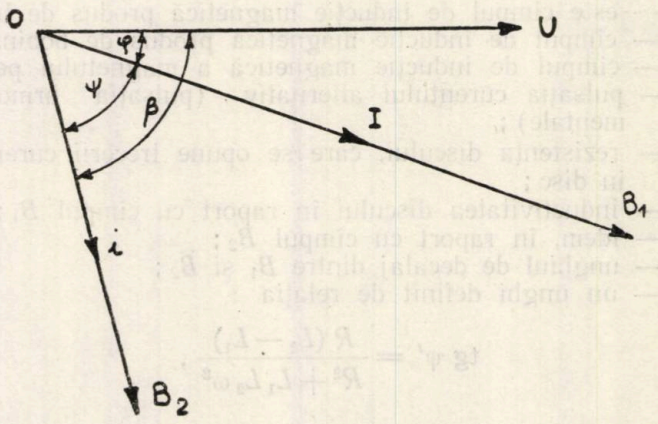



Fig. 1. — Diagrama cîmpurilor.

aceasta, deoarece din fig. 1 avem

$$\varphi + \psi = \beta,$$

iar din relația (7) rezultă

$$\psi + \psi' + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

și deci

$$\beta + \psi' = \frac{\pi}{2}.$$

Din relația (9) rezultă că, în regim sinusoidal de pulsație $\omega$, dacă pierderile prin frecări sînt riguros compensate,

$$K_3 U^2 = \frac{F}{B^2}, \tag{10}$$

atunci viteza de rotație a discului este proporțională cu puterea absorbită de circuitul în care se face măsurătoarea, coeficienții $K_1$ și $K_2$ fiind con-

stanți, iar numărul de rotații pe care îl va face discul într-un interval de timp oarecare $(t_2—t_1)$ va fi proporțional cu energia absorbită de circuit

$$N_t = \int_{t_1}^{t_2} \omega' \, dt = (K_1 - K_2) \int_{t_1}^{t} P \, dt .$$

Relația (9) fiind adevărată pentru un regim sinusoidal oarecare de pulsație $\omega$, ea va fi adevărată pentru orice regim sinusoidal. Fie deci un regim sinusoidal de pulsație

$$\omega_k = k\,\omega ,$$

$k$ fiind un număr întreg și pozitiv oarecare. Păstrînd aceleași constante și făcînd ipoteza *) că $\varrho \ll \lambda\omega$ și deci $\sin\beta \cong 1$, relația (9) se poate scrie

$$\omega'_k = (K_1 - K_2)\, P_k + (1 - k^2)\, K_3\, P_k + K_3 \frac{U^2}{k} - \frac{F}{B^2} \frac{\omega'_k}{\omega'} , \qquad (11)$$

în care

$$P_k = U_k\, I_k \cos \varphi_k$$

reprezintă puterea regimului energetic armonic considerat.

În relația (11) am scris termenul corespunzător frecărilor sub forma $\frac{F}{B} \frac{\omega'_k}{\omega'}$ admițînd că acesta variază proporțional cu viteza de rotație a discului.

Pentru ca contorul să arate exact în acest regim energetic, este necesar ca elementul de compensare să fie astfel reglat încît, în afară de pierderile prin frecări, să compenseze și puterea suplimentară datorită armonicii respective. Va trebui să avem satisfăcut deci

$$K_3 \frac{U^2}{k} = \frac{F}{B^2} \frac{\omega'_k}{\omega'} + (k^2 - 1)\, K_2 P_k . \qquad (12)$$

Este evident că, dacă relația (10) este satisfăcută, atunci relația (12) nu va mai fi satisfăcută și reciproc.

---

*) Ipoteza este justificată. Într-adevăr, dat fiind că $\varrho \ll \lambda\omega$, $\therefore \frac{\varrho}{\lambda^2\omega^2} < 1$ și $\frac{\varrho^2}{\lambda^2\omega^2} \ll 1$; în consecință expresia (8) a lui $\sin\beta$ se poate dezvolta în serie, din care oprind numai primii doi termeni, se obține

$$\sin\beta = 1 - \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{\lambda^2\omega^2} ,$$

sau, în cazul armonicii $\omega_k = k\,\omega$,

$$\sin\beta_k = 1 - \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{\lambda^2 k^2 \omega^2} ,$$

care tinde către 1 cînd $k$ crește.

Regăsim astfel rezultatul cunoscut că, un contor de inducție nu măsoară exact energia decît pentru frecvența pentru care a fost reglat. Eroarea cu care va indica un asemenea contor este dată de relația

$$\varepsilon_k = \frac{K_2}{K_1 - K_2}(1-k^2) + \frac{K_3 \frac{U^2}{k} - \frac{F}{B^2}\frac{\omega'_k}{\omega'}}{(K_1 - K_2)\, P_k} \cong \frac{K_2}{K_1 - K_2}(1-k^2). \qquad (13)$$

termenul al doilea fiind în general suficient de mic pentru a fi neglijat.

Examinînd relația (13), cum $k>1$, rezultă că eroarea contorului crește, în valoare absolută, odată cu creșterea frecvenței, ea fiind în general negativă. Ea poate să devină pozitivă dacă există relația

$$K_2 > K_1 ,$$

sau ținînd seama de expresiile acestor coeficienți,

$$(L_1^2 + L_2^2)\,\omega^2 > 2\,R^2 .$$

Se găsesc și de data aceasta rezultate găsite de alți autori pe altă cale [5 6].

4. Să presupunem acum că un contor de inducție este instalat într-o rețea în care regimul este deformant și caracterizat prin tensiunea

$$u = \sum U_k \sqrt{2}\, \sin(k\,\omega\, t - \alpha_k)$$

și prin curentul

$$i = \sum I_k \sqrt{2}\, \sin(k\,\omega\, t - \beta_k) .$$

Dat fiind că miezurile de fier a celor două electromagnete ale contorului, corespunzînd bobinelor serie și derivație, sînt nesaturate, elementele contorului pot fi admise a fi liniare. Putem deci aplica principiul suprapunerii efectelor și admite că viteza de regim a contorului provine din compunerea vitezelor de regim ale acestuia corespunzătoare fiecărei armonici în parte; rezultă dar

$$\omega' = \sum_{k=1}^{n} \omega'_k$$

sau ținînd seama de relația (11) se obține

$$\omega' = (K_1 - K_2)\,P + K_2 \sum_{k=1}^{n} (1-k^2)\,P_k + K_3 \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k^2}{k} - \frac{F}{B^2}, \qquad (14)$$

în care

$$P_k = U_k\, I_k \cos\varphi_k \qquad (\varphi_k = \beta_k - \alpha_k)$$

este puterea corespunzătoare unei perechi de armonici, și

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

este puterea totală absorbită de circuit.

Dat fiind că contorul nu poate fi reglat decît pentru o *singură* armonică, indicațiile sale, funcționînd într-un regim deformant, vor fi întotdeauna eronate. Neglijînd diferența

$$K_3 \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k^2}{k} - \frac{F}{B^2},$$

care în general este mică, eroarea contorului va fi

$$\varepsilon = \frac{K_2}{K_1 - K_2} \sum_{k=1}^{n} (1 - k^2) \frac{P_k}{P}. \qquad (15)$$

Dacă curbele de tensiune și curent ale regimului energetic deformant conțin și termeni constanți, $U_0$ și $I_0$, contorul de inducție nu va înregistra energia corespunzătoare acestor termeni constanți și eroarea suplimentară, avînd caracterul de eroare sistematică, va fi

$$\varepsilon' = - \frac{U_0 I_0}{U_0 I_0 + P}.$$

Reluînd expresia (15) a erorii unui contor de inducție funcționînd în regim deformant, se vede ușor că, asupra ei nu se poate spune nimic *a priori*. Ea poate avea termeni pozitivi sau negativi după cum $P_k$ este negativă sau pozitivă, aceasta depinzînd de defazajul dintre undele de tensiune și curent corespunzătoare și care poate avea orice valoarea între 0 și 360°; depinde, deasemenea, de semnul expresiei $K_1 - K_2$, acest termen fiind însă un termen care depinde de elementele constructive ale contorului, așa după cum s-a arătat mai sus și deci independent de regimul deformant corespunzător. Este totuși foarte probabil ca, în general, această eroare să fie negativă și în consecință, un contor, reglat în regim sinusoidal și funcționînd în regim deformant, să indice în minus.

5. Pentru a verifica rezultatele teoretice obținute mai sus, au fost întreprinse o serie de cercetări experimentale. Prin aceste cercetări s-a căutat să se vadă modul de comportare a contoarelor de inducție în regimuri deformante cît mai variate posibil și s-a căutat să se găsească o corelație între eroarea contorului și regimul deformant corespunzător. S-a căutat, de asemenea, să se determine limitele atinse de erorile suplimentare ale contoarelor verificate, în raport cu gradul de deformație al regimului considerat și dacă aceste erori rămîn între limitele admisibile pentru contoarele de inducție.

Pentru efectuarea acestui studiu, s-a stabilit un circuit cuprinzînd ca aparate deformante bobine cu miez de fier, o lampă redresoare tip Tungar și condensatoare (fig. 2), montajul fiind analog cu cel folosit într-o lucrare anterioară [3]. În acest circuit au fost legate contoarele care urmau a fi studiate; măsurarea diverselor mărimi electrice din circuit au fost făcute cu aparate termice cu fir cald, un voltmetru și un ampermetru, iar diversele unde, de curent și de tensiune, au fost ridicate cu ajutorul unui oscilograf cu bucle de tip Blondel. Pentru controlul formei undelor regimului deformant a fost montat, în paralel cu oscilograful Blondel, un osciloscop Siemens cu 3 bucle de măsură.

Regimul deformant de curent a fost obținut fie cu inductanțe cu fier, fie cu supapa electronică (lampă Tungar). Pentru deformarea undei de tensiune s-a folosit un regulator de inducție cu miez de fier și un condensator, montate după cum se vede în fig. 2. În figurile 3, 4, 5 și 6 au

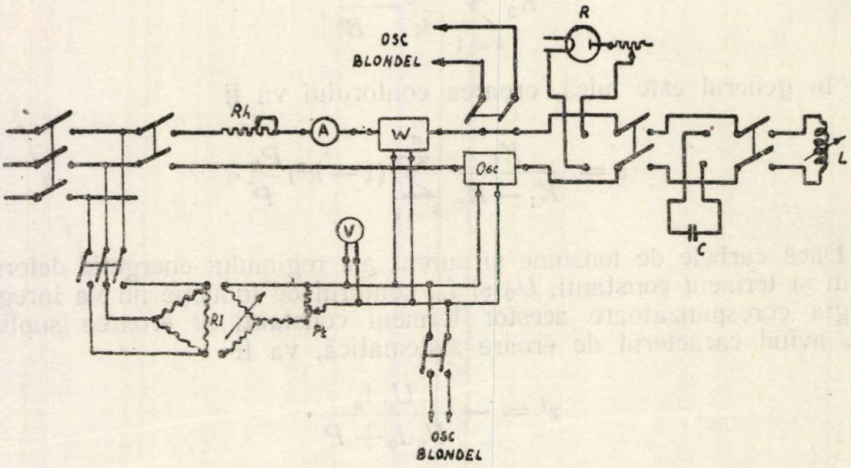



Fig. 2. — Schema de montaj pentru efectuarea încarcărilor.

fost redate unele dintre aceste unde de tensiune și curent obținute. Analiza armonică a diverselor oscilograme a fost făcută prin metoda Thomson-Runge a ordonatelor echidistante, cu ajutorul cartoanelor ajurate [4].*)

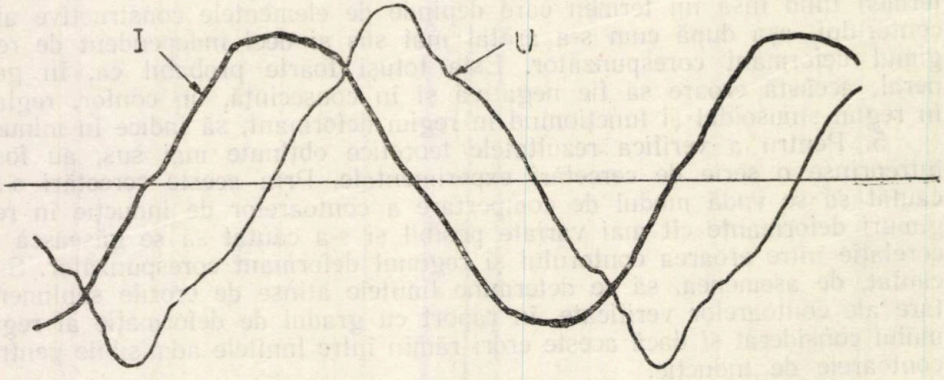



Fig. 3. — Oscilogramele de curent și tensiune la încercarea 3.

Cu rezultatele obținute din analiza armonică s-a calculat energia adevărată cu ajutorul relației

$$W_a = t \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \cos \varphi_k \text{ Ws}$$

*) Pag. 230

Energia măsurată de contor a fost determinată măsurîndu-se timpul în care discul diverselor contoare a făcut un anumit număr de rotații, cu ajutorul relației

$$W_m = \frac{3{,}6 \cdot 10^6 \cdot n}{C}, \text{ Ws}$$

în care $n$ este numărul de rotații făcut de disc în timpul $t$, $C$ fiind constanta contorului. Eroarea aparatelor s-a calculat cu relația

$$\varepsilon\,\% = \frac{W_m - W_a}{W_a} \times 100 \cdot$$

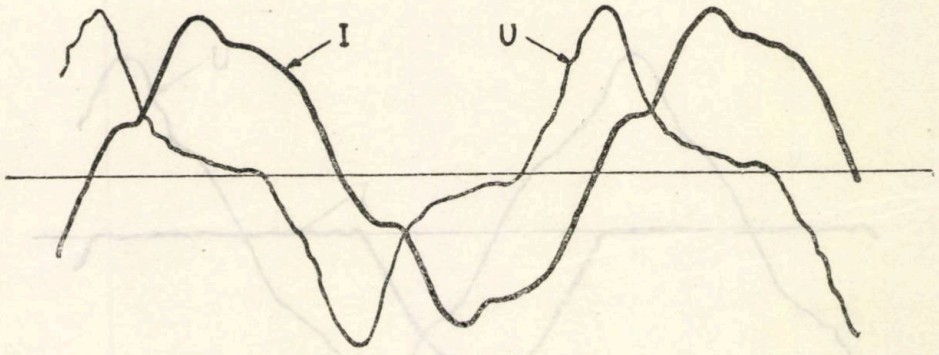



Fig. 4. — Oscilogramele de curent și tensiune la încercarea 5.

Este necesar să se precizeze de la început că, determinarea energiei adevărate cu ajutorul rezultatelor obținute din analiza armonică a oscilogramelor obținute, se face cu o anumită eroare sistematică, aceasta deoarece, analiza armonică nu dă decît un număr limitat de armonici care

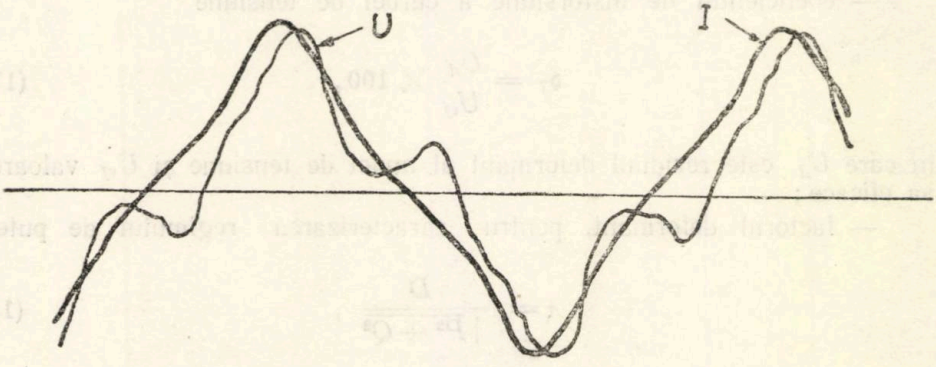



Fig. 5. — Oscilogramele de curent și tensiune la încercarea 7.

compun o asemenea curbă. Eroarea neglijării armonicilor superioare armonicii 17 (la care ne-am limitat în studiul nostru), este însă mică, mărimea eficace a armonicilor neglijate fiind mică. Măsurătoarea exactă s-ar fi putut face numai cu ajutorul unui wattmetru cu fir cald [1].

În ceea ce privește erorile, este necesar a se ține seama de eroarea maximă admisibilă pe care poate să o dea un aparat la o încărcare diferită de sarcina sa nominală. Pentru contoare, această variație a erorii cu sarcina este dată de relația [7]

$$\pm \varepsilon = 3 + 0{,}05 \frac{P_N}{P} + 0{,}5 \left(1 + 0{,}1 \frac{P_N}{P}\right) \operatorname{tg} \varphi , \tag{16}$$

în care $P_N$, $P$ și $\varphi$ sînt sarcina nominală, sarcina pentru care se determină eroarea și defazajul corespunzător. Această relație nu este adevărată decît pentru un defazaj maximum de $60^0$ și pentru regimul sinusoidal.

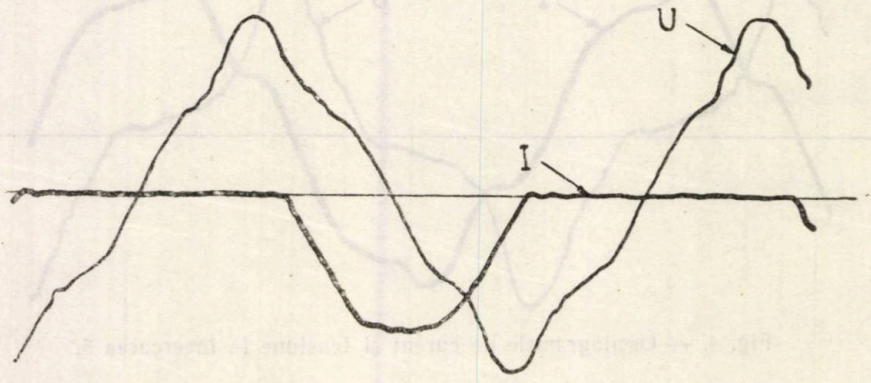



Fig. 6. — Oscilogramele de curent și tensiune la încercarea 11.

Regimul deformant este caracterizat prin următoarele elemente [4] *):

— coeficientul de distorsiune a curbei de tensiune

$$\delta_T = \frac{U_d}{U_{ef}} \times 100 , \tag{17}$$

în care $U_d$ este reziduul deformant al undei de tensiune și $U_{ef}$ valoarea sa eficace;

— factorul deformant, pentru caracterizarea regimului de puteri

$$\tau = \frac{D}{\sqrt{P^2 + Q^2}} , \tag{18}$$

în care $D$ este puterea deformantă în sistem, definită de relația:

$$D = \sqrt{\sum_{m,n} [U_m^2 \, I_n^2 + U_n^2 \, I_m^2 - 2 \, U_m \, U_n \, I_m \, I_n \cos (\varphi_m - \varphi_n)]}$$

*) p. 248

și $Q$ puterea reactivă din sistem, definită prin relația

$$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin \varphi_k ,$$

$\varphi_k$ fiind unghiul de defazaj între undele de curent și tensiune de armonică $k$;

— factorul reactiv, definit de relația

$$\varrho = \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}. \tag{19}$$

Erorile obținute au fost puse în diagramă, atît în funcție de sarcină (fig. 7) cît și în funcție de factorul deformant (fig. 8) și în funcție de coeficientul de distorsiune a curbei de tensiune (fig. 9).

Au fost efectuate încercări asupra următoarelor contoare:

a — Contor de inducție etalon, mono și trifazat, de 120 V și 5 A, 50 Hz, avînd constanta $C$=4200 rot=1 kWh, fabricat de Landis & Gyr din Zoug (Elveția), Nr. 1083413, denumit în cele ce urmează contorul *A*.

b — Contor de inducție monofazat, de tip industrial, de 120 V și 5 A, 50 Hz, avînd constanta $C$=6000 rot=1 kWh, fabricat de Siemens & Schuckert din Berlin, Nr. 9392935, denumit în cele ce urmează contorul *B*.

Rezultatele încercărilor sînt date în tabloul I.

În acest tablou, eroarea maximă admisă, calculată pentru defazaje la care $\operatorname{tg}\varphi > \sqrt{3}$, nu trebuie să fie considerată decît indicativă, relația (16) ne mai fiind valabilă.

6. Interpretarea rezultatelor obținute nu este prea ușoară dat fiind dispersiunea mare a valorilor obținute. Totuși, oarecare concluzii calitative pot fi deduse:

a) Erorile de măsură a celor două contoare sînt, în general, mai mari (în valoare absolută) decît cele maxime admisibile corespunzătoare funcționării în regim sinusoidal. În majoritatea lor aceste erori sînt negative, ceea ce confirmă prevederile teoretice. Valoarea medie a acestor erori (în valoare absolută) este

| | *Inductiv* | *Capacitiv* |
|---|---|---|
| pentru contorul *A* | 11,12% | 12,27% |
| pentru contorul *B* | 8,92% | 13,70% |

Față de limitele admisibile pentru aceste contoare, erorile obținute sînt foarte mari. Ele sînt de același ordin de mărime indiferent dacă contorul este normal sau etalon, deși pentru acesta din urmă, a cărui con-

Tabloul I

**Încercarea contoarelor de inducție**

| Nr. crt. | Factor deformant % | Coeficient de distorsiune a tensiunii $\delta_T$ % | Timp s | Puterea calculată W | Indicațiile contoarelor | | Erori % | | | tg φ | Regimul reactiv |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | A Ws | B Ws | A | B | maxim admis | | |
| 1 | 12,05 | 3,19 | 13,7 | 431,95 | 5944,29 | 60000,0 | + 0,45 | + 1,39 | ± 3,40 | 0,5927 | cap. |
| 2 | 15,00 | 5,20 | 18,6 | 338,91 | 5976,86 | 6000,00 | — 5,19 | — 4,81 | ± 3,86 | 1,2776 | ind. |
| 3 | 14,47 | 15,55 | 14,3 | 95,62 | 1157,14 | 1200,00 | — 5,37 | —12,24 | ± 8,29 | 6,1087 | cap. |
| 4 | 22,43 | 21,51 | 12,0 | 117,12 | 1165,72 | 1200,00 | —17,06 | —14,62 | ± 6,52 | 4,3197 | ind. |
| 5 | 44,40 | 38,28 | 24,1 | 62,27 | 1161,43 | 1200,00 | —22,61 | —20,04 | ±10,27 | 6,9117 | ind. |
| 6 | 41,62 | 38,99 | 20,2 | 282,58 | 5820,00 | 6000,00 | + 1,96 | + 5,11 | ± 3,82 | 1,1808 | cap. |
| 7 | 31,16 | 44,84 | 14,3 | 415,86 | 5928,58 | 6000,00 | — 0,30 | + 0,90 | ± 3,24 | 0,2780 | cap. |
| 8 | 58,58 | 45,40 | 16,1 | 182,49 | 2944,29 | 3000,00 | + 0,21 | + 2,11 | ± 5,83 | 2,0070 | ind. |
| 9 | 7,72 | 1,96 | 15,0 | 305,61 | 5982,86 | 6000,00 | +30,51 | +30,89 | ± 4,20 | 1,6909 | cap. |
| 10 | 87,01 | 5,62 | 16,0 | 412,19 | 5965,72 | 6000,00 | — 0,54 | — 3,02 | ± 3,01 | 0,1112 | ind. |
| 11 | 102,80 | 13,81 | 13,8 | 105,67 | 1155,43 | 1200,00 | —20,77 | —17,71 | ± 5,88 | 3,3045 | cap. |
| 12 | 110,42 | 34,18 | 15,5 | 104,98 | 1195,72 | 1200,00 | —26,52 | —26,26 | ± 5,76 | 3,1512 | cap. |

strucție este deosebit de îngrijită și a cărui funcționare este perfectă, indicațiile sale sînt exacte cu o eroare de $\pm 0{,}5\%$ pentru orice regim de funcționare în sinusoidal.

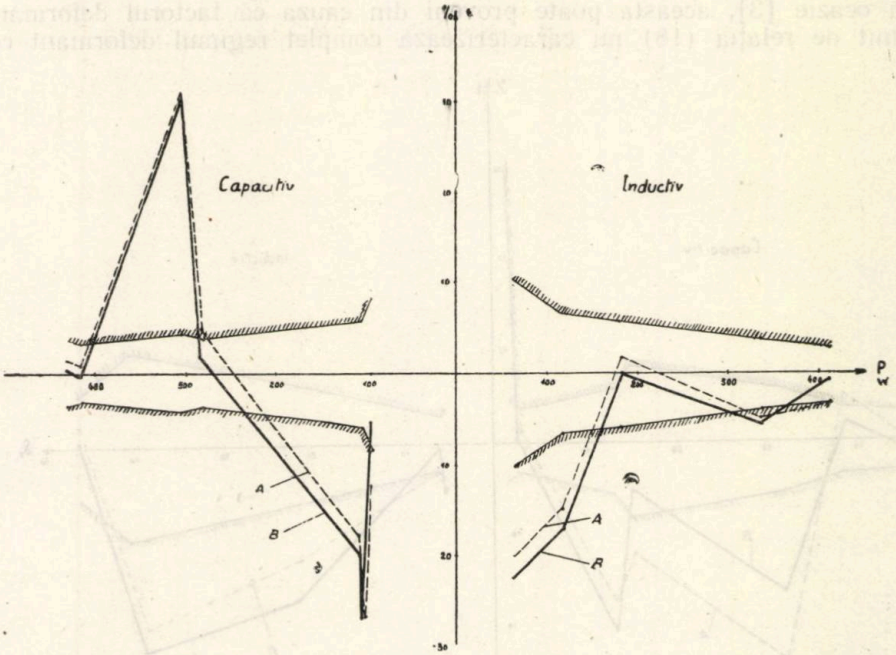



Fig. 7. — Curbele $\varepsilon = f$ (P).

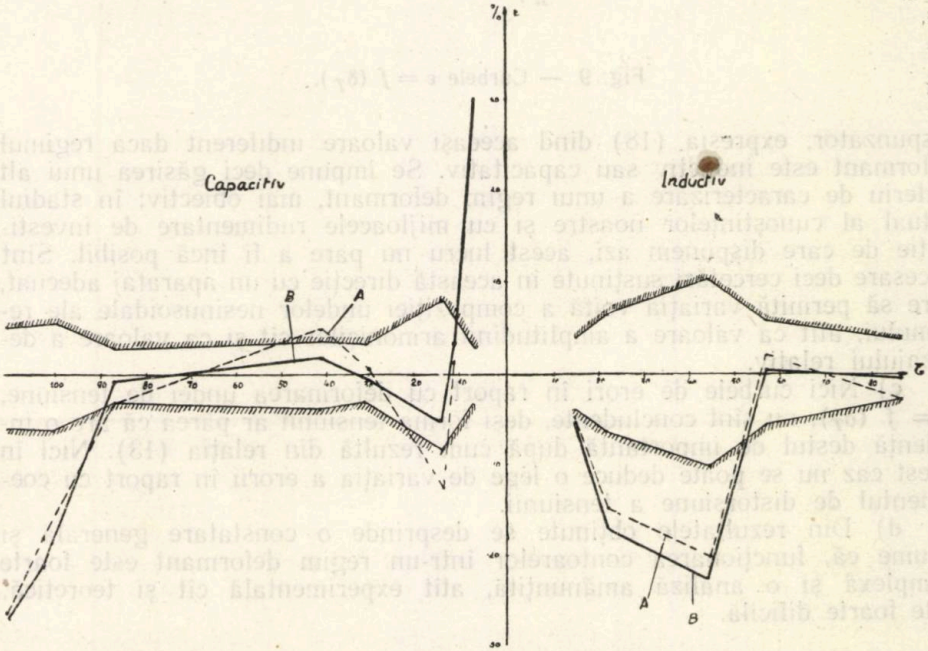



Fig. 8. — Curbele $\varepsilon = f$ ($\tau$).

Erorile de măsură sînt ceva mai mari în regim de funcționare capacitiv.

b) Nu se poate stabilit o lege care să dea variația eroarei în funcție de factorul deformant al regimului. Așa după cum am arătat și cu o altă ocazie [3], aceasta poate proveni din cauza că factorul deformant, definit de relația (18) nu caracterizează complet regimul deformant co-

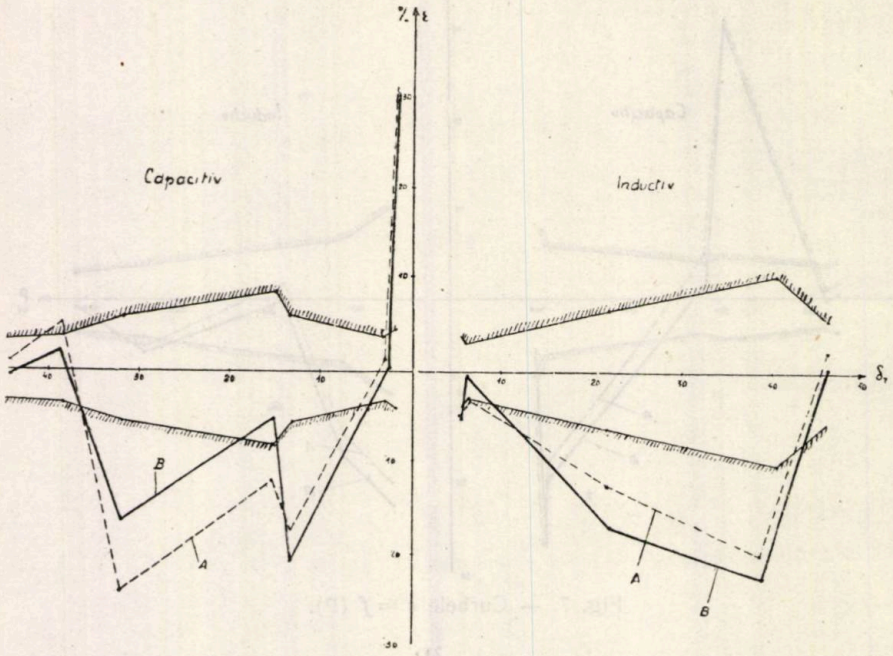



Fig. 9 — Curbele $\varepsilon = f(\delta_T)$.

respunzător, expresia (18) dînd aceeași valoare indiferent dacă regimul deformant este inductiv sau capacitativ. Se impune deci găsirea unui alt criteriu de caracterizare a unui regim deformant, mai obiectiv; în stadiul actual al cunoștințelor noastre și cu mijloacele rudimentare de investigație de care dispunem azi, acest lucru nu pare a fi încă posibil. Sînt necesare deci cercetări susținute în această direcție cu un aparataj adecuat, care să permită variația voită a compoziției undelor nesinusoidale ale regimului, atît ca valoare a amplitudinii armonicilor cît și ca valoare a defazajului relativ.

c) Nici curbele de erori în raport cu deformarea undei de tensiune, $\varepsilon = f(\delta_T)$, nu sînt concludente, deși forma tensiunii ar părea că are o influență destul de importantă după cum rezultă din relația (13). Nici în acest caz nu se poate deduce o lege de variația a erorii în raport cu coeficientul de distorsiune a tensiunii.

d) Din rezultatele obținute se desprinde o constatare generală și anume că, funcționarea contoarelor într-un regim deformant este foarte complexă și o analiză amănunțită, atît experimentală cît și teoretică, este foarte dificilă.

e) Întrucît regimurile energetice deformante sînt infinite ca varietate, este imposibil să se precizeze *a priori* un mod de reglare a contoarelor destinate să funcționeze în asemenea regimuri astfel încît eroarea lor de măsură să fie cît mai redusă posibil. Nu se poate spune că un contor care are o eroare foarte mică în regim sinusoidal va avea o eroare acceptabilă în regim deformant. Studiul contorului etalon ne confirmă aceasta. Se poate pune însă problema reglării contoarelor de inducție direct în regimul deformant în care urmează să funcționeze. În aceste condiții măsurarea energiei electrice se va face corect. Pentru aceasta este însă necesar a avea aparate de măsură de comparație care nu sînt influențate de regimul deformant, cum sînt aparatele termice cu fir cald (ampermetre, voltmetre și wattmetre).

f) Creșterea necontenită a importanței regimurilor deformante în marile rețele de transmitere și distribuire a energiei electrice impune cunoașterea cît mai bine a funcționării aparatelor de măsură într-un atare regim și în special construirea de aparate noi sau găsirea de metode de etalonare a aparatelor existente astfel încît măsurarea energiei electrice să se facă cu erori cît mai mici, compatibile cu o bună economie în exploatare.

*Catedra de Electrotehnică 2*
*Institutul Politehnic București*

## BIBLIOGRAFIE

1. *Antoniu I. S.* — Funcționarea aparatelor de măsură într-un regim deformant. Teză, București (1948).
2. *Antoniu I. S.* — Electricitatea, Nr. 8, August (1951), p. 17.
3. *Antoniu I. S.* — Funcționarea wattmetrelor electrodinamice în regim deformant. Studii și cercetări de energetică. T. V, nr. 3—4 (1955), p. 547.
4. *Antoniu I. S.* — Chestiuni speciale de electrotehnică, București (1956), p. 248.
5. *Iliovici A.* — Théorie des compteurs à disque. La lumière électrique. T. XIII (2-è série), 1911, p. 163—170 et 195—202.
6. *Moellinger J. A.* — Wirkungsweise der Motorzähler und Messwandler, Berlin (1925).
7. Verband Deutscher Elektrotechniker (VDE): Vorschriftenbuch, 23, Auflage (1941).

## ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ИНДУКЦИОННЫХ СЧЕТЧИКОВ В ДЕФОРМИРУЮЩЕМ РЕЖИМЕ

(Краткое содержание)

Индукционныхй счетчик—это наиболее распространенный измерительный прибор в сетях переменного тока. Теория его функционирования в синусоидальном режиме не уточнена, и она еще менее известна в деформирующем режиме. Ввиду того, значение деформирующего режима возрастает в новейшик сетях, одновременно растет их

значение, необходимо знать как протекает работа индукционных счетчиков в подобном режиме.

Автор исследует с теоретической точки зрения влияние деформирующего режима на работу счетчиков, и главным образом на погрешности записи этих счетчиков, установив выражение этой погрешности

$$\varepsilon = \frac{K_1}{K_1 - K_2} \sum_{k=1}^{n} (1 - k^2) \frac{P_k}{P}$$

где $K_1$ и $K_2$—коеффициенты зависящие от конструктивных элементов счетчика (вообще $K_1 > K_2$), $k$-порядок гармоник тока и напряжения, $P_k$—активная мощность произведенная парой гармоник и $P = \sum_{k=1}^{n} P_k$

$P_k$—полная активная мощность потребленная цепью.

Так как $k > 1$, то указания счетчика вообще бу ут меньше. Больше того, если волны тока и напряжения деформирующего режима имеют и постоянные составляющие, соответствующая мощность этих терминов не записывается счетчиком, а его добавочная погрешность, являясь систематической погрешностью, будед

$$\varepsilon' = - \frac{UI}{UI + P}$$

Автор произвел многочисленные испытания, подтвердившие в общих чертах ранее полученные теоретические результаты.

В заключение автор показывает что, поскольку число возможных деформирующих режимов в электрических сетях, неорганиченно невозможно уточнить *a priori* метод урегулирования индукционных счетчиков, которые должны работать в таком режиме, таким образом чтобы их погрешности были допустимы. Эти счетчики следует градуировать на месте работы, в деформирующем режиме в котором они должны работать.

С другой стороны, изучение действия индукционных счетчиков в деформирующем режиме следует продолжать, с целью наилучшего освоения их работы, ввиду техничесих и административных мер, которые должны быть приняты.

## Объясндние рисунков

Рис. 1. — Диаграма полей.
„ 2. — Принципиальная схема для выполнения испытаний.
„ 3. — Осцилограмма тока и напряжения для 3-его испытания.
„ 4. — „ „ „ „ „ 5-го „
„ 5. — „ „ „ „ „ 7-го „
„ 6. — „ „ „ „ „ 11-го „
„ 7. — Кривые $\varepsilon = f(P)$.
„ 8. — Кривые $\varepsilon = f(\tau)$.
„ 9. — Кривые $\varepsilon = f(\delta_T)$.

## LE FONCTIONNEMENT DES COMPTEURS D'INDUCTION EN RÉGIME DÉFORMANT

(Rézumé)

Le compteur d'induction est l'appareil de mesure le plus répandu dans les réseaux à courants alternatifs. La théorie de son fonctionnement est mal connue en régime sinusoïdal et peu connue en régime déformant. Étant donné que le régime déformant accroît son importance dans les réseaux modernes suivant l'ampleur de ces réseaux, il s'ensuit qu'il est très nécessaire de connaître le comportement des compteurs d'induction dans un pareil régime.

L'auteur étudie, du point de vue théorique, l'influence qu'un régime déformant peut exercer sur la fonctionnement des compteurs d'induction et surtout sur l'erreur d'enregistrement de ces compteurs, en établissant l'expression de cette dernière, à savoir

$$\varepsilon = \frac{K_1}{K_1 - K_2} \sum_{k=1}^{k} (1 - k^2) \frac{P_k}{P},$$

dans laquelle, $K_1$ et $K_2$ sont des coefficients dépendant des éléments constructifs du compteur (avec, en géneral, $K_1 > K_2$), $k$ l'ordre des harmoniques de courant et de tension, $P_k$ la puissance active produite par une paire d'harmoniques et $P = \sum_{k=1}^{n} P_k$ la puissance active totale absorbée par le circuit. Etant donnée que $k > 1$, le compteur indiquera, en géneral, moins. De plus, si les ondes de tension et de courant du régime déformant ont aussi des termes constants, la puissance, leur correspondant, ne sera pas enregistrée par le compteur et l'erreur supplémentaire de ce dernier, dont le caractère est celui d'une erreur systématique, sera

$$\varepsilon' = -\frac{U_0 I_0}{U_0 I_0 + P}.$$

L'auteur a effectué une série de recherches expérimentales qu'ont confirmé en général les résultats théoriques obtenus.

En conclusion, vu le nombre illimité des régimes déformants qui pouvent exister dans les réseaux électriques, l'auteur montre qu'il n'est pas possible de préciser *a priori* un mode de réglage des compteurs d'induction qui devraient fonctionner dans un pareil régime, afin que leurs erreurs puisent être acceptables. De tels compteurs doivent être étalonnés sur les lieux, dans le régime déformant où ils doivent fonctionner.

D'autre part, les études du fonctionnement des compteurs d'induction dans un régime déformant doivent être continuées, afin qu'on puisse le mieux possible connaître leur comportement en vue des mesures techniques et administratives à prendre.

## Explication des figures

Fig. 1. — Diagramme des champs.
Fig. 2. — Schéma de montage pour l'exécution des essais.
Fig. 3. — Oscillegrammes du courant et de la tension pour le 3-ème essai.
Fig. 4. — Oscillogrammes du courant et de la tension pour le 5-ème essai.
Fig. 5. — Oscillogrammes du courant et de la tension pour le 7-ème essai.
Fig. 6. — Oscillogrammes du courant et de la tension pour le 11-ème essai.
Fig. 7. — Courbes $\varepsilon = f(P)$.
Fig. 8. — Courbes $\varepsilon = f(\tau)$.
Fig. 9. — Courbes $\varepsilon = f(\delta_T)$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

621.3.016.351

# RELATIV LA CRITERIILE PRACTICE DE CALCUL A STABILITĂȚII STATICE

de E. ARIE și A. ARIE

Prin lucrarea de față s-a urmărit să se aprofundeze aspectul fizic al criteriilor practice de apreciere a stabilității statice a sistemelor electroenergetice $\frac{dP}{d\delta}$ și $\frac{dQ}{du}$ și pe baza analizei fenomenului fizic să se deducă relația matematică, care leagă între ele, aceste două criterii.

S-a considerat un sistem electric format din $n$ noduri, și s-a presupus că într-un nod $m$ al acestui sistem se cunosc parametrii electrici corespunzători, — puterile active și rective ce trec prin nod, tensiunea și frecvența — precum și funcțiile care leagă parametrii de mai sus.

S-a pus condiția, că în nodul $m$, sistemul poate fi divizat în două regiuni, între care nu mai există nici o legătură electrică.

Pornind dela criteriile micilor oscilații, în calculul făcut au fost introduse deplasări relative și pe baza acestora, menținînd pe rînd anumiți rotori fixi, s-a ajuns la deplasări nereale, fictive, ale vectorului tensiune din nodul considerat, deplasări denumite în text, pentru ușurința notațiilor, deplasări virtuale.

În acest fel a rezultat un criteriu local depinzînd numai de funcțiile care leagă parametrii electrici ai nodului $m$.

S-a obținut o expresie a criteriului $\frac{dP}{d\delta}$, în care termenul $\frac{dQ}{du}$ apare ca unul din factori, și pe această bază se arată în ce condiții criteriile $\frac{dP}{d\delta}$ $\frac{dQ}{du}$, conduc la aceleași rezultate.

Fie un sistem electric format din $n$ noduri și se consideră că acest sistem poate fi divizat într-un nod al său $m$; cele două regiuni adiacente nodului $m$ ne mai avînd nici o altă legătură electrică între ele (vezi fig. 1).

Se poate demonstra că în ipoteza făcută mai sus, în calculul stabilității staice, atît mașinile electrice din regiunea 1-a, cît și mașinile elec-

trîce din regiunea 2-a, pot fi reduse fiecare la cîte o mașină echivalentă, obținîndu-se astfel un sistem electric format din două grupuri, un grup generator $M_1$ și un grup motor $M_2$ — (vezi fig. 2).

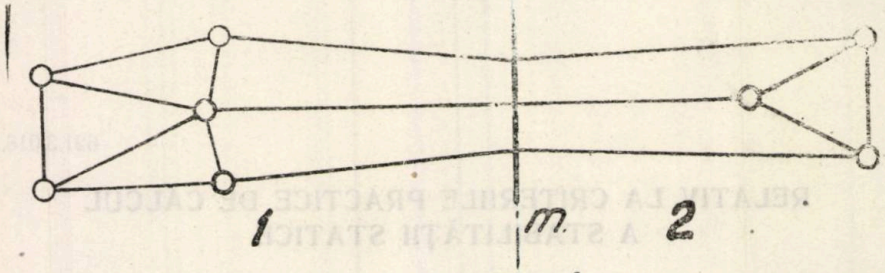
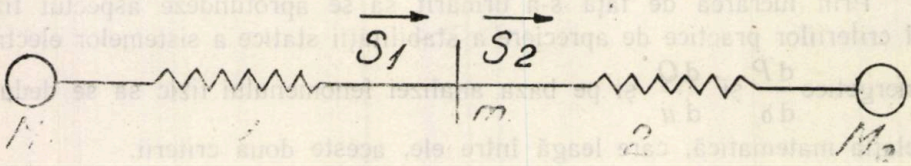



Fig. 1




unde

$M_1$ = mașina echivalentă din regiunea 1 considerată generator;
$M_2$ = mașina echivalentă din regiunea 2, considerată motor.

Starea electrică a sistemului în nodul *m* se caracterizează prin:

1. Puterea activă debitată de sistemul generator în nodul *m*.
2. Puterea reactivă debitată de sistemul generator în nodul *m*.
3. Puterea activă absorbită de sistemul motor în nodul *m*.
4. Puterea reactivă absorbită de sistemul motor în nodul *m*.
5. Tensiunea nodului în mărime și decalaj față de o axă luată drept referință ce se rotește cu o viteză constantă $\omega_0$
6. Frecvența electrică a parametriilor de mai sus.

Acești parametrii sînt determinați la rîndul lor, de caracteristicile de funcționare ale elementelor de transport și transformare, cît și de caracteristicile de funcționare mecanice și electrice ale receptorului.

Fie deci nodul *m* caracterizat printr-o stare electrică inițială determinată de următorii parametrii:

$$\vec{S}_1 = P_1 + jQ_1$$

$$\vec{S}_2 = P_2 + jQ_2$$

$$\overline{U} = U\,\underline{\delta}$$

$f_1$ și $f_2$

unde:

$\vec{S}_1$ = puterea aparentă debitată de sistemul generator în nodul $m$.

$\vec{S}_2$ = puterea aparentă absorbită de sistemul motor în nodul $m$.

$\vec{U}$ = tensiunea înnodul respectiv.

$f_1$ = frecvența fenomenelor electrice din regiunea 1.

$f_2$ = frecvența fenomenelor electrice din regiunea 2.

Starea electrică inițială fiind considerată ca stare de echilibru rezultă:

$$\vec{S}_1 = \vec{S}_2$$
$$f_1 = f_2$$

Se consideră cunoscute caracteristicile

$$P_1 = \varnothing_1(\gamma_1, U) \; ; \; P_2 = \varnothing_2(\gamma_2, U)$$
$$Q_1 = \psi_1(\gamma_1, U) \; ; \; Q_2 = \psi_2(\gamma_1, U) \qquad (a)$$

unde, în afară de notațiile utilizate pînă în prezent, $\gamma_1$ și $\gamma_2$ sînt unghiurile pe care vectorul corespunăztor tensiunei $U$ din nodul $m$ le face cu două semi-axe $R_1$ și $R_2$, semi-axe legate rigid de rotoarele mașinilor reduse $M_1$ (considerată generator) și $M_2$ (considerată motor). A se vedea figura 3.

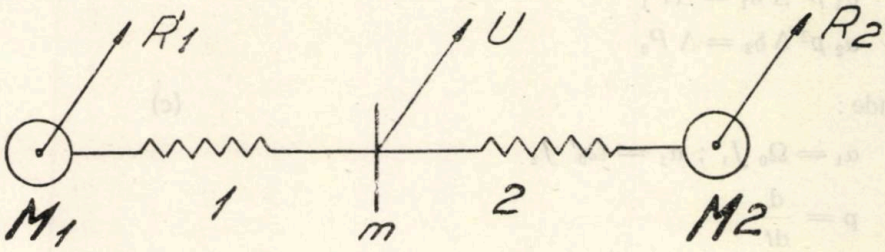



Fig. 3.

Dacă considerăm o axă oA, care se rotește cu viteza de sincronism și dacă raportăm semii-axele $R_1$ și $R_2$ și vectroul tensiunei $U$ la această axă se obține figura de mai jos:

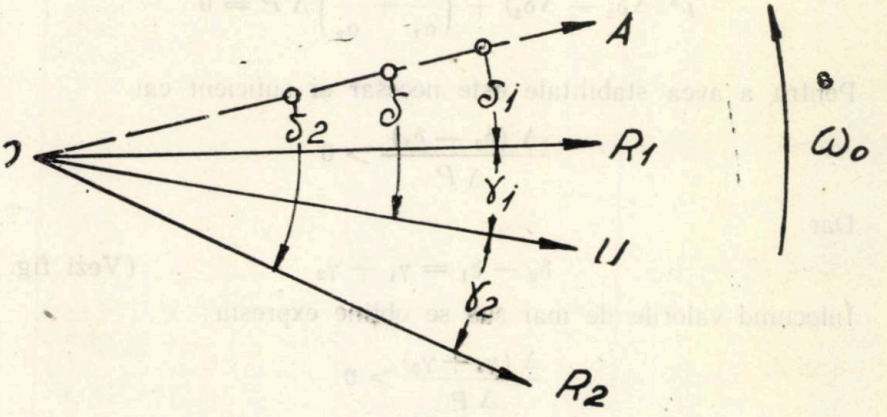



Fig. 4.

Scriind ecuaţiile echilibrului dinamic şi ţinînd seama de notaţiile din fig. 4, se capătă

$$\Omega_0 J_1 \frac{d^2 \delta_1}{dt^2} = P_1 - P'_1$$

$$\Omega_0 J_2 \frac{d^2 \delta_3}{dt^2} = P'_2 - P_2 \qquad (b)$$

unde

$\Omega_0$ = viteza de sincronisim a sistemului.
$J_1$ = momentul de inerţie al grupului 1.
$J_2$ = momentul de inerţie al grupului 2.
$P_1$ = puterea electrică debitată de generatorul 1.
$P'_1$ = puterea mecanică la arborele grupului 1.
$P_2$ = puterea electrică primită de motorul 2.
$P'_2$ = puterea mecanică la arborele grupului 2.

Pentru studiul stabilităţii statice, aplicînd principiul micilor oscilaţii în ipoteza că $P'_1$ şi $P'_2$ sînt consideraţi constanţi se obţine:

$$\alpha_1 p^2 \Delta \delta_1 = \Delta P_1$$

$$\alpha_2 p^2 \Delta \delta_2 = \Delta P_2$$

unde: (c)

$$\alpha_1 = \Omega_0 J_1 \; ; \; \alpha_2 = \Omega_0' J_2$$

$$p = \frac{d}{dt}$$

în ipoteza că $P'_1$ şi $P'_2$ sînt consideraţi constanţi se obţine:

$$\Delta \cdot P = \Delta \cdot P_1 = \Delta \cdot P_2$$

Scăzînd cele două ecuaţii (C) se obţine

$$p^2 (\Delta \delta_2 - \Delta \delta_1) + \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \Delta P = 0$$

Pentru a avea stabilitate este necesar şi suficient ca

$$\frac{\Delta (\delta_2 - \delta_1)}{\Delta P} > 0$$

Dar

$$\delta_2 - \delta_1 = \gamma_1 + \gamma_2 \qquad \text{(Vezi fig. 4).}$$

Înlocuind valorile de mai sus se obţine expresia:

$$\frac{\Delta (\gamma_1 + \gamma_2)}{\Delta P} > 0$$

Rezultatul arată că condiția de stabilitate depinde de variația lui $\gamma_1 + \gamma_2$ — deci a unghiului dintre cele două rotoare în raport cu $\Delta P$, variația puterii active, fapt ce este cunoscut sub denumirea de criteriul $\frac{dP}{d\delta}$

Condiția obținută poate primi următoarea interpretare:

Se consideră sistemul divizat în nodul m, în două regiuni 1 și 2 și se presupun în aceste regiuni doi observatori 1 și 2, observatorul 1 fiind legat de rotorul $R_1$ și observatorul 2 de rotorul $R_2$.

— Variația $\Delta \gamma_1$ în sistemul 1 va fi văzută de observatorul 1, cu o deplasare a vectorului $\vec{U}$.

Deci vectorul $\vec{U}$ se va deplasa cu un $\Delta \gamma_1$ virtual, semi-axa $R_1$ fiind considerată fixă.

— Variația $\gamma_2$ în sistemul 2, va fi văzută de observatorul 2, ca o deplasare a vectorului U cu un $\Delta \gamma_2$ virtual, semi-axa $R_2$ fiind considerată fixă.

Dacă notăm $\gamma_1 = \delta - \delta_1$ (vezi fig. 4) și dacă se consideră — pe marginea observațiilor făcute mai sus — că în sistemul 1 $\delta_1$ este constant, atunci rezultă că deplasarea virtuală a unghiului $\gamma_1 (\Delta_v \gamma_1)$ se reduce la deplasarea virtuală a unghiului $\delta$ $(\Delta_v \delta)_1$:

$$\Delta_v \gamma_1 = (\Delta_v \delta)_1$$

Deci în regiunea 1, deplasarea reală $\Delta \gamma_1$ poate fi înlocuită cu o deplasare virtuală $(\Delta_v \delta)_1$ menținîndu-l pe $R_1$ fix și deplasînd vectorul $\vec{U}$; variația virtuală a lui $\gamma_1$ se reduce la variația virtuală a lui $\delta$ în regiunea 1

Se notează deplasarea virtuală imprimată vectorului $\vec{U}$ în sistemul 1 ($R_1$ fiind menținut constant), la o varație $\Delta P$, cu

$$(\Delta_v \delta)_1 = \Delta \delta_A$$

Același raționament utilizat și pentru regiunea 2, conduce la:

$$\Delta_v \gamma_2 = - (\Delta_v \delta)_B$$

Se notează deplasarea virtuală imprimată vectorului $\vec{U}$ în sistemul 2, ($R_2$ fiind menținut constant), la aceeași variație $\Delta P$, cu

$$(\Delta_v \delta)_2 = \Delta \delta_B$$

Dacă se înlocuiește $\gamma_1$ și $\gamma_2$ în condiția de stabilitate se obține relația de mai jos:

$$\frac{\Delta (\gamma_1 + \gamma_2)}{\Delta_P} = \frac{\Delta \delta_A - \Delta \delta_B}{\Delta_P} > 0 \qquad (d)$$

Condiția obținută este o funcție numai de deplasarea virtuală a vectorului $\vec{U}$ în cele două sisteme, sisteme considerate desfăcute în nodul m.

Ecuația (d) exprimă faptul că pentru a exista un echilibru static, trebuie ca perturbarea virtuală imprimată de sistemul receptor să tindă să se opuie perturbării virtuale imprimate de sistemul generator.

Condiţia de stabilitate de mai sus s-a stabilit în ipoteza că atît semi-axa $R_1$ cît şi semi-axa $R_2$ se rotesc cu viteza de sincronism, deci că cele două maşini $M_1$ şi $M_2$, sînt maşini sincrone. Aceeaşi condiţie se obţine considerîndu-se maşina $M_2$ motor asincron.

În adevăr fie maşina $M_1$, din sistemul 1, considerată generator sincron, iar maşina $M_2$ din sistemul 2 considerată motor asincron.

Dacă reprezentăm într-o diagramă semi-axele $R_1$ şi $R_2$ legate de rotoarele celor două maşini şi vectorul tensiunii $\vec{U}$ a punctului m, rezultă figura de mai jos:

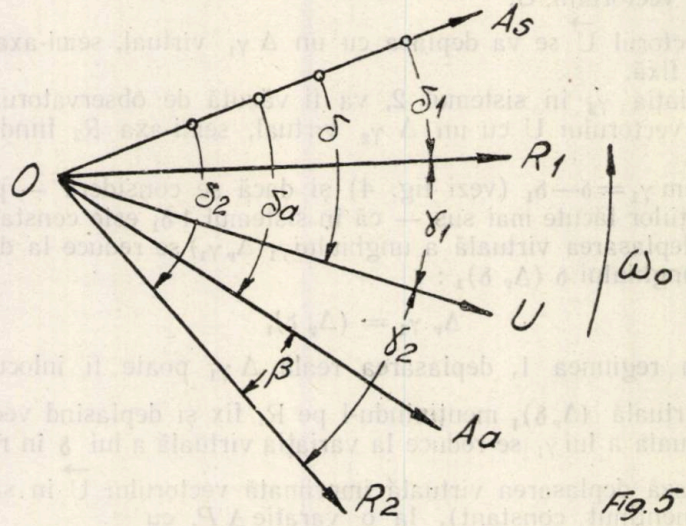



Fig. 5

unde

$0A_s$ = axă care roteşte cu o viteză constantă de sincronism

$0A_a$ = axa a cărei viteză de rotaţie este egală cu viteza de asincronism a maşinei asincrone, cu puţin înainte de producerea perturbaţiei

$0R_1$ = semi-axă legată ridig de rotorul maşinei 1

$0R_2$ = semi-axă legată ridig de rotorul maşinei 2 (considerată asincronă)

Aplicînd criteriul micilor oscilaţii în ipoteza că pierderile pe linii sînt nule rezultă condiţia de stabilitate următoare

$$\frac{\Delta(\beta - \delta_1)}{\Delta P} > 0$$

unde:

$\beta$ = unghiul dintre axa oA şi semi-axa $R_2$, iar $\delta_1$ este unghiul dintre axa $0A_s$ şi semi-axa $R_1$

Dar din figura 5 rezultă că

$$\beta = \delta_2 - \delta_a, \text{ în care}$$

$\delta_2$ = unghiul dintre axa $OA_s$ şi vectorul $R_2$

$\delta_a$ = unghiul dintre axa $OA_s$ şi axa $OA_a$

Diferențiind ecuația precedentă se obține relația:

$$\Delta\beta = \Delta(\delta_2 - \delta_a) = \Delta(\delta_2 - \omega_a t)$$

$\omega_a$ = fiind viteza relativă a axei $OA_a$ în raport cu axa $OA_s$ puțin înainte de producerea perturbării, înlocuind, se obține:

$$\frac{\Delta(\delta_2 - \delta_1 - \omega_a t)}{\Delta P} > 0 \quad \text{(vezi fig. 5)}$$

Cum :

$$\delta_2 - \delta_1 = \gamma_1 + \gamma_2 ,$$

pentru cazul studiat, condiția de stabilitate se reduce la

$$\frac{\Delta(\gamma_1 + \gamma_2 - \omega_a t)}{\Delta P} > 0 \qquad \text{(e)}$$

Secționînd sistemul în modul m și aplicînd criteriul deplasărilor virtuale pentru cele două regiuni, se va obține:

Pentru regiunea 1, observatorul aflîndu-se pe retorul $R_1$ deci $\delta_1$ considerat constant variind numai $\delta$, și ținînd seamă că:

$$\gamma_1 = \delta - \delta_1 \quad \text{(vezi fig. 5).}$$

rezultă

$$\Delta_v \gamma_1 = (\Delta_v \delta)_1 = \Delta \delta_A$$

Pentru regiunea 2, observatorul aflîndu-se pe rotorul $R_2$, deci $\delta_2$ considerat constant variind numai pe $\delta$ și ținînd seama că:

$$\gamma_2 = \delta_a - \delta$$

rezultă:

$$\Delta \gamma_2 = (\Delta_v \delta_a)_2 - (\Delta_v \delta)_2$$

Dar în sistemul 2:

$$(\Delta_v \delta)_2 \equiv \Delta \delta_B$$

Introducînd rezultatele obținute în relația e se obține:

$$\frac{\Delta(\delta_A - \delta_B - \delta_a - \omega_a t)}{\Delta P} > 0$$

dar

$$\delta_a = \omega_a t$$

Rezultă

$$\frac{\Delta(\delta_A - \delta_B)}{\Delta P} > 0$$

Condiția de stabilitate obținută este aceeași ca și în cazul a două mașini sincrone. Ea exprima o relația numai între deplasările virtuale ale unghiului $\delta$ și variația puterii P.

Prin secționarea sistemului în nodul m, și prin aplicarea deplasărilor virtuale, în operațiile de derivare, funcțiile

$$P_1 = \varnothing_1(\gamma_1, u) \qquad P_2 = \varnothing_2(\gamma_2, u)$$
$$Q_1 = \psi(\gamma_1, u) \qquad Q_2 = \psi_2(\delta, u)$$

pot fi considerate numai funcții de variabilele $\delta$ și U.

Deci în ipotezele arătate mai sus, se pot scrie:

$$F_1 = \varnothing(\delta; U) \qquad P_2 = \varnothing_2(\delta; U)$$
$$Q_1 = \psi(\delta; U) \qquad Q_2 = \psi(\delta; U)$$

La o creștere a lui $\Delta P$ rezultă:

$$\Delta P_1 = \frac{\partial \varnothing_1}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \varnothing_1}{\partial \delta}\Delta \delta_A$$

$$\Delta Q_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \psi_1}{\partial \delta}\Delta \delta_A$$

și (f)

$$\Delta P_2 = \frac{\partial \varnothing_2}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \varnothing_2}{\partial \delta}\Delta \delta_B$$

și

$$\Delta Q_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \psi_2}{\partial \delta}\Delta \delta_B$$

notînd

$$a_1 = \frac{\partial \varnothing_1}{\partial u};\ b_1 = \frac{\partial \varnothing_1}{\partial \delta};\ c_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial u};\ d_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial \delta}$$

$$a_2 = \frac{\partial \varnothing_2}{\partial u};\ b_2 = \frac{\partial \varnothing_2}{\partial \delta};\ c_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial u};\ d_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial \delta}$$

înlocuind și ținînd seama că în nodul m.

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P$$

și

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$$

rezultă:

$$\left.\begin{aligned}\Delta P_1 = \Delta P &= a_1 \Delta u + b_1 \Delta \delta_A \\ \Delta P_2 = \Delta P &= a_2 \Delta u + b_2 \Delta \delta_A\end{aligned}\right\} (g)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta Q_1 = \Delta Q &= c_1 \Delta u + d_1 \Delta \delta_B \\ \Delta Q_2 = \Delta Q &= c_2 \Delta u + d_2 \Delta \delta_B\end{aligned}\right\} (h)$$

scăzînd ecuațiile $h$ se obține sistemul

$$\left.\begin{aligned}\Delta P &= a_1 \Delta u + b_1 \Delta \delta_A \\ \Delta P &= a_2 \Delta u + b_2 \Delta \delta_B \\ O &= (c_1 - c_2)\Delta u + d_1 \Delta \delta_A - d_2 \Delta \delta_B\end{aligned}\right\} i$$

Rezolvînd sistemul de ecuații se obține

$$\Delta\delta_A - \Delta\delta_B = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ c_1 - c_2 & d_1 - d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix}} \cdot \Delta P$$

unde

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

Înlocuind în condiția de stabilitate se capătă relația

$$\frac{\Delta\delta_A - \Delta\delta_B}{\Delta P} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ c_1 - c_2 & d_1 - d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix}} = \frac{F}{E} > 0$$

unde

$$F = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ c_1 - c_2 & d_1 - d_2 \end{vmatrix}$$

$$E = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix}$$

Determinanții F și E pot fi puși sub următoarele forme:
Se consideră din nou ecuațiile (g) și (h)

$$a_1 \Delta u + b_1 \delta_A \Delta = \Delta P_1$$

$$a_2 \Delta u + b_2 \Delta\delta_B = \Delta P_2$$

$$c_1 \Delta u + d_1 \Delta\delta_A = \Delta Q_1$$

$$c_2 \Delta u + d_2 \Delta\delta_B = \Delta Q_2$$

Fie ca

$$\Delta\delta_A = \Delta\delta_B \text{ și } \Delta P_2 = \Delta P_1$$

rezultă:

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\frac{\Delta\delta_A}{\Delta u} = 0$$

$$(c_1 - c_2) + (d_1 - d_2)\frac{\Delta\delta_A}{\Delta u} = \left[\frac{\Delta Q_1}{\Delta u} - \frac{\Delta Q_2}{\Delta u}\right] \Delta\delta_A = \Delta\delta_B$$

Eliminînd pe $\frac{\Delta \delta_A}{\Delta u}$, rezultă:

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_1 & b_1 - b_2 \\ c_1 - c_2 & d_1 - d_2 \end{vmatrix} = (b_1 - b_2)\left[\frac{\Delta Q_2}{\Delta u} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta u}\right] \Delta \delta_A = \Delta \delta_{--}$$

Deci

$$F = (b_1 - b_2) \cdot \left[\frac{\Delta Q_2}{\Delta u} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta u}\right] \Delta \delta_A = \Delta \delta_B .$$

Pentru a-l determina pe E presupunem că

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 = 0$$

rezultă:

$$a_1 \Delta u + b_1 \Delta \delta_A = 0$$

$$a_2 \Delta u + b_2 \Delta \delta_B = 0$$

$$\Delta Q_1 = c_1 \Delta u + d_1 \Delta \delta_A$$

$$\Delta Q_2 = c_2 \Delta u + d_2 \Delta \delta_B$$

Eliminînd pe $\frac{\Delta \delta_A}{\Delta u}$ şi $\frac{\Delta \delta_B}{\Delta u}$ rezultă:

$$\left[\frac{\Delta Q_2}{\Delta u} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta u}\right] \Delta P = 0 = -\frac{1}{b_1 b_2} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix}$$

Deci

$$E = -b_1 b_2 \left[\frac{\Delta Q_2}{\Delta u} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta u}\right] \Delta P = 0$$

Înlocuind în condiţia de stabilitate se obţine:

$$\frac{b_2 - b_1}{b_1 b_2} \cdot \frac{\left[\frac{\Delta Q_2}{\Delta u} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta u}\right] \Delta \delta_A = \Delta \delta_B}{\left[\frac{\Delta Q_2}{\Delta u} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta u}\right] \Delta P = 0} > 0$$

Cu observaţia că expresia $\Delta \delta_A = \Delta \delta_B$ exprimă faptul fizic că $\Delta(\gamma_1 + \gamma_2) = 0$ sau $\Delta \gamma$ total = O, deci că unghiul dintre rotoarele $R_1$ şi $R_2$ rămîne constant, expresia obţinută mai sus se poate scrie:

$$\frac{b_2 - b_1}{b_1 b_2} \cdot \frac{\left[\frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_2} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right] \Delta \gamma \text{ total} = 0}{\left[\frac{\Delta U}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right] \Delta P = 0} > 0$$

Formula de mai sus, formulă ce s-a obținut plecîndu-se de la criteriul $\frac{dP}{d\delta}$, conține patru factori; dintre aceștia, factorii:

$$\left[\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right]_{\Delta\gamma \text{ total}} = 0 \quad \text{și}$$

$$\left[\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right]_{\Delta P = 0}$$

conțin derivatele puterii reactive dintr-un nod m al sistemului în raport cu tensiunea U din acel nod.

Primul termen este derivata $\frac{\Delta Q}{\Delta U}$ în ipoteza că unghiul dintre rotoarele $R_1$ și $R_2$ nu rariază, iar al doilea termen este derivata $\frac{\Delta Q}{\Delta U}$ în ipoteză că puterea activă rămîne constantă. Acest ultim termen este tocmai criteriul cunoscut sub denumirea de $\frac{dQ}{dU}$.

Rezultă de aici că criteriul $\frac{dQ}{dU}$ conduce la aceleași rezultate în studiul stabilității statice ca și criteriul $\frac{dP}{d\delta}$, numai dacă termenul

$$\frac{b_2 - b_1}{b_2\, b_1}\left[\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right]_{\Delta\gamma \text{ total}} = 0$$

este pozitiv.

Ori, în cele mai multe cazuri pe care le ridică problemele din practica curentă de exploatare și proiectare acest termen este pozitiv și deci putem conchide că pentru cele mai frecvente cazuri din practică cele două criterii

$$\frac{dP}{d\delta} \text{ și } \frac{dQ}{dU} \text{ coincid}$$

Pentru precizare se vor studia două exemple; stabilitatea statică a unui grup compus din generator sincron și motor sincron și a unui grup compus din generator sincron și motor asincron.

Exemplul I :

Fie două mașini sincrone, un generator și un motor

$$\vec{S}_1 = P_1 + jQ_1$$

$$\vec{S}_2 = P_2 + jQ_2$$

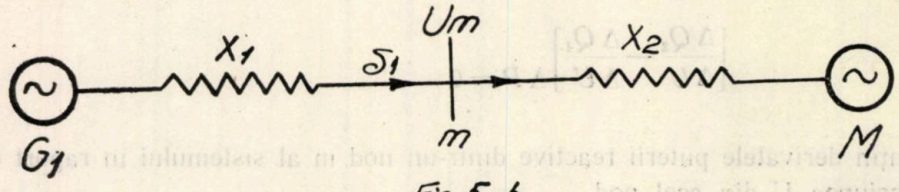



Fig. 5-b.

unde

$$P_1 = \frac{E_1 U}{X_1} \sin \gamma_1 \qquad P_2 = \frac{UE_2}{X_2} \sin \gamma_2$$

$$Q_1 = \frac{E_1 U}{X_1} \cos \gamma_1 - \frac{U^2}{X_1} \qquad Q_2 = \frac{U^2}{X_2} - \frac{U \cdot_2}{X_2} \cos \gamma_2$$

Pentru ca aceste două mașini să fie static stabil trebuie ca

$$\frac{F}{E} > 0$$

sau

$$\frac{b_2 - b_1}{b_2\, b_1} \frac{\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right) \Delta \delta_A = \Delta \delta_B}{\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right) \Delta P =} > 0$$

unde

$$b_1 = \left(\frac{\partial P_1}{\partial \delta}\right)_{\delta_1 = \text{cst}} = \frac{\partial P_1}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial \delta_A} = \frac{E_1 U}{X_1} \cos \gamma_1 > 0 \quad (\gamma_1 < 90^0)$$

$$\gamma_1 = \delta - \delta_1 \; ; \; \frac{\partial \gamma_1}{\partial \delta_A} = 1$$

Deci

$$b_1 > 0$$

$$b_2 = \left(\frac{\partial P_2}{\partial \delta}\right)_{\delta_2 = \text{cst}} = \frac{\partial P_2}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \delta_A} = -\frac{E_2 U}{X_2} \cos \gamma_2 < 0 \quad (\gamma_2 < 90^0)$$

$$b_2 < 0$$

$$\gamma_2 = \delta_2 - \delta \; ; \; \frac{\partial \gamma_2}{\partial \delta_A} = -1$$

Deci

$$b_2 - b_1 < 0$$

$$b_2\, b_1 < 0$$

și

$$\frac{b_2 - b_1}{b_2\, b_1} > 0$$

Să analizăm expresia:

$$\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta u} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right)_{\Delta\delta_A = \Delta\delta_B}$$

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta U} = \frac{E_1}{X_1}\cos\gamma_1 - \frac{2U}{X_1} - \frac{E_1 U}{X_1}\sin\gamma_1 \frac{\Delta\gamma_1}{\Delta U}$$

Ținînd seama că

$$\Delta\gamma_1 = \Delta\delta_A$$

Înlocuind, se obține

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta U} = \frac{E_1}{X_1}\cos\gamma_1 - \frac{2U}{X_1} - \frac{E_1 U}{X_1}\sin\gamma_1 \frac{\Delta\delta_A}{\Delta U}$$

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} = \frac{2U}{X_2} - \frac{E_2}{X_2}\cos\gamma_2 - \frac{E_2 U}{X_2}\sin\gamma_2 \frac{\Delta\gamma_2}{\Delta U}$$

Ținînd seama că

$$\Delta\gamma_2 = -\Delta\delta_B$$

și

$$\Delta\delta_B = \Delta\delta_A$$

rezultă:

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} = \frac{2U}{X_2} - \frac{E_2}{X_2}\cos\gamma_2 - \frac{E_2}{X_2}\sin\gamma_2 \frac{\Delta\delta_A}{\Delta U}$$

știind că la echilibru:

$Q_2 = Q_1$, făcîndu-se înlocuirile și reducerile respective se obține:

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U} = U\left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}\right) + \left(\frac{E_1 U}{X_1}\sin\gamma_1 - \frac{E_2 U}{X_2}\sin\gamma_2\right)\frac{\Delta\delta}{\Delta U}$$

Dar

$$\frac{E_1 U}{X_1}\sin\gamma_1 = \frac{E_2 U}{X_2}\sin\gamma_2$$

După reducerea termenilor se obține expresia:

$$U\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}\right)=\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U}-\frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right)_{\Delta\delta_A=\Delta\delta_B}$$

În ipoteză că liniile nu au capacități transversale, cantitatea

$$U\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}\right)>0$$

Deci expresia

$$\frac{b_2-b_1}{b_2 b_1}\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U}-\frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right)_{\Delta\delta_A=\Delta\delta_B}>0$$

Urmează ca termenul

$\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U}-\frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right)_{\Delta P\equiv 0}$ să arate dacă fenomenul este stabil sau nu

Pentru ca fenomenul să fie stabil trebuie ca:

$$\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U}-\frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right)_{\Delta P\equiv 0}>0$$

Făcîndu-se colculele corespunzătoare, rezultă că acest termen este egal cu:

$$\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U}-\frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right)_{\Delta P\equiv 0}=U\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}\right)+$$

$$\frac{E_1 U}{X_1}\cdot\sin\gamma_1\frac{\Delta\delta_A}{\Delta U}-\frac{E_2 U}{X_2}\sin\gamma_2\frac{\Delta\delta_B}{\Delta U}$$

Din relațiile

$$\Delta P=a_1\Delta U+b_1\Delta\delta_A=0$$

și

$$\Delta P=a_2\Delta A+b_2\Delta\delta_B=0$$

se obține

$$\frac{\Delta\delta_A}{\Delta U}=-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{\frac{\partial P_1}{\partial U}}{\frac{\partial P_1}{\partial\delta}}=-\frac{1}{U}\operatorname{tg}\gamma_1$$

Făcîndu-se înlocuirile, se obține:

$$\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U}-\frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right)_{\Delta P=0}=U\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}\right)-\left(\frac{E_1}{X_1}\sin\gamma_1\operatorname{tg}\gamma_1+\frac{E_2}{X_2}\sin\gamma_2\operatorname{tg}\gamma_2\right)$$

Condiția de stabilitate impune ca:

$$U\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}\right)>\frac{E_1}{X_1}\sin\gamma_1\operatorname{tg}\gamma_1+\frac{E_2}{X_2}\sin\gamma_2\operatorname{tg}\gamma_2$$

Utilizîndu-se diagrama circulară, condiția de mai sus, capătă următoarea interpretare:

Se consideră punctul m de pe diagrama cercului, — odată punctul m privit ca consumator în regiunea 1-a și apoi punctul m privit ca generator în regiunea 2-a —, rezultă diagramele de mai jos:

Pentru regiunea 1-a:

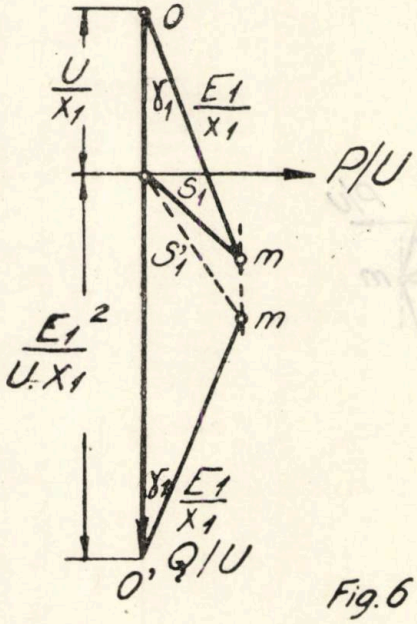



Fig. 6

Pentru regiunea 2-a:

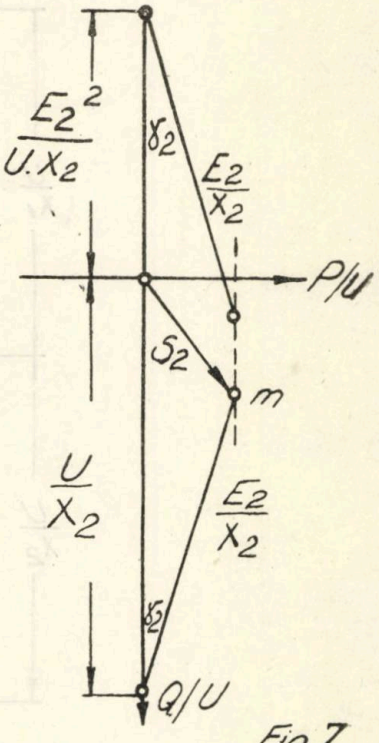



Fig. 7

Unind cele două diagrame se obține fig. 8.

Din figura 8 rezultă că

$$\overline{\alpha\beta}=U\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$$

$$\overline{Pm}\top\overline{\beta m}$$

$$\overline{Qm}\top\overline{\alpha m}$$

$$\overline{QN}=\frac{E_1}{X_1}\sin\gamma_1\cdot\operatorname{tg}\gamma_1;$$

$$\overline{NP}=\frac{E_2}{X_2}\sin\gamma_2\cdot\operatorname{tg}\gamma_2$$

Pentru a avea stabilitate, este necesar şi suficient ca

$$\overline{\alpha\beta} > \overline{PQ}$$

Acest lucru are loc întotdeauna cînd unghiul $a\,m\,\beta > 90^0$

Asta înseamnă că:

$$\gamma_1 + \gamma_2 < 90^0$$

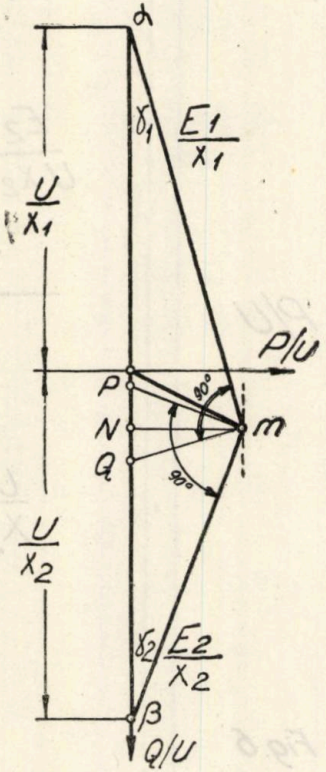



Fig. 8.

*Exemplul II:*

Stabilitatea unui grup generator sincron şi motor asincron:

Aplicăm criteriul

$$\frac{b_2 - b_1}{b_2\, b_1} \frac{\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right) \Delta\delta_A = \Delta\delta_B}{\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta u} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta u}\right) \Delta P \equiv 0}$$

În exemplul precedent s-a arătat că

$$b_1 > 0$$

și că

$$b_2 = \left(\frac{\partial P_2}{\partial \delta}\right)_{\delta_2 = \text{cst}}$$

A spune că $\delta$ crește în regiunea 2, este ca și cum U se deplasează spre $R_2$, semi-axă legată de rotorul mașinei asinrcone, altfel spus $R_2$ se deplasează spre U, deci $R_2$ accelerează deci alunecarea s, descrșete, deci

$$b_2 = \left(\frac{\partial P_2}{\partial \delta}\right)_{\delta_2 = \text{cst}} = -\frac{\partial P_2}{\partial s}$$

Motorul funcționînd în domeniul stabil $\frac{\partial P_2}{\partial s}$ este pozitiv și deci

$$b_2 < 0$$

și termenul

$$\frac{b_2 - b_1}{b_2\, b_1} > 0$$

Calculul termenului

$$\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right) \Delta \delta_A = \Delta \delta_B$$

Notînd

$Q_2 = K\ U^2$

(unde K = f(s) și se presupune constant în jurul unei alunecări apropiate de cea care exista înainte de apariția perturbării).

Și ținînd seamă că $Q_1 = Q_2$ făcîndu-se operațiile de derivare se obține:

$$\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right) = \frac{E_1 U}{X_1} \sin \gamma_1 \frac{\Delta \delta_A}{\Delta U} + \frac{E_1}{X_1} \cos \gamma_1$$

Ținînd seama de condițiile:

$$a_1 \Delta U + b_1 \Delta \delta_A = \Delta P$$
$$a_2 \Delta U + b_2 \Delta \delta_A = \Delta P$$

rezultă că:

$$\frac{\Delta \delta_A}{\Delta U} = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

Unde :

$$a_1 = \frac{\partial P_1}{\partial U} = \frac{E_1}{X_1} \sin \gamma_1 = \frac{P_1}{U}$$

$$a_2 = \frac{\partial P_2}{\partial U} = 2K - U \cong \frac{2P_2}{U}$$

Dar

$$P_2 = P_1$$

deci

$a_1 - a_2 = -P_1 < O$

$b_2 - b_1$ s-a arătat că este o cantitate negativă rezultă că

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_2} > 0$$

Deci stabilitatea va fi hotărîtă de factorul $\left(\frac{\Delta Q_2}{\Delta U} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}\right)_{\Delta P = 0} > 0$ care este cunoscut sub numele de criteriul $\frac{\Delta Q}{\Delta U}$

*Catedra de Centrale, Reţele şi Sisteme Electrice*
*Inst. Polit. Bucureşti*

## К ВОПРОСУ О КРИТЕРИЯХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРАКТИКЕ ДЛЯ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

(Краткое содержание)

Настоящая работа ставит своей целью углубить физическую сторону практических критериев оценки статической устойчивости электроэнергетических систем $\frac{\partial P}{\partial \delta}$ и $\frac{\partial Q}{\partial u}$ и вывести на основе анализа физического явления математическое соотношение, связывающее эти два критерия. Мы исследовали электрическую систему, имеющую $n$ узлов и прелположили, что характерные параметры : активная и реактивная мощности, проходящие через узел $m$, напряжение и частоту, а также фракции связи указанных параметров в отношении определенного узла $m$—нам известны,

Мы предположили также, что система может быть разделена на две области, не имеющих другого соприкосновения, кроме узла $m$. Исходя из критерия малых колебаний, мы ввели в наше исследование относительные перемещения и на основе последних мы считали перемещения вектора напряжения в узле $m$ фиктивными и не реальными, Предполагая последовательно, что роторы электрических машин обоих областей неподвижны его фиктивные движения названы в тексте „возможными перемещениями".

Результатом этого (анализа) иследовании является местный критерий, зависящий только от связанных между собой функций электрических параметров узла $m$.

## A PROPOS DES CRYTÉRIUMS UTILISÉS EN PRATIQUE POUR LE CALCUL DE LA STABILITÉ STATIQUE.

(Résumée)

Cette étude a pour but d'approfondir l'aspect physique des crytériums pratiques d'estimation de la stabilité statique des systèmes électro-énergétiques, $\frac{\partial P}{\partial \delta}$ et $\frac{\partial Q}{\partial u}$ et de déduire à l'aide de l'analyse du phénomène physique, l'expression mathématique qui relie ces deux crytériums.

Nous avons considéré un système électrique ayant $n$ noeuds et nous avons présumé que les paramètres caractéristiques: la puissance active et la puissance réactive traversant le noeud $m$, la tension et la fréquence, ainsi que les fonctions de liaison des paramètres nommés, relatifs à un certain noeud $m$, sont connus.

Nous avons supposé que le système peut être divisé en deux regions n'ayant d'autre connection que le noeud $m$.

En partant du crytérium des petites oscillations, nous avons introduit dans notre étude des déplacements relatifs et à l'aide de ceux-ci nous sommes arrivés à considérer des déplacements fictifs non réels, du vecteur de tension dans le noeud $m$ — en supposant successivement que les roteurs des machines électriques des deux régions sont fixés; ces déplacement fictifs ont été denommés dans le texte „déplacements virtuels".

Le résultat de cette analyse a été un crytérium local dépendant seulement des fonctions reliant entre eux les paramètres électriques du noued $m$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

## TELEFONIE-TELEGRAFIE

621.395.641.2

# SISTEMUL DIRECŢIONAL AL REPETORULUI VOCAL PE DOUĂ FIRE

de S. CONDREA

## 1. INTRODUCERE

În telefonia de mare distanţă circuitele telefonice de pe liniile aeriene sau în cablu sînt în general prevăzute cu amplificatori, pentru asigurarea unui echivalent de transmisiune acceptabil. Pentru convorbirile cu curenţi de frecvenţă vocală se întrebuinţează repetori pe 2 fire, şi uneori, în cazul circuitelor de mare lungime, repetori de 4 fire. Repetorul vocal pe 2 fire trebuie să amplifice curenţii telefonici în ambele sensuri de transmisiune, fără să producă perturbaţii prin amorsare de oscilaţii şi fără să provoace distorsiuni ale semnalului transmis.

Tipurile obişnuite de repertori vocali pe 2 fire folosesc în acest scop sisteme diferenţiale. În fig. 1 este arătată schema bloc a unui repetor pe 2 fire (tip 22), cu elementele esenţiale pentru asigurarea funcţionării

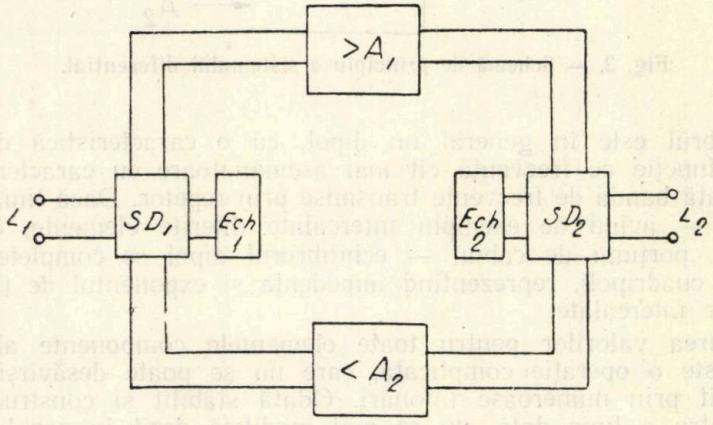



Fig 1. — Schema bloc a repetorului vocal pe 2 fire.

bilaterale. În $L_1$ şi $L_2$ sînt cele două linii între care este intercalat repetorul. $A_1$ este amplificatorul pentru sensul de transmisiune de la $L_1$ la $L_2$ şi $A_2$ pentru sensul invers, de la $L_2$ la $L_1$. $SD_1$ şi $SD_2$ sînt sistemele diferenţiale, iar $Ech_1$ şi $Ech_2$ sînt echilibrorii respectivi. Fiecare din aceşti echi-

librori reprezintă impedanța liniei pe care o echilibrează, în banda de frecvențe transmisă de repetor.

De obicei sistemul diferențial este format dintr-un transformator diferențial echilibrat, conectat ca în fig. 2.

Transformatorul diferențial are trei înfățișări, — două conectate în linie (1—3 și 2—4), împărțite pe ambele fire ale circuitului pentru a nu strica echilibrul acestuia, și a treia (înfășurarea 5) conectată la ieșirea amplificatorului $A_2$. Cele două înfășurări din linie (spre linie și spre echilibror) sînt identice, transformatorul diferențial fiind de tip simetric. Caracteristicile transformatorului diferențial trebuie să fie cît mai aproape de ale unui transformator ideal, pentru a nu introduce distorsiuni și a ușura echilibrarea.

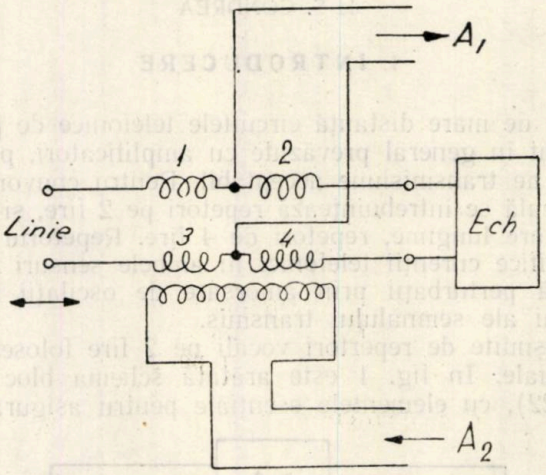



Fig. 2, — Schemă de principiu a sistemului diferențial.

Echilibrul este în general un dipol, cu o caracteristică de impedanță în funcție de frecvență cît mai asemănătoare cu caracteristica liniei, în toată banda de frecvențe transmise prin repetor. Dacă linia nu este omogenă, — avînd de exemplu intercalate diferite elemente, ca filtre, translatori, porțiuni de cablu, — echilibrorul dipol se completează prin echilibrori cuadripoli, reprezentînd impedența și exponentul de transfer a elementelor intercalate.

Stabilirea valorilor pentru toate elementele componente ale echilibrorului este o operație complicată, care nu se poate desăvîrși, în general, decît prin numeroase tatonări. Odată stabilit și construit echilibrorul pentru o linie dată, nu se mai modifică decît în cazul cînd se schimbă unele caracteristici ale ei sau se intercalează alte elemente în linie. Stabilitatea amplificării însă nu este asigurată complect, deoarece impedanța liniei variază în timp, cu condițiile atmosferice (la liniile aerene) și mai ales cu condițiile de exploatare. Diferitele comutații ce se efectuiază la extremitățile circuitului, în centrale (conectare, deconectare, tranzit, apel) produc variația impedenței circuitului, care va devia mai mult sau mai puțin față de impedența invariabilă a echilibrorului. Pe de altă parte, interacțiunea repetorilor înșirați pe aceeași linie provoacă

reacții între repetori, ceeace micșorează stabilitatea amplificării și impune reducerea cîștigului cu cît numărul repetorilor este mai mare.

Avînd în vedere aceste neajunsuri, s-au studiat condițiile generale necesare pentru obținerea stabilității de amplificare a repetorilor pe 2 fire și posibilitatea de a realiza separația celor două sensuri de transmisie, prin alte mijloace decît cele cunoscute. Aceste mijloace se pot clasifica în două categorii:

a) sisteme direcționale cu elemente pasive și liniare,
b) sisteme direcționale cu elemente active și neliniare.

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de prima categorie.

## 2. SISTEMUL DIRECȚIONAL

În schema bloc din fig. 1, la fiecare din cele două intrări ale repetorului este arătat un sistem direcțional, al cărui rost este să dirijeze transmisiunea dinspre linia 1 (respectiv 2) spre amplificatorul 1 (respecitv 2), iar energia amplificată de amplicitorul $A_1$ ($A_2$) spre linia 2 (1), și să împiedice trecerea energiei de la un amplificator la altul, ceea ce ar produce curenți de circulație și amorsare de oscilații.

În fig. 3 este reprezentat separat un sistem direcțional de tip obișnuit, adică bazat pe transformatorul diferențial și echilibrarea impedanțelor de la bornele opuse. Acest sistem direcțional este, după cum se vede, un octopol, sau mai corect un „cuadriport", adică o rețea cu patru porți de acces: 1-1′, 2-2′, 3-3′ și 4-4′. La aceste porți se conectează respectiv impedanța liniei $Z_L$ impedanța echilibrorului $Z_E$ impedanța spre circuitul de grilă $Z_G$ a amplificatorului $A_1$ și impedanța spre circuitul de placă $Zp$ a amplificatorului $A_2$.

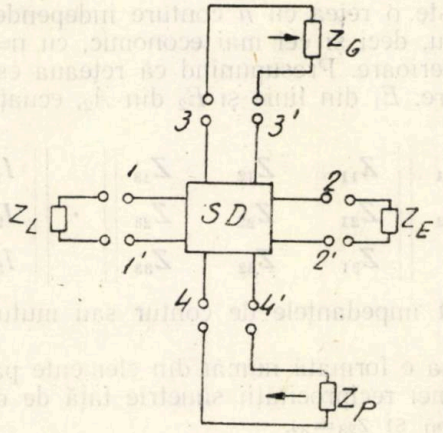



Fig. 3. — Sistemul direcțional.

Pentru funcționarea corectă a sistemului trebuie, între altele, ca transmisiunea să fie liberă de la poarta 1-1′ spre 3-3′ și de la 4-4′ la 1-1′, și să fie interzisă de la poarta 4-4′ la 3-3′. Din punct de vedere al dirijării curenților în sistemul direcțional sînt esențiale numai intrările 1-1′

pentru linie, 3-3′ pentru circuitul de grilă al amplificatorului $A_1$ și 4-4′ pentru circuitul de placă al amplificatorului $A_2$. Echilibrorul sau un element echivalent, conectat la bornele 2-2′, se poate considera înglobat în schema sistemului direcțional, care devine astfel un *hexapol,* sau mai corect un „triport", cu borne spre linie, grilă și placă (fig. 4a).

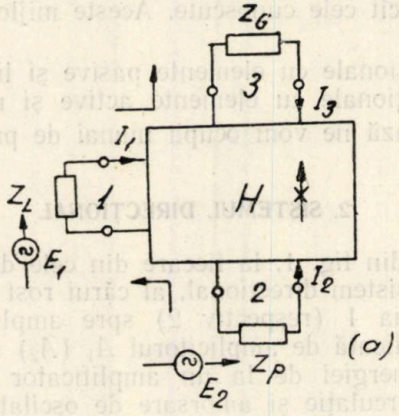



Fig. 4. — Hexapolul direcțional.

Studiul acestui sistem direcțional se poate face în diferite moduri, fie cu ajutorul formulelor lui Kirchhoff sau ale lui Maxwell (pentru conture), fie cu ajutorul teoriei generale a cuadripolilor.

### 3. ANALIZA SISTEMULUI DIRECȚIONAL PRIN ECUAȚIILE DE CONTUR

Hexapolul *H* este o rețea cu *n* conture independente. Să presupunem cazul cel mai simplu, deci și cel mai economic, cu n=3 conture, care cuprind și bornele exterioare. Presupunînd că rețeaua este antrenată de tensiunile electromotoare. $E_1$ din linie și $E_2$ din $A_2$, ecuațiile de contur, scrise matricial, vor fi :

$$\begin{Vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

unde $Z_{11}$, $Z_{12}$,... sînt impedanțele de contur sau mutuale ale rețelei cu 3 ochiuri.

Deoarece rețeaua e formată numai din elemente pasive, obișnuite, vom avea conform teoremei reciprocității simetrie față de diagonala principală, adică $z_{12}=z_{21}$, $z_{13}=z_{31}$ și $z_{23}=z_{32}$.

Pentru ca sensul de transmisie de la $Z_p$ (2) la $Z_g$ (3) să fie interzis, trebuie ca admitanța de transfer $Y_{23}=I_3/E_2$ a rețelei să fie egală cu zero, sau impedanța de transfer $Z_{23}=E_2/I_3$ să fie infinită.

Impedanța de transfer se poate scrie în funcție de determinantul și minorul coeficienților z,

$$Z_{23}=\frac{E_2}{I_3}=\frac{\Delta}{\Delta_{23}}.$$

Pentru ca $Z_{23}$ să fie infinit, adică să nu treacă nimic din poarta 2 în poarta 3, trebuie anulat numitorul

$$\Delta_{23} = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{13} & z_{23} \end{vmatrix} = z_{11} z_{23} - z_{12} z_{13} = 0 \qquad (2)$$

Impedanțele de contur $z_{11}$, $z_{22}$ $z_{33}$ conțin și impedanțele exterioare. Astfel $z_{11} = z^0_{11} + zL$ unde $z^0_{11}$ este impedența conturului 1 cu bornele externe în scurtcircuit.

Pentru a asigura transmisiunea permisă, trebuie ca impedanțele de transfer $Z_{13}$ și $Z_{12}$ să fie astfel încît curenții $I_3$ și $I_2$ să fie egali cu $I_1/2$ (echipartiția energiei). Această condiție se scrie:

$$Z_{12} = E_1/I_3 = \frac{\Delta}{\Delta_{13}} = Z_{12} = \frac{\Delta}{\Delta_{12}} = 2E_1/I_1 = 2\frac{\Delta}{\Delta_{11}}$$

sau

$$z_{21} z_{23} - z_{22} z_{13} = z_{12} z_{33} - z_{23} z_{13} = \frac{1}{2}(z_{22} z_{23} - z^2_{23}) \qquad (3)$$

Condiția (2) este îndeplinită dacă un rînd (o coloană) a determinantului este o combinație liniară (de pildă proporționalitate) a celuilalt. Astfel $\Delta_{23} = 0$ dacă

$$z_{11} = k z_{12} = z^0_{11} + Z_L \,, \quad z_{13} = k z_{23} \qquad (4)$$

Cele 3 ecuații din (3) și (4) determină impedanțele mutuale $z_{12}$, $z_{13}$ și $z_{23}$, date fiind impedanțele de contur $z_{11}$, $z_{22}$ și $z_{23}$. Se vede din (4) că aceste relații implică și necesitatea unui echilibror pentru impedanța linie ($k z_{12} = z^0_{11} + Z_L$), care nu se poate evita în cazul sistemelor direcționale pasive.

## 4. TRANSFORMAREA LINIARĂ A MATRICEI SISTEMULUI DIRECȚIONAL

În loc de a se presupune schema cunoscută, cu elementele componente $z_{11}$, $z_{12}$..., se poate lua hexapolul cu cele 3 perechi de borne de acces și cu parametrii săi generali. Astfel, matricea de admitanță a hexapolului considerat triport (fig. 4 a) va fi

$$\|Y\| = \begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} \end{Vmatrix}, \qquad (5)$$

unde $Y_{11}$, $Y_{12}$,... sînt respectiv admitanța de scurtcircuit la poarta 1, admitanța de transfer între poarta 1 și 2, .... etc. [1].

Se poate impune condiția ca admitanța de transfer $Y_{23}$ să fie zero într-o adumită bandă de frecvențe, iar admitanțele de transfer $Y_{12}$ și $Y_{13}$ să fie diferite de zero și maxime posibile, în aceeaș bandă de frecvențe.

Condiția $Y_{23}=0$ se poate realiza printr-o transformare liniară a matricei (5). În acest scop se înmulțește rîndul 3 și coloana 3 cu factorul $Y_{23}/Y_{33}$ și se scade respectiv din rîndul 2 și din coloana 2.

Elementele transformate vor fi:

$$Y'_{3i}=Y_{2i}-Y^2_{23}/Y_{33} \text{ și } Y'_{i3}=Y_{i2}-Y^2_{23}/Y_{33},$$

iar matricea transformată, dacă notăm $n=Y_{23}/Y_{33}$, va fi

$$\|Y'\|=\begin{Vmatrix} Y_{11} & (Y_{12}-nY_{13}) & Y_{13} \\ (Y_{12}-nY_{13}) & (Y_{22}-nY_{23}) & 0 \\ Y_{13} & 0 & Y_{33} \end{Vmatrix}. \quad (6)$$

Raportul $n$ este în general complex, dar dacă $Y_{23}$ și $Y_{33}$ sînt reactanțe pure sau rezistențe, $n$ devine real [2].

Această transformare liniară corespunde în schemă cu introducerea unui *transformator ideal* (fig. 4 (b), în paralel cu 2 și în serie cu 3. Raportul său de transformare este $-n=-Y_{23}/Y_{33}$ (1:-n). Hexapolul $H'$ rămas trebuie să fie astfel ca impedanțele de transfer $Y'_{12}$ și $Y'_{13}$ să permită un transfer maxim de putere.

Admitanțele matricei inițiale $\|Y\|$ și transformate $\|Y'\|$, cuprind și admitanțele terminale $(Y_L, Y_1, Y_q)$ astfel:

$$Y_{11}=Y^0_{11}+Y_L,\ Y_{22}=Y^0_{22}+Y_p,\ Y_{33}=Y^0_{33}+Y_G, \quad (7)$$

unde s-a notat prin $Y^0_{ii}$ admitanța de scurtcircuit la poarta i fără terminație.

Prin urmare condițiile ce trebuie să le îndeplinească hexapolul în fig. 4 (b) sînt:

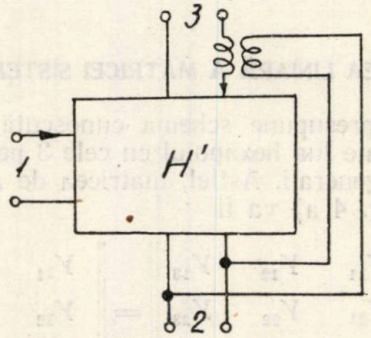



Fig. 4 b.

a) un transformator ideal cu raport $n=Y_{23}/Y_{33}$, determinat de condiția $Y'_{12}=Y_{12}-nY_{13}=Y_{13}=\frac{1}{2}Y_{11}$,

b) admitanțele de intrare trebuie să satisfacă condițiile de adaptare la terminații și anume:

$$Y_{11}Z_{11}^{-1}=Y_L^2,\ Y'_{22}Z'^{-1}_{22}=Y_p^2,\ Y_{33}Z_{33}^{-1}=Y_G^2$$

Din punct de vedere fizic, rostul transformatorului este să aplice la ieșirea 3 o tensiune egală și în opoziție de fază cu tensiunea directă trecută de la 2 la 3 prin $H'$, anulînd-o prin compensare.

## 5. SISTEMUL DIRECȚIONAL CONSIDERAT UN CUADRIPOL COMPUS

Dacă se închide una din porțile tripolului din fig. 4 (a) prin terminația respectivă și se înglobează aceasta în rețeaua interioară, se obține un cuadripol(diport). Astfel, dacă se înglobează terminația $Z_L$ se obține cuadripolul din fig. 5. Pentru a avea proprietățile unui sistem direcțional, trebuie ca puterea de la intrare ($Z_p$) să nu treacă în sarcina $Z_G$ de la ieșire, dar între $Z_P$—$Z_L$ și $Z_L$—$Z_G$ transferul de putere să se facă cu atenuare minimă. Deci cuadripolul C trebuie să fie un filtru „oprește banda" pentru frecvențele efectiv transmise prin repetor.

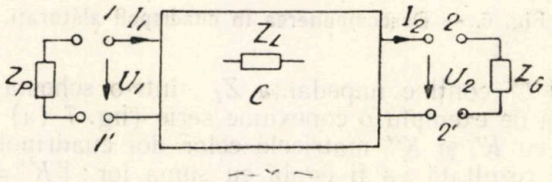



Fig. 5. 3. — Cuadripol compus.

Comportarea unui cuadripol diport se poate defini prin unul din cele 6 sisteme de ecuație, care leagă prin relații liniare, o pereche din valorile electrice măsurate la borne, de cealaltă pereche de valori ($U_1$, $I_1$, $U_2$, $I_2$) [3]. Luînd din aceste 6 sisteme numai cele 4 care definesc transferul reciproc al mărimilor de la o poartă la alta, și însemnînd prin $M_1$ mărimile electrice din primul membru (funcțiile, adică amplitudinile de curent sau de tensiune, considerate dependente) și prin $N_1$ mărimile electrice din membrul al doilea (variabilele, adică amplitudinile de curent sau de tensiune considerate independente), se poate scrie matricea generală

$$\left\| \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \right\| \qquad (8)$$

Elementele matricei $\|K\|$ sînt respectiv:

$K_{11}$ și $K_{22}$ immitanțe la intrare și la ieșire,

$K_{12}$ și $K_{21}$ immitanțe de transfer sau funcții (raporturi) de transfer, de la o poartă la alta [4].

Rețeaua fiind formată din elemente pasive, cuadripolul este „reciproc", iar condiția de oprire a transferului este $K_{12}=K_{21}=0$.

Spre a putea studia și transferul de putere la și de la dipolul $Z_c$ este indicat să-l scoatem din cuadripol. Aceasta se poate face prin descompunerea cuadripolului C în două, astfel ca $Z_c$ să rămînă separat. Des-

compunerea se poate face cu matricala $K$ (8) sau cu matricea $A$ (descompunere în cascadă). Să analizăm descompunerea prin $K$.

În fig. 6 este arătată descompunerea cuadripolului $C$ în doi cuadripoli alăturați, $C'$ și $C''$. Conexiunile la cele două porți se pot face în 4 feluri diferite (direct sau încrucișat, la una sau la ambele porți), după cum se referă la una din cele 4 matrice subînțelese în (8).

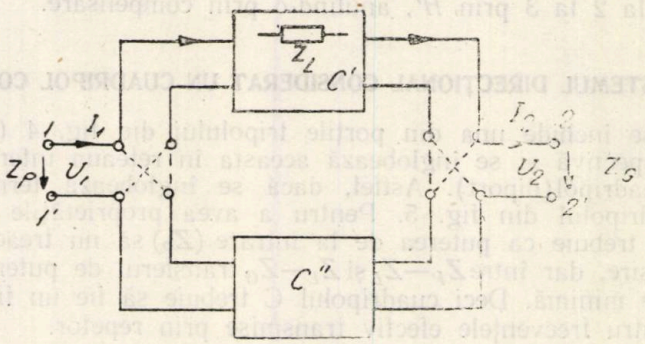



Fig. 6. — Descompunerea în cuadripoli alăturați.

Cuadripolul $C'$ conține impedanța $Z_L$, într-o schemă ce poate fi oricît de simplă, ca de exemplu o conexiune serie (fig. 7 (a) sau paralel (b).

Însemnînd cu $K'$ și $K''$ matricele celor doi cuadripoli componenți $C'$ și $C''$, matricea rezultată va fi egală cu suma lor: $\|K\| = \|K'\| + \|K''\|$, sau explicit

$$\|K\| = \begin{Vmatrix} K'_{11}+K''_{11} & K'_{12}+K''_{12} \\ K'_{12}+K''_{22} & K'_{22}+K''_{22} \end{Vmatrix}, \qquad (10)$$

unde s-a pus $K_{12}=K_{21}$, cuadripolul cu reciprocitate.

Condiția de transfer nul de putere de la o poartă la alta

$$(K_{12}=0) \text{ devine } K'_{12}=-K''_{12}. \qquad (11)$$

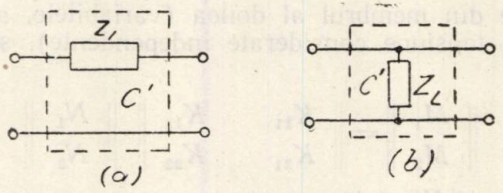



Fig. 7 a și 7 b. — Scheme elementare ale cuadripolului component.

Pentru cazul $C'$ din fig. 7 (a) este mai indicat să se utilizeze matricele de admitanțe:

$$\|K'\| = \begin{Vmatrix} Y_L & -Y_L \\ Y_L & -Y_L \end{Vmatrix} \text{ și } \|Y''\|,$$

iar pentru fig. 7 (b) matricele de impedanțe $\|Z'\|$, $\|Z''\|$.

Condiția (11) devine $Y_L = Y''_{12}$ (schimbarea de semn e datorită sensului convențional al curenților), sau $Y_L = -Y''_{tr}$, unde $Y''_{tr}$ este admitanța de transfer directă. Deoarece pentru cuadripolul $C''$ nu este impusă deocamdată nici o condiție, se poate alege unul tot așa de simplu, $Y_E = Y_L$ (un dipol în serie sau în paralel). În acest caz fig. 6 devine fig. 8, unde egalitatea cu semn opus a celor două admitanțe de tranesfer se realizează cu ajutorul transformatorului ideal de raport — 1:1.

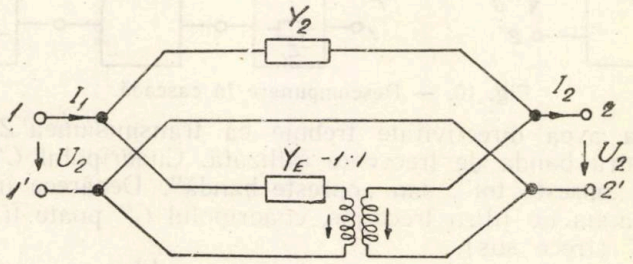



Fig. 8. — Descompunere în paralel.

Se observă că transformatorul ideal are același rol ca cel menționat la punctul 4.

După cum se știe schema din fig. 8 este echivalentă cu oricare din schemele din fig. 9 (unde s-a pus $Z$ în loc de $1/Y$).

Ultima formă (c) este un transformator diferențial, cu impedanța liniei $Z_L$ într-o parte și impedanța echilibrorului $Z_E = Z_L$, în cealaltă parte. Montajul *(b)* are un autotransformator în loc de transformator. Se vede că pe această cale se ajunge în definitiv la sistemul clasic al transformatorului diferențial, cu echilibror.

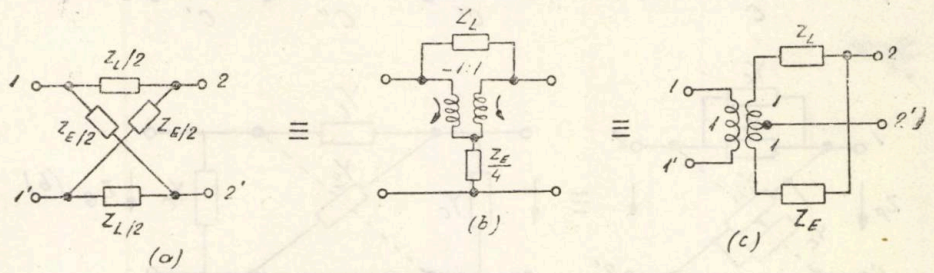



Fig 9. — Scheme echivalente.

Să analizăm acum descompunerea cuadripolului $C$ în cascadă, cu ajutorul matricelor $A$. Pentru a avea simetrie se poate descompune $C$ în trei cuadripoli componenți, ca în fig. 10. Matricial această descompunere are expresia

$$\|A\| = \|A'\| \cdot \|A''\| \cdot \|A'\| \cdot$$

Este evident că sistemul direcțional va trebui să fie realizat sub forma cuadripolului rezultant $C$, deoarece în forma descompusă (b) nu se poate asigura transmisiunea între $Z_L$ (impedanța liniei) și $Z_G$ sau $Z_p$ (cei doi amplificatori). Forma descompusă servește numai pentru alegerea schemei optime pentru $C$.

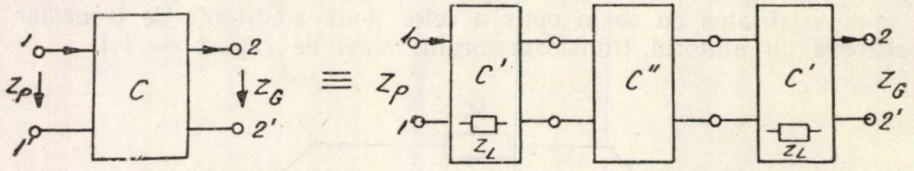



Fig. 10. — Descompunere în cascadă.

Pentru a avea directivitate trebuie ca transmisiunea $Z_p$—$Z_G$ să fie interzisă, pentru banda de frecvențe utilizată. Cuadripolul $C''$ trebuie să fie un filtru „oprește tot", sau „oprește bandă". Deoarece în repetor se găsește totdeauna un filtru trece-jos, cuadripolul $C''$ poate fi și un filtru „oprește jos" (trece sus).

Sistemul direcțional $C$, presupus pentru simplificare simetric, se poate reprezenta sub forma unui cuadripol în $X$. Descompunerea lui în trei cuadripoli în tandem ($C'$, $C''$ și $C'$) se poate face fie prin extragerea unei impedanțe comune $Z_c$ din brațele punții ($Z_a=Z_c+Z_1, Z_b=Z_c+Z_2$), fie prin extragerea unei admitanțe comune $Y_c$ din aceste brațe ($Y_a=Y_c+Y_1, Y_e=Y_c+Y_2$), după cum se vede în fig. 11 ($a$) și ($b$)

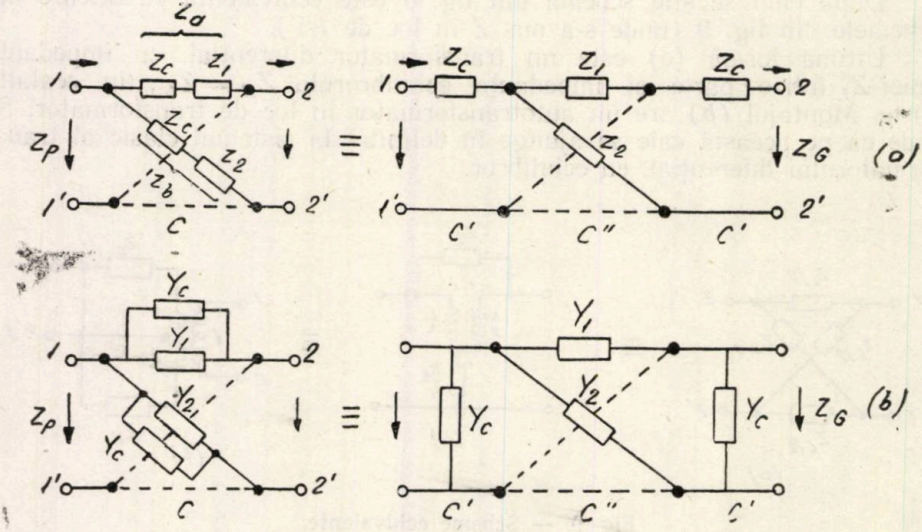



Fig. 11 a și 11 b. — Extragerea impedanțelor sau admitanțelor comune.

Schema în $X$ a cuadripolului $C$ se poate transforma în schema echivalentă cu transformator diferențial (fig. 12), în care numărul impedanțelor componente s-a redus la două (în loc de patru). Avem $Z'_a=2\,Z_a$ și $Z'_b=2\,Z_b$. O schemă analogă se va obține și pentru cazul din fig. 11 (b).

Presupunînd că una din impedanțe, de ex. $Z'_a$, este impedanța liniei. cealaltă impedanță, $Z'_b$, reprezintă echilibrorul liniei. Se vede din schemele

descompuse (fig. 12) că, dacă echilibrorul nu are impedanța egală cu a liniei( $Z'_a \neq Z'_b$) , atenuarea de echilibrare $a_e$, între $Z_P$ și $Z_G$ este dată de atenuarea caudripolului rezidual $C''$. Atenuarea (pe imagini) a acestui cuadripol este dată de

$$cha = ln \left| \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 - Z_2} \right| .$$

Dacă $Z_1 = Z_2$, $a = \infty$ și deci avem echilibraj perfect. Dar $a$ se poate obține mare, și fără egalitatea $Z_1 = Z_2$ la toate frecvențele. Pentru aceasta trebuie ca schema $C''$ să fie a unui filtru cu banda de oprire în zona frecvențelor utile (filtru trece sus).

Prin urmare echilibrarea sistemului diferențial se poate face prin separarea impedanței de echilibrat (a liniei) în două părți, conectate în serie sau în paralel. O parte ($Z_c$ sau $Y_c$) reprezintă o fracțiune regulată a curbei de impedanță (de exemplu impedanța unei linii omogenă), iar restul ($Z_1$, $Z_2$ sau $Y_1$, $Y_2$) reprezintă fracțiunea neregulată suprapusă. Aceasta din urmă se poate realiza fie printr-o metodă de sinteză a dipolilor cu 3 elemente ($R$, $L$, $C$), fie prin tatonări. Egalitatea dintre impedanțele $Z_1$ și $Z_2$ (sau $Z'_1$ și $Z'_2$ din fig. 12) e deajuns să fie asigurată numai pînă la o frecvență ceva mai sus decît frecvența maximă transmisă.

Pentru obținerea unei echilibrări mai bune pe o bandă de frecvențe mai largă (de ex. 300—3400 Hz) se poate utiliza și o separare în domenii de frecvență. În acest scop brațul de echilibror al sistemului diferențial (fig. 13) se bifurcă în două ramuri, la care se conectează două filtre complimentare (unul trece-jos altul trece-sus) și apoi echilibrorii parțiali pentru cele două benzi de frecvență.

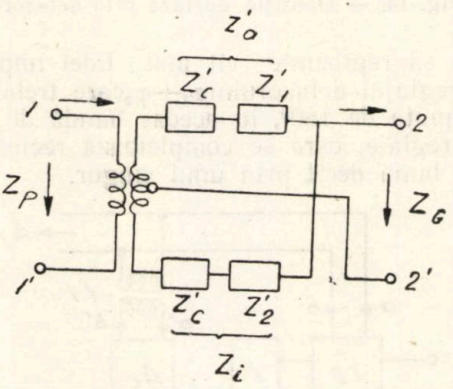



Fig. 12. — Schema echivalentă, cu transformator diferențial.

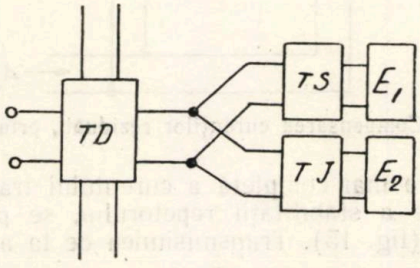



Fig. 13. — Echilibrori dubli pe 2 benzi de frecvențe.

## 6. SISTEM DIRECȚIONAL CU SELECȚIE DE FAZĂ

După cum s-a văzut mai sus sistemul direcțional trebuie să asigure simultan și echipartiția energiei și opoziția de fază a tensiunilor (curenților) din direcția interzisă. Astfel, în fig. 8, cele două ramuri în paralel, transmit puteri egale, datorită echilibrorului $Y_E$ care e presupus că are aceeaș impedanță (admitānța) ca linia $Y_L$. Anularea lor, în sensul interzis (de la circuitul de ieșire al unui amplificator, la circuitul de intrare al celuilalt amplificator), se obține prin transformatorul (ideal) de raport -1:1. Dacă transformatorul nu este ideal, atenuarea nu va fi infinită, ci suficient de mare.

În locul transformatorului se pot întrebuința, pentru obținerea opoziției de fază, corectori de fază, cu defazare de 180° în banda utilă (de 300—3400Hz). În acest caz sistemul direcțional capătă aspectul din fig 14 „Echilibrarea", adică oprirea transmisiei în sensul $Z_P$—$Z_G$ se obține de data aceasta prin două reglaje: 1) reglajul impedenței echilibrorului

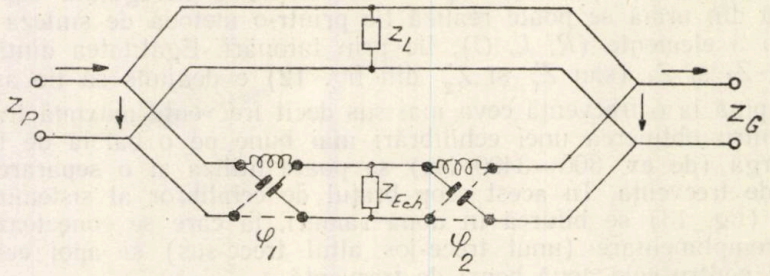



Fig. 14. — Opoziție de fază prin defazori.

$Z_{Ech}$, care trebuie să reprezinte cît mai fidel impedanța liniei $Z_L$, banda utilă, și 2) reglajul defazorului $\varphi_1+\varphi_2$ care trebuie să asigure o defazare cît mai apropiată de 180°, în aceeaș bandă de frecvențe. Este evident că prin două reglaje, care se completează reciproc, se poate obține o „echilibrare" mai bună decît prin unul singur.

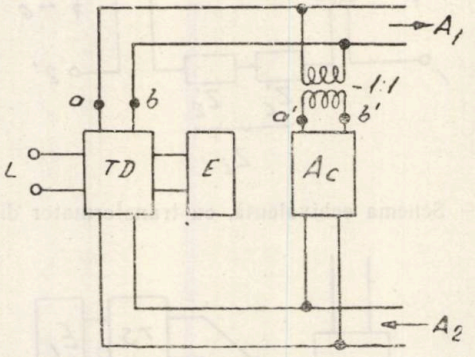



Fig. 15. — Compensarea curenților reziduali, prin atenuator.

Pentru o reducere mai completă a curentului transmis de la $Z_P$ la $Z_G$ deci pentru o mărire a stabilității repetorului, se pot aplica cele două procedee în cascadă (fig. 15). Transmisiunea de la amplificatorul $A_2$ spre

linia $Z_L$ care ar putea provoca instabilitate sau distorsiune prin trecerea în amplificatorul $A_1$, este bifurcată, în transformatorul diferențial $TD$ și în atenuatorul corector $A_c$. Echilibrorul $E_{ch}$ se întocmește după regulile cunoscute, reproducînd cît mai exact impedanța liniei $Z_L$ Atenuatorul corector introduce o atenuare egală cu atenuarea de echilibrare, astfel că la bornele a' b' va apare aceeaș tensiune ca la ab. Transformatorul de raport — 1:1 inversează faza, astfel că energia reziduală, ce a trecut prin transformatorul diferențial echilibrat $TD$, este redusă la minimum.

În loc de atenuator-corector se poate folosi un al doilea transformator diferențial $TD_a$, cu echilibrori în ambele părți. Unul din echilibrori trebuie dereglat puțin, pentru a se obține la prizele mediane aceeaș formă de curent ca în *a*, *b*. În acest caz transformatorul de raport -1:1 poate lipsi, inversiunea de fază făcîndu-se prin încrucișarea firelor la intrarea în $TD_a$ (fig. 16).

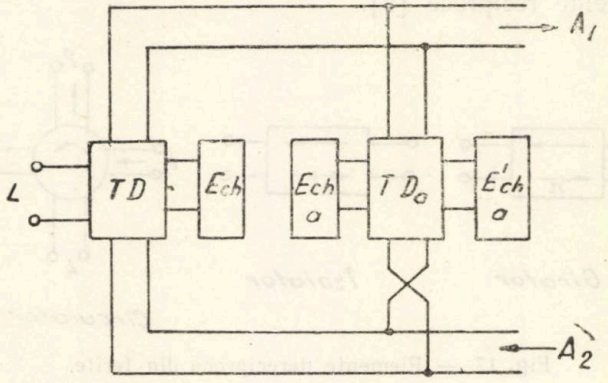



Fig. 16. — Compensarea curenților reziduali prin al doilea transformator diferențial.

## 7. INCHEERE

Realizarea unui sistem direcțional din elemente pasive și liniare, fie cu ajutorul transformatorului diferențial, sau cu inversor de fază, se bazează în principiu pe echipartiția energiei, adică pe existența cîte unui echilibror pentru fiecare parte a liniei. Fără echilibrori nu se poate obține sistem direcțional din elemente pasive și liniare. Soluția cu echilibrori nu e însă o soluție ideală. În primul rînd pentru că nu se pot realiza cu ușurință și în mod economic echilibrori pentru orice fel de linie, mai ales cînd linia nu este perfect omogenă. Apoi, pentru că stabilitatea astfel obținută nu este permanentă, fiind dependentă de condițiile liniei. Acestea pot varia cu starea timpului și cu situația circuitului la capetele lui. Echilibrorul are elemente constante și deci nu poate urmări variațiile de impedanță ale liniei. Aceste variații se pot atenua într-o oarecare măsură, prin intercalarea atenuatorilor de echilibrare, dar stabilitatea nu crește prin aceasta, deoarece concomitent trebuie mărit și cîștigul amplificatorilor, spre a compensa atenuarea introdusă în calea de transmisie.

Pentru realizarea unui sistem direcțional independent de condițiile liniei, ar trebui să existe elemente pasive la care să nu fie valabil principiul reciprocității. Ar trebui găsiți, cu alte cuvinte, cuadripoli pasivi, cu impedanțele de transfer în cele două sensuri ($Z_{12}$ și $Z_{21}$) inegale. Astfel de cuadripoli există de cîțiva ani, dar numai pentru frecvențe super și hyper-înalte. Sînt ghidurile de undă prevăzute în interior cu vergele din *ferită*. Sub acțiunea unui cîmp magnetic, produs de o bobină sau un magnet permanent „ferita'- din interiorul ghidului de undă prezintă efectul Faraday, adică rotește, cu un unghi mai mare sau mai mic, planul de polarizare al undei electromagnetice transmise. Acest fenomen este unidirecțional. Astfel se pot obține *giratori,* adică elemente care produc o defazare de 180° într-un sens de transmisie și 0° în sens opus, *izolatori,* adică elemente care permit transmisia într-un sens și opresc pe cea de sens opus, și *circulatori,* adică elemente care transmit numai de la o poartă la cea alăturată, în sens circulator. În fig 17 sînt arătate schematic aceste trei feluri de elemente reciproce [5].

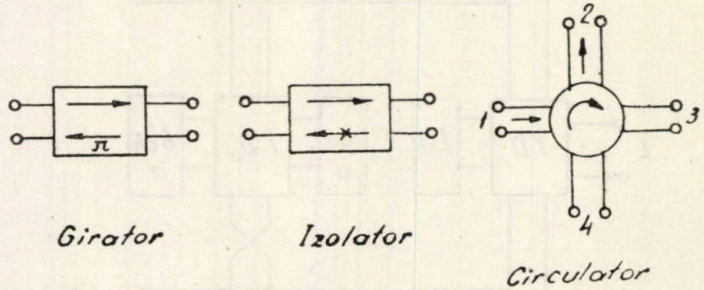



Fig. 17. — Elemente nereciproce din ferite.

Circulatorul este elementul pasiv ideal pentru un sistem direcțional. Energia intrată în 1 iese numai prin 2, intrată în 2 iese numai prin 3, intrată în 3 iese numai prin 4 și intrată în 4 iese numai prin 1. Proprietățile direcționale ale feritei sînt datorite structurii magnetice interne a materialului și se manifestă la frecvențe de cîteva mii sau zeci de mii de megahertz. Dacă s-ar găsi structuri cu astfel de proprietăți la frecvențe joase, s-ar putea realiza repetori pe 2 fire stabili, independent de variațiile impedanței liniei.

Pînă atunci, stabilitatea absolută a repetorilor pe 2 fire trebuie căutată pe altă cale și anume prin utilizarea elementelor neliniare și elementelor active.

*Laboratorul de Telefonie și Telegrafie*
*Institutul Politehnic București*

## BIBLIOGRAFIE

1. *Feldtkeller R.* — Vierpoltheorie, Leipzig (1942).
2. *Taft V. A.* — Osnovî metodiki rasceta lineinîh elektricesih țepeî po zadanîm ih ciastotnîm harakteristîkam, Moscova, Akademiia Nauk S.S.S.R. (1954).
3. *Baev N. A.* și *Udalov A. P.* — Lekții po teorii țepei s sosredotoçenîmi elementam. Moscova, Sviaziizdat (1955).

4. *Bode H. W.* — Network analysis and feedback amplifier design, New-York, Van Nostrand (1945).

5. *Fox A. G., Miller S. E.* și *Weiss M. T.* — Behavior and applications of ferrites in the microwave region. In The Bell System Tehnical Journal (1955), nr. 1 (ian.).

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ДВУХПРОВОДНОГО УСИТИТЕЛЯ

(Краткое содержание)

Усследуется дифференциальная система двухпроводного усилителя рассматриваемого как шестиполюсник и потом как сложный четырехролюсник, устанавливая общие условия для обеспечения двустороннего усиления. Путем линейных преобразований матриц полного сопротивления и разложения четырехполюсника, указывается, кто необходимым условием ябляется противофазное действие в цепи обратной. связи. Предложены различные способы для улучшения баланса диф-я ференциальной системы. В заключение указано, что хотя некоторые улучшения возможны, устойчивость не может быть постоянной из-за наличня вариаций полного сопротивления линий. Постоянная устойчи вость возможна лишь при упротиблении активных необратимых систем

## LE SYSTEME DIRECTIONAL DU RÉPÉTEUR A DEUX FILS

(Rézumé)

Étant donné la difficulté d'obtenir l'équilibre du système différentiel dans un répéteur à deux fils et la précarité de l'équilibre dans les conditions normales d'exploitation, on se propose d'étudier les conditions générales et les moyens possibles pour assurer une stabilité accrue.

L'organe d'aiguillage pour les deux sens de transmission, — système directionnel — peut-être considéré comme un hexapole avec trois paires de bornes, l'équilibreur étant inclus dans le schéma intérieur du hexapole.

Une première analyse du héxapole montre la nécesité de l'équilibreur, si les éléments du montage sont passifs et linéaires. En appliquant une transformation linéaire à la matrice d'admittance du héxapole, on trouve la nécessité d'employer un transformateur parfait pour empêcher l'amorçage d'oscillations.

En considérant le système directionnel comme un quadripole composé, avec les impédances de la ligne et de l'équilibreur incluses dans son schémas, on le décompose — à l'aide des matrices d'admittance — en deux quadripoles en dérivation. Cela montre la nécessité d'un transformateur de rapport -1:1 pour obtenir l'opposition de phase et par suite l'annulation du courant de circulation.

La décomposition en chaine, par la matrice A, permet d'interpréter les méthodes de réalisation des équilibreurs, soit par division de l'impédance en fractions-série, soit par division de l'admittance en fractions-parallèles. Pour améliorer l'équilibrage on peut utiliser deux filtres complémentaires en parallèle et deux équilibreurs séparés, pour les deux bandes de fréquences.

L'opposition des phase nécéssaire à l'équilibrage peut être obtenue par un ou deux déphaseurs qui remplacent le transformateur. On montre comment on peut améliorer la stabilité par l'emploi simultané des deux procédés d'équilibrage, en compensant le courant résiduel du transformateur différentiel normal par un courant résiduel égal et de sens opposé.

En conclusion, on remarque que la stabilisation parfaite du répéteur à deux fils, à l'aide d'élements passifs, ne pourrait être obtenue que par l'emploi d'éléments non-réciproques, analogues aux „ferrites" pour les micro-ondes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

## ELECTRONICA

621.385.3

# DEPENDENȚA FACTORULUI DE AMPLIFICARE AL UNEI TRIODE DE CONDIȚIILE DE FUNCȚIONARE

de M. DRĂGĂNESCU

## 1. INTRODUCERE

Este cunoscut că factorul de amplificare al unui tub electronic nu este în general egal cu inversul factorului de pătrundere, prima mărime fiind dependentă de regimul staționar, iar a doua fiind definită în electrostatica tubului. Dependența factorului de amplificare al unei triode de condițiile de funcționare se explică prin influența sarcinei spațiale asupra funcționării tubului [1] și prin efectele de neuniformitate ale cîmpului electric la catod [2]. Nu se găsește dedusă în literatură o relație, pe baza fenomenelor de mai sus, care să exprime analitic dependența factorului de amplificare de condițiile de funcționare. S-a pus experimental în evidență [2] că factorul de amplificare depinde de raportul $U_g/U_a$ și că formula empirică $\mu \simeq \frac{1}{p - q\frac{U_g}{U_a}}$ este bine verificată experimental [2] pe o plajă destul de întinsă pentru valorile lui $U_g/U_a$ (fig. 1).

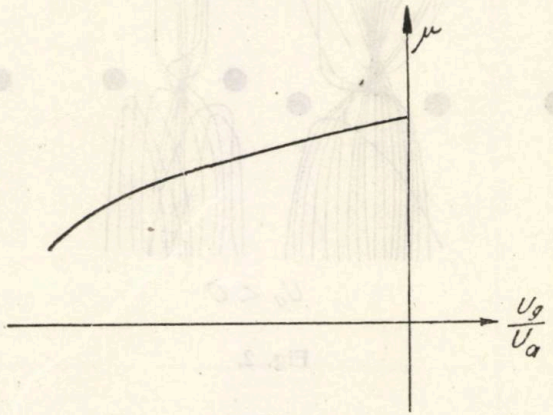



Fig. 1.

În articolul de față se atrage atenția asupra unui alt factor fizic care contribuie la dependența factorului de amplificare de condițiile de funcționare. Ținînd cont de acest factor (efectul de întoarcere al electronilor,

§ 2), se găsește analitic o expresie, pentru factorul de amplificare, identică cu formula empirică de mai înainte. Expresia dedusă (ca și formula empirică) este mai prost verificată experimental la negativări mari, unde într-adevăr efectul de neomogeneitate al cîmpului electric la catod începe să joace un rol important. Rezultatele prezentate sînt bine înțeles valabile la triodele cu factor mic de amplificare, acolo unde efectul neomogeneității cîmpului electric la catod este mai puțin pronunțat.

## 2. EFECTUL DE ÎNTOARCERE AL ELECTRONILOR

Curentul într-o triodă se calculează cu expresia cunoscută, dată de legea 3/2

$$j = A \frac{U_{ec}^{3/2}}{d_1^2} \tag{1}$$

unde $U_{ec}$ reprezintă potențialul diodei echivalente. Obișnuit se ia,

$$U_{ec} = \bar{U}_g = \frac{U_g + DU_a}{1 + D + D'} \tag{2}$$

unde $\bar{U}_g$ reprezintă un potențial electrostatic mediu al grilei care satisface atît cîmpul la catod cît și cîmpul la anod [4]. Conform expresiei (1) curentul depinde numai de valoarea lui $U_{ec}$ deci de cîmpul creat de acesta la catod. Însă nu toții eelctronii emiși, corespunzător potențialului $U_{ec}$, formează curentul în tub, deoarece la negativări mai mari, din cauza neuniformității cîmpului în regiunea grilei, unii electroni se întorc înapoi. Aceasta rezultă din imaginea trectoriilor electronilor într-o triodă (fig.

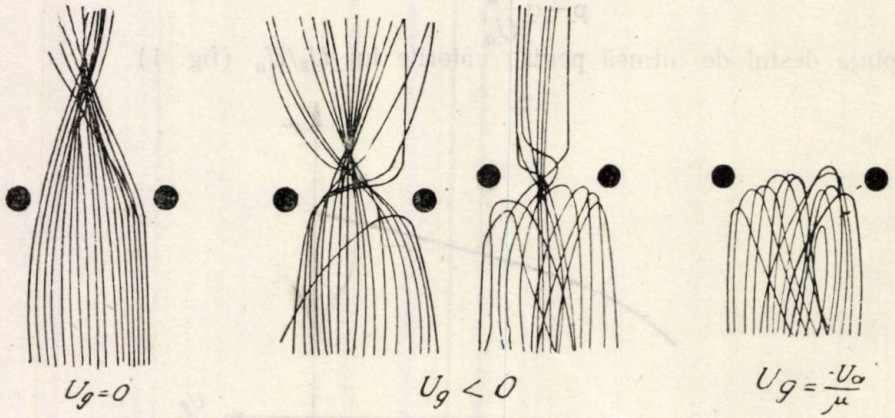



Fig. 2.

2) [5]. Situația arătată de această figură a fost observată pe un model cu membrană de cauciuc prin fotografierea unor bile mici sferice. Cînd intervine acest fenomen de întoarecere a electronilor, cu toate că curentul de plecare este dat de relația (1), curentul real în tub va fi totuși mai mic.

### 3. POTENȚIALUL ECHIVALENT

În acest paragraf se va calcula expresia potențialul echivalent $U_{ec}$, care să țină cont de situația reală în tub, adică de prezența sarcinei spațiale ca și de fenomenul de întoarcere al electronilor.

Întrucît nu există o soluție riguroasă pentru distribuția potențialului într-o triodă în prezența sarcinei spațiale, se vor face anumite ipoteze simplificatoare.

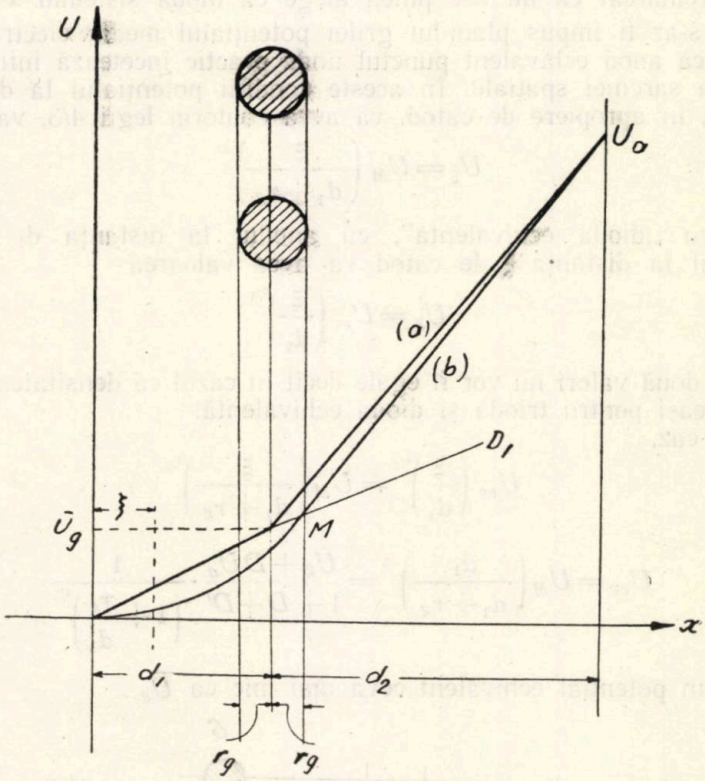



Fig. 3.

Trioda se împarte în două regiuni principale, — regiunea catodului și regiunea anodului regiunea unde cîmpul electric este uniform și o regiune unde cîmpul electric este neuniform, regiunea grilei. Distribuția potențialului în prezența sarcinei spațiale poate fi aproximată prin curba *(b)* în fig. 3. Se știe că potențialul în planul grilei ($x = d_1$) va scădea în prezența sarcinei spațiale. Această scădere se datorește sarcinei spațiale care se află între $x = 0$ și $x = d_1 + r_g$ căci pentru

$$d_1 + r_g < x < d_1 + d_2$$

sarcina spațială este neglijabilă. Atunci se poate privi sistemul, dintre planele

$$x = 0$$

$$x = d_1 + r_g$$

ca o diodă, al cărei potențial anodic să satisfacă cîmpul electrostatic la catod. Astfel punctul M, la intersecția dreptei $x=d_1+r_g$ cu dreapta $D_1$ va reprezenta potențialul anodului acestei diode. Înclinarea dreptei $D_1$ fiind $\overline{U}_g/d_1$, potențialul diodei va fi:

$$U_M=\frac{\overline{U}_g}{d_1}\cdot\left(d_1+r_g\right)=\frac{U_g+DU_a}{1+D+D'}\cdot\frac{d_1+r_g}{d_1} \tag{3}$$

Este de remarcat că nu use putea alege ca diodă sistemul $x=0$, $x=d_1$ pentrucă s-ar fi impus planului grilei potențialul mediu electrostatic $\overline{U}_g$. S-a ales ca anod echivalent punctul unde practic încetează influența pronunțată a sarcinei spațiale. În aceste condiții potențialul la distanța $\xi$ de catod, în apropiere de catod, va avea conform legii 4/3, valoarea

$$U_\xi=U_M\left(\frac{\xi}{d_1+r_g}\right)^{3/2} \tag{4}$$

Pentru „dioda echivalentă", cu anodul la distanța $d_1$ de catod, potențialul la distanța $\xi$ de catod va avea valoarea

$$U'_\xi=U_{ec}\left(\frac{\xi}{d_1}\right)^{4/3} \tag{5}$$

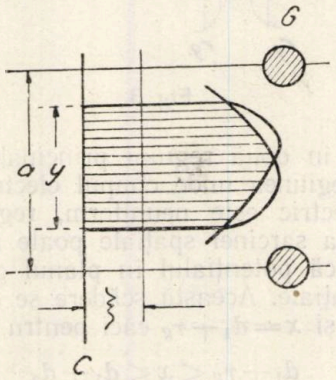
Cele două valori nu vor fi egale decît în cazul că densitatea de curent va fi aceeași pentru triodă și dioda echivalentă.
În acest caz,

$$U_{ec}\left(\frac{\xi}{d_1}\right)^{4/3}=U_M\left(\frac{\xi}{d_1+r_g}\right)^{4/3} \tag{6}$$

și

$$U_{ec}=U_M\left(\frac{d_1}{d_1+r_g}\right)^{3/2}=\frac{U_g+DU_a}{1+D+D'}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{r_g}{d_1}\right)^{1/2}} \tag{7}$$

Rezultă un potențial echivalent ceva mai mic ca $\overline{U}_g$.




Fig, 4.

Însă densitățile de curent nu sînt egale, datorită efectului de întoarcere al electronilor, încît expresia (7) trebuie corectată. Din suprafața $a$ a catodului numai porțiunea $y$ contribuie la curentul anodic (fig. 4). Pentru

trioda și dioda echivalentă, curentul total la $x=\xi$, în apropierea catodului trebuie să fie același:

$$a\, j_{d\cdot ec} = y\, j_{tr} \tag{8}$$

sau

$$a\, c_1 \frac{U'^{3/2}_{\xi}}{\xi^2} = y\, c_1 \frac{U^{3/2}_{\xi}}{\xi^2} \tag{9}$$

de unde

$$U'_{\xi} = \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} U_{\xi} \tag{10}$$

Înlocuind valoarea lui $U_{\xi}$ din (4) și a lui $U'_{\xi}$ din (5) în (10) se obține

$$U_{ec} = \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{r_g}{d_1}\right)^{1/3}} \cdot \frac{U_g + D U_a}{1+D+D'} \tag{11}$$

A mai rămas de precizat felul cum variază $y$ cu $U_g$ și $U_a$.
Din fig. 2 se constată că la negativări mici $y \approx a$ și numai pentru negativări mari $y < a$. Pentru

$$U_g + D U_a = 0\,, \quad y = 0 \tag{12}$$

Se poate presupune că variația lui $y$ cu $U_g$ este atunci de forma (fig. 5).

$$y = c\,(U_g + D U_a)^n \tag{13}$$

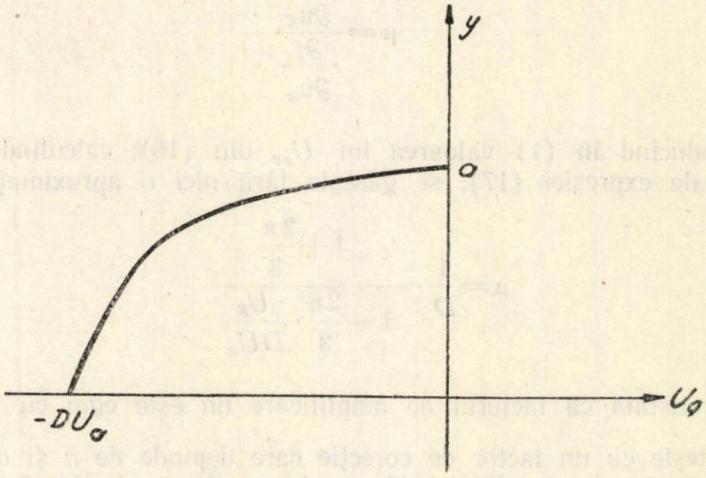



Fig. 5.

unde $n<1$. Valoarea lui $n$ se va preciza prin determinări experimentale așa cum se va arăta la sfîrșitul articolului. Punînd condițiile

$$\begin{aligned} U_g &= 0 \quad y = a \\ U_g &= -D U_a \quad y = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

se găsește

$$y = a\left(\frac{U_g + DU_a}{DU_a}\right)^n \tag{15}$$

Înlocuind valoarea lui $y$ în (11) se capătă expresia potențialului echivalent, care ține cont și de efectul întoarcerii electronilor.

$$U_{ec} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_g}{d_1}\right)^{1/3}} \cdot \frac{U_g + DU_a}{1+D+D'} \cdot \left(1+\frac{U_g}{DU_a}\right)^{\frac{2}{3}n} \tag{16}$$

Trebuie remarcat că în condițiile obișnuite de lucru, valoarea lui $U_{ec}$ (16) nu diferă mult de valoarea lui $\overline{U}_g$. Într-adevăr $\frac{r_g}{d_1} \ll 1$ iar pentru

$DU_a > |U_g|$ vom avea $\left(1+\frac{U_g}{DU_a}\right)^{\frac{2}{3}n} \approx 1.$

## 4. CALCULUL FACTORULUI DE AMPLIFICARE

Pentru calculul factorului de amplificare se pleacă de la relația cunoscută [3]

$$\mu = \frac{\frac{\partial j}{\partial u_g}}{\frac{\partial j}{\partial u_a}} \tag{17}$$

Introducînd în (1) valoarea lui $U_{ec}$ din (16), calculînd derivatele parțiale ale expresiei (17), se găsește fără nici o aproximație,

$$\mu = \frac{1}{D} \cdot \frac{1+\frac{2n}{3}}{1-\frac{2n}{3}\cdot\frac{U_g}{DU_a}} \tag{18}$$

Se constată că factorul de amplificare nu este egal cu $\frac{1}{D}$, ci $\frac{1}{D}$ se înmulțește cu un factor de corecție care depinde de $n$ și de raportul $U_g/DU_a$. Pentru o anumită triodă, $n$ este o mărime constantă, parametrul efectului de întoarcere al electronilor. Astfel, se constată că într-adevăr factorul de amplificare depinde de raportul $\frac{U_g}{U_a}$, identitatea formulei (18) cu formula empirică din introducere fiind evidentă. Trebuie remarcat că formula (18) este valabilă numai pentru $U_g<0$; cazul $U_g>0$ nu este examinat în această lucrare. Astfel, numitorul expresiei (18) este întotdeauna pozitiv și $\mu$ are valoarea maximă pentru $U_g=0$. Pentru $U_g>0$, $\mu$

scade cu creșterea potențialului pozitiv pe grilă după cum se poate constata din fig. 6 [5] unde în planul $i_a$—$U_g$ sînt reprezentate curbele $\mu$=ct la o triodă cu factor mic de amplificare.

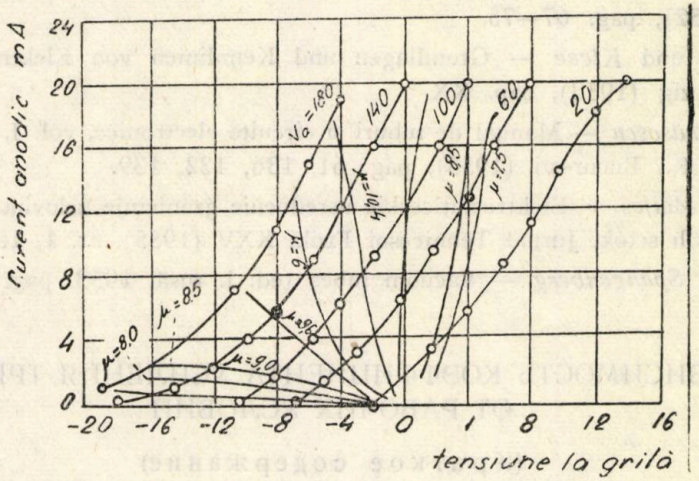



Fig. 6.

Pentru $U_g>0$ factorul de amplificare scade datorită apariției curentului de grilă, adică unei pierderi de electroni pentru anod. În cazul caracteristicilor din fig. 6 se poate face o verificare a relației (18). Se poate lua $D\approx\frac{1}{8}$ încît scriind relația (16) pentru punctul $U_a=140\,V$, $U_g=-4\,V$, $\mu=10{,}4$ se găsește

$$n=0{,}639$$

Ca verificare se pot deduce valorile lui $\mu$ în cîteva puncte.

| Punctul de funcționare | | calc. | exp. |
|---|---|---|---|
| $U_g=-9\ V$ | $U_a=140\ V$ | 9,4 | 9,6 |
| $U_g=-5\ V$ | $U_a=100\ V$ | 9,87 | 10 |
| $U_g=-7{,}3\ V$ | $U_a=180\ V$ | 10,05 | 10 |
| $U_g=-9\ V$ | $U_a=100\ V$ | 8,6 | 8,5 |

Verificarea este mulțumitoare. Se constată astfel că efectul de întoarcere al electronilor în tubul cu grilă negativă nu este neglijabil și că el determină, la tuburile cu factor mic de amplificare (distanța mare grilă-catod și deci cîmp omogen la catod) în principal variația factorului de amplificare cu punctul de funcționare. Parametrul $n$ nu reprezintă altceva decît o măsură a efectului de întoarcere. El poate fi determinat experimental de la tub la tub, pirn metoda lui Harnisch și Randorf [2] care au găsit empiric pentru triodă un potențial echivalent de forma (16).

*Laboratorul de Electronică—Inst. Pol. Buc.*

## BIBLIOGRAFIE

1. *I. A. Kaţman* — Osnovî rasceta radiolamp, Gosenergoizdat, Moscova (1952), pag. 67—75.
2. *Rothe* und *Kleen* — Grundlagen und Kennlinien von Elektronenröhren, Leipzig (1953), cap. XX.
3. *T. Tănăsescu* — Manual de tuburi şi circuite electronice, vol. I, Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti (1955), pag. 61, 136, 132, 139.
4. *B. I. Moijes* — Elektrostaticeskie usrednenie granicinîe usloviia dlia metaliceskih setok, Jurnal Tehnicesoi Fiziki XXV (1955), nr. 1, 167—176.
5. *K. R. Spangenberg* — Vacuum tubes (ed. l. rusă, 1953, pag. 191—197).

## ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ ТРИОДА ОТ РАБОЧИХ УСЛОВИЙ

### (Краткое содержание)

Известно, что коэффициент усиления триода зависит от рабочих условий, но эта зависимость не имеет ту же самую значительность и для крутизны и для внутреннего сопротивления. Однако, для коэффициента усиления установлено экспериментально, [2] что $\mu = \frac{1}{p - q\frac{U_g}{U_a}}$ $(p>0,\ q>0,\ U_g<0)$, изменение коэффициента усиления аффектировано наличием пространственного заряда и неравномерным электрическим полем на катоде.

В статье обращают внимание на другое явление, явление возвращения элекронов от сетки, которое аффектирует значение коэффициента усиления триода.

После вычислений для анодного тока имеет

$$j = k\,(U_g + DU_a)^{3/2}\left(1 + \frac{U_g}{DU_a}\right)^n$$

и для коэффициента усиления

$$\mu = \frac{1}{D}\cdot\frac{1+\frac{2n}{3}}{1+\frac{2n}{3}\cdot\frac{U_g}{DU_a}}$$

где $n$—параметр, который характеризует эффект возвращения электронов ($n<1$). Этот параметр можно устанавливать экспериментально.

# THE DEPENDENCE OF THE AMPLIFICATION FACTOR OF A TRIODE ON THE OPERATING CONDITIONS.

*(Summary)*

It is known experimentally that the amplification factor of a triode degends on the operting conditions, this dependence being of little importance in comparison with the variation of the other two parameters (plate resistance and mutual conductance) with the operating conditions. For the amplification factor it was established experimentally [2] that

$\mu = \frac{1}{p - q\frac{U_g}{U_a}}$ $(p > q,\ q < 0,\ U_g < 0)$, the variation of the amplification factor being attributed to the presence of space charge among the electrodes and to the nonunifromity of the electric field at the cathode. In this paper attention is paid to another phenomenon, the return of the electrons from the negative grid of the triode, which shows itself to be of greater importance thon the other phenomena for a triode with small amplification factor. It is found after carculation that the current of a triode takes the form

$$j = k\,(U_g + DU_a^{3/2})\left(1 + \frac{U_g}{DU_a}\right)^n$$

and the amplification factor

$$\mu = \frac{1}{D} \cdot \frac{1 + \frac{2n}{3}}{1 - \frac{2n}{3} \cdot \frac{U_g}{DU_a}}$$

where u is a parameter ubrich choracteriges the affect of the return of electrons from the negative grid.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

## RADIOCOMUNICAŢII

621.396.616

# EMIŢĂTOR CU MODULAŢIE DE FRECVENŢĂ PENTRU RADIODIFUZIUNE

de GH. CARTIANU, A. PREDA

In radiodifuziunea cu modulaţie de amplitudine pe frecvenţe joase, medii şi înalte nu ne mai putem aştepta la o îmbunătăţire importantă a calităţii recepţiei. Aceasta se datoreşte următoarelor cauze:

1) Lărgimea pe bandă relativ mică rezervată fiecărei emisiuni din aceste game de lucru.

2) Interferenţele cu emisiunile puternice din canalele mai depărtate.

3) Zona de serviciu primară este limitată şi este aproape independentă de puterea emiţătorului.

O îmbunătăţire importantă a calităţii se poate obţine în radiodifuziunea cu modulaţie de frecvenţă pe unde metrice.

Avantajele acestui sistem de radiodifuziune sînt pe scurt următoarele:

1) Se poate obţine o calitate deosebită în ceeace priveşte fidelitatea de reproducere a unei transmisiuni, deoarece se poate transmite o bandă de joasă frecvenţă cuprinsă între 30 Hz — 15.000 Hz.

2) Din cauza propagării cvazioptice a undelor metrice, nu există interferenţă între emisiunile în canal comun, atunci cînd staţiile se găsesc la distanţă suficient de mare între ele; iar interferenţele cu emisiunile în canale adiacente, atunci cînd staţiile sînt în apropiere se pot evita printr-o separare suficient de mare a frecvenţelor purtătoare; de altfel în M.F. efectul perturbaţiilor este mult mai mic decît în M.A.

3) La aceste frecvenţe perturbaţiile atmosferice sînt aproape inexistente, iar perturbaţiile de natură industrială sînt în general puţin importante.

4) In sistemul cu M.F. se obţine o considerabilă îmbunătăţire faţă de sistemul cu M.A. din punct de vedere al perturbaţiilor.

5) Nivelul de perturbaţii fiind foarte redus se poate obţine o dinamică mai bună.

6) Cu o putere relativ redusă, o staţie de radiodifuziune cu M.F. poate deservi o suprafaţă destul de întinsă în condiţiuni optime.

Este de observat că suprafaţa primară de serviciu a unei instalaţii pe unde medii este limitată la o rază care în general este mai mică ca 100 km. Suprafaţa deservită de o staţie cu modulaţie de frecvenţă pe unde metrice, se poate întinde pe această rază, dacă puterea staţiei este suficient de mare.

Cu o reţea de staţii de radiodifuziune de puteri relativ mici se poate acoperi un teritoriu întins.

7) Problema recepției prezintă unele dificultăți, dar numai de moment, datorite faptului că majoritatea aparatelor existente nu sînt prevăzute pentru recepția undelor de frecvențe foarte înalte.

Avînd în vedere importanța acestei probleme, în prezent și în viitorul apropiat, la catedra de Radiocomunicații din Institutul Politehnic București, s-a început încă de mai mulți ani să se lucreze în problema modulației de frecvență.

Aceasta era cu atît mai mult justificat cu cît modulația de frecvență își găsește o însemnată aplicație în radiorelee, care sînt de o deosebită importanță pentru țara noastră.

În anul 1955 un colectiv dela catedra de Radiocomunicații a început studiul în vederea proiectării și construcției unui emițător experimental cu modulație de frecvență pentru radiodifuziune.

Prin construirea acestui emițător se urmărea pe de o parte să se pună în evidență în mod concret avantajele modulației de frecvență și pe de altă parte să se facă o serie de studii în legătură cu propagarea undelor metrice și cu distorsiunile care pot lua naștere în sistemul de transmisiune cu M.F.

Prima problemă care s-a pus, a fost alegerea schemei emițătorului. era de ales între sistemul plecînd de la modulația de fază și sistemul cu tub de reactanță.

Aveam experiență în privința construcției și funcționării primului tip de emițător, deoarece un asemenea emițător a fost construit cu cîțiva ani în urmă în laboratorul de Bazele Radiotehnicei.

Cu ambele tipuri de emițătoare se pot obține performanțele cerute unui emițător pentru radiodifuziune, totuși s-a ajuns la concluzia că tipul al doilea are o construcție mai simplă și că în același timp este mai elastic în ceeace privește modificarea frecvenței de lucru.

La proiectarea și construcția emițătorului s-a căutat să se obțină performanțele cerute emițătorilor de radiodifuziune pentru M.F. cu o schemă cît mai simplă, o stabilitate de funcționare cît mai bună și o siguranță cît mai mare în exploatare.

## *Descrierea emițătorului.*

În fig. 1 este arătată schema bloc a emițătorului. El se compune dintr-un amplificator de A. F., un oscilator cu frecvență de centru $f_0$ = 5505 kHz, un tub de reactanță modulator, un tub de reactanță pentru controlul automat al frecvenței, un separator, un dublor cu un tub, un triplor cu 2 tuburi în contratimp, un al doilea triplor cu tubul dublu 829 B cu cele două secțiuni montate în contra-timp și finalul cu tubul 829 B cu cele două secțiuni în contra-timp.

Pentru stabilizarea frecvenței de centru, se folosește un dispozitiv electronic de control automat al frecvenței, format din: un oscilator cu cristal de cuarț, un schimbător de frecvență, un amplificator limitator lucrînd pe o frecvență intermediară de 605 kHz, un descriminator de frecvență și un indicator de deviație de frecvență, cu amplificator de curent continuu.

Alimentarea se face din 3 redresori: un redresor pentru tensiunea anodică a etajelor prefinal și final, un redresor pentru tensiunea anodică

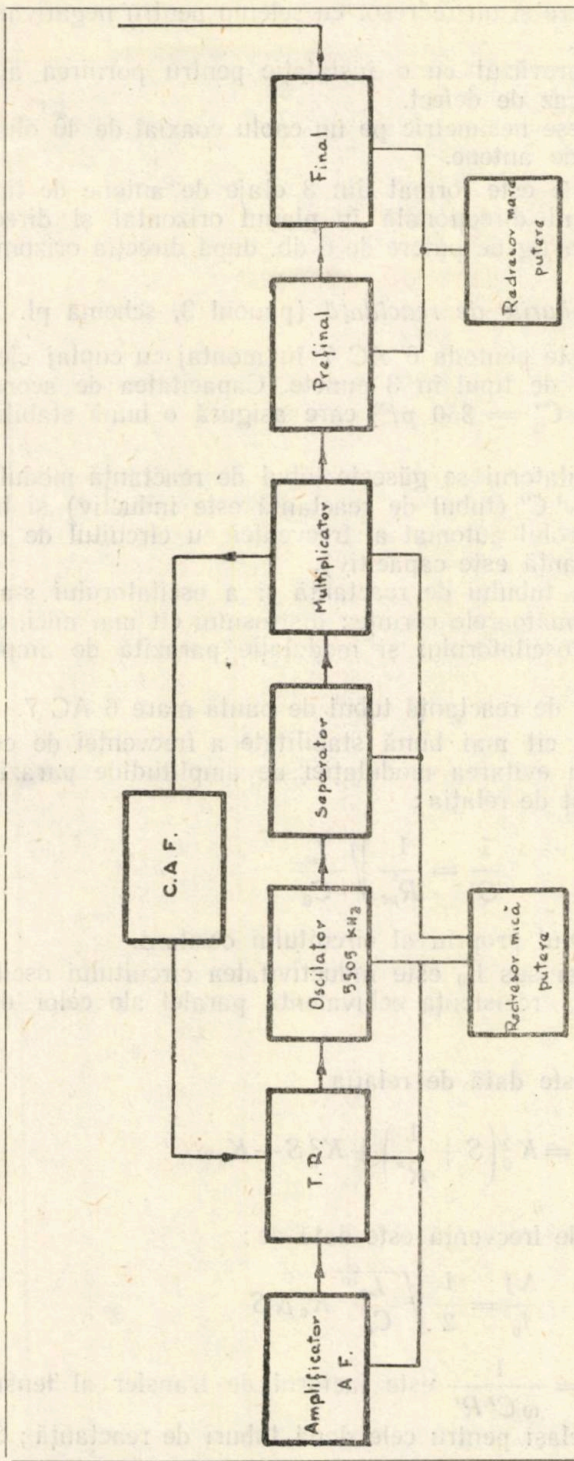



Fig. 1. — Schema bloc a emițătorului M. F.

a etajelor de mică putere și un redresor cu seleniu pentru negativarea etajului final și prefinal.

Emițătorul este prevăzut cu o instalație pentru pornirea automată și de deconectare în caz de defect.

Din emițător se iese nesimetric pe un cablu coaxial de 40 ohmi, care alimentează sistemul de antene.

Sistemul de antene este format din 3 etaje de antene de tipul morișcă, cu radiație omni direcțională în planul orizontal și directivă în planll vertical, cu un cîștig de putere de 6 db. după direcția orizontală.

*Oscilatorul și tuburile de reactanță* (panoul 3, schema pl. I)

Oscilatorul folosește pentoda 6 *AC* 7 în montaj cu cuplaj electronic. Circuitul oscilant este de tipul în 3 puncte. Capacitatea de acord are o valoare mare ($C'_0 + C''_0 = 350\ pF$) care asigură o bună stabilitate de frecvență.

În paralel cu oscilatorul se găsește tubul de reactanță modulator cu circuitul de defazare $R' C'$ (tubul de reactanță este inductiv) și tubul de reactanță pentru controlul automat al frecvenței cu circuitul de defazare $C'' R''$ (tubul de reactanță este capacitiv).

La dimensionarea tubului de reactanță și a oscilatorului s-a căutat un compromis între următoarele cerințe: distrosiuni cît mai mici, stabilite de frecvență bună a oscilatorului și modulație parazită de amplitudine mică.

S-a folosit ca tub de reactanță tubul de pantă mare 6 AC 7.

Pentru a avea o cît mai bună stabilitate a frecvenței de centru a oscilatorului și pentru evitarea modulației de amplitudine parazite, este avantajos ca Q' definit de relația:

$$\frac{1}{Q'} = \frac{1}{R'_{pe}} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tag{1}$$

să fie mare față de Q-ul propriu al circuitului oscilant.

In formula de mai sus $L_0$ este inductivitatea circuitului oscilant, $C_0$ capacitatea lui și $R'_{pe}$ rezistența echivalentă paralel ale celor două tuburi de reactanță.

Rezistența $R'_{pe}$ este dată de relația:

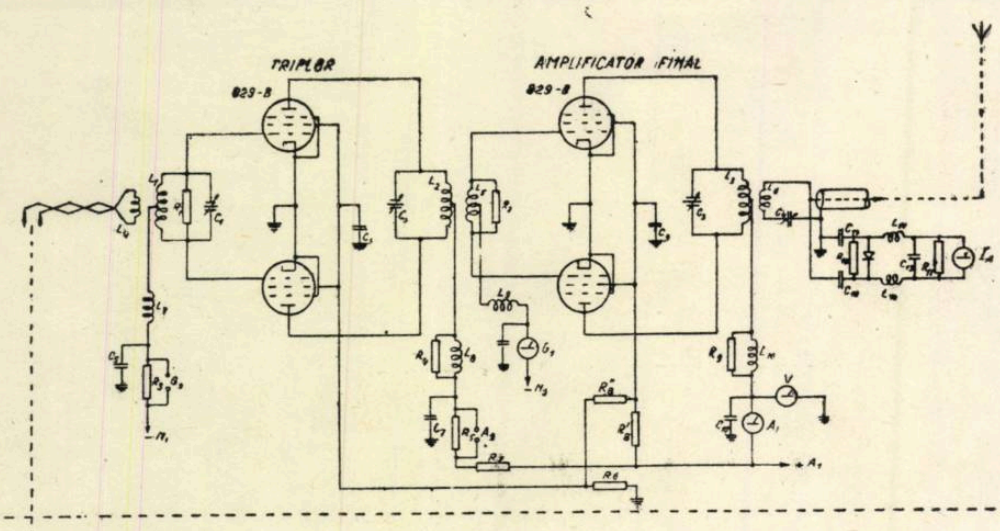
$$\frac{1}{R'_{pe}} = K_0^2 \left( S + \frac{1}{R''} \right) + K_0^2 S + K_0 \omega C' \tag{2}$$

iar deviația relativă de frecvență este dată de:

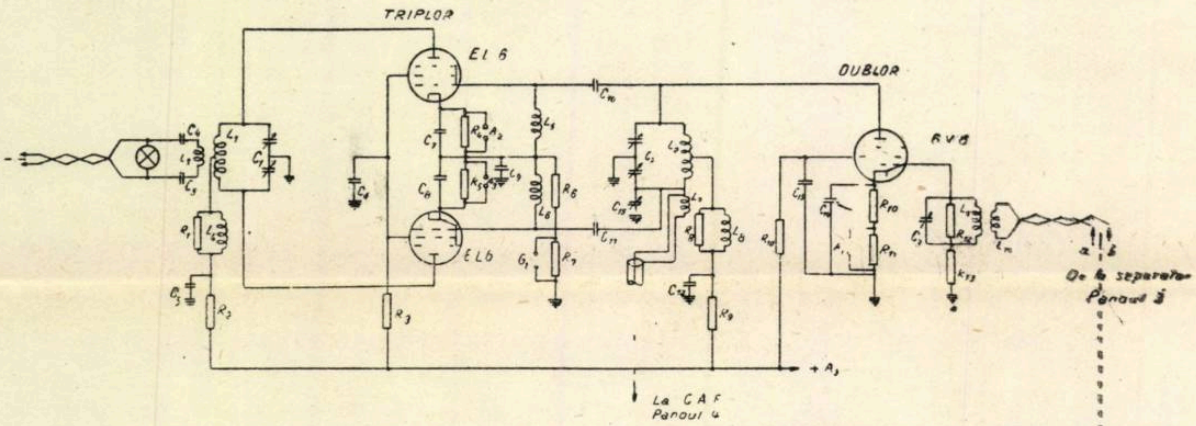
$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\ K_0 \Delta S \tag{3}$$

în care: $K_0 = \omega C'' R'' = \dfrac{1}{\omega C' R'}$ este factorul de transfer al tensiunii de la anodă la grilă, același pentru cele două tuburi de reactanță; S panta

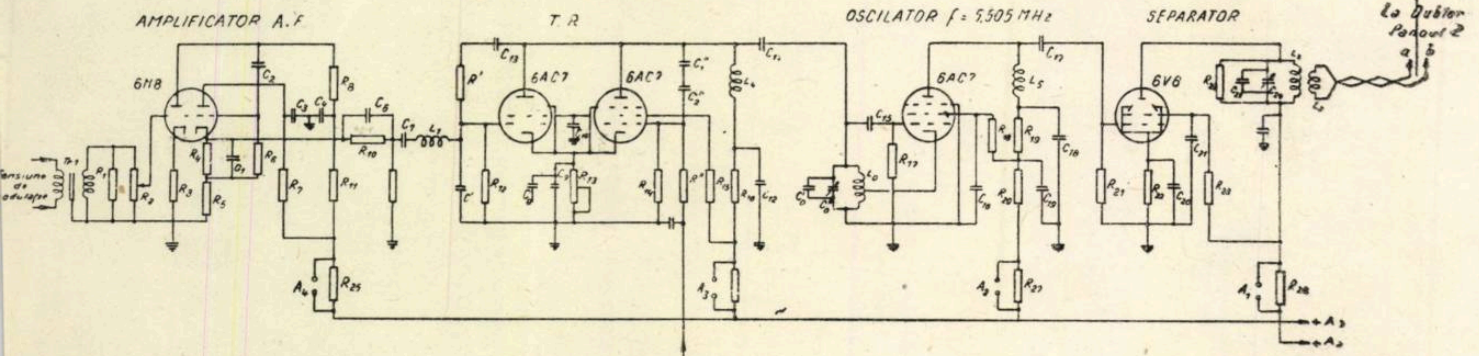
PANOUL 1



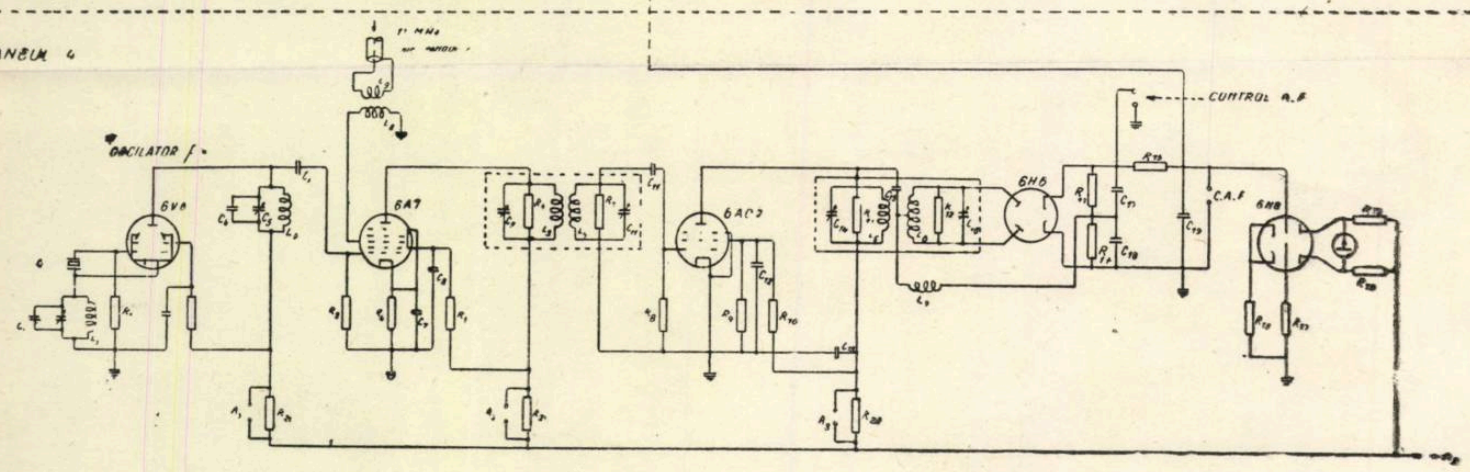

PANOUL 2



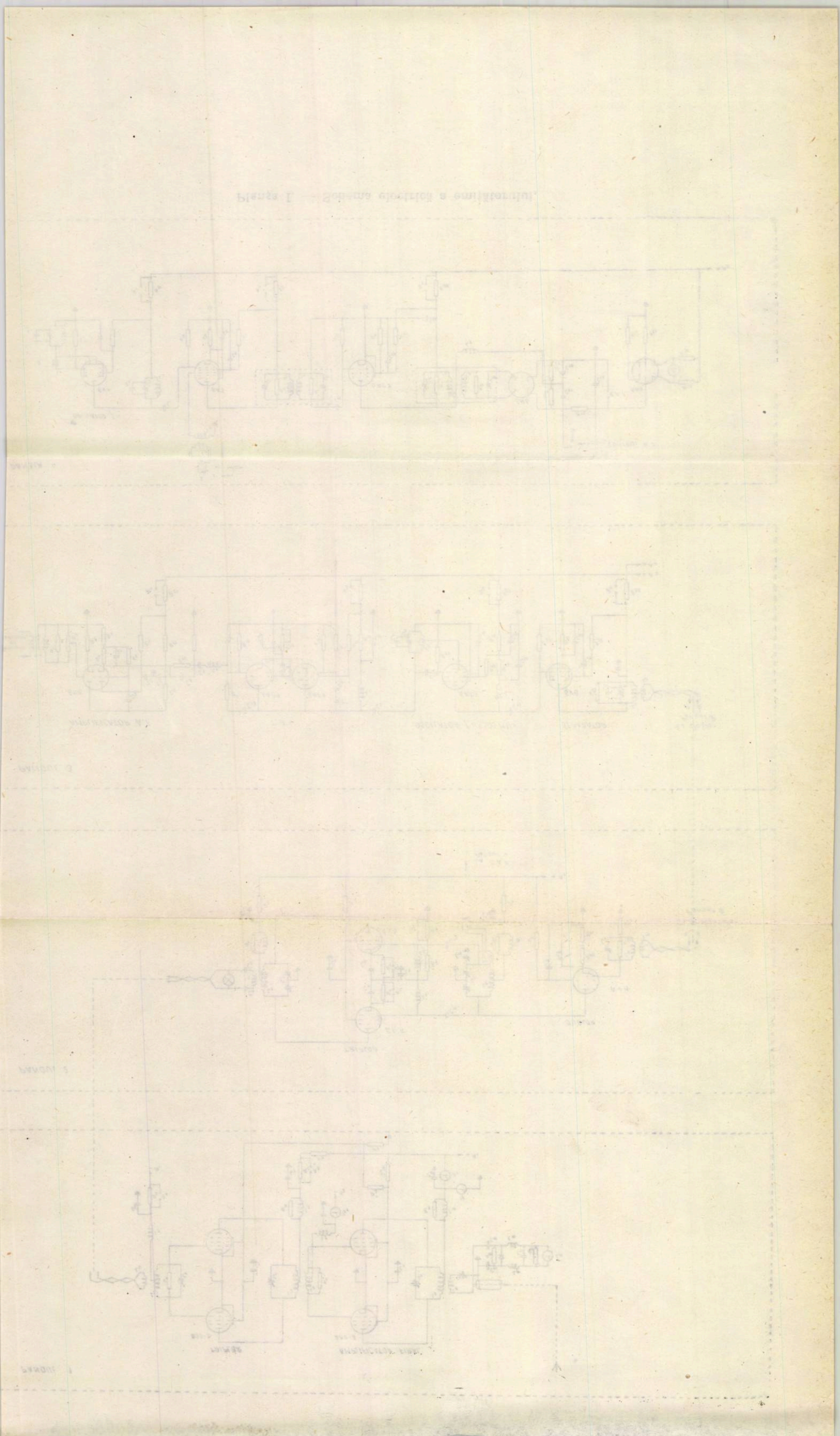

PANOUL 3




PANOUL 4




Planșa I. — Schema electrică a emițătorului,



tubului ; $C'$ capacitatea circuitului de defazare a primului tub ; $R''$ rezistența circuitului de defazare a tubului al doilea ; $\Delta S$ variația pantei datorită tensiunii de modulație.

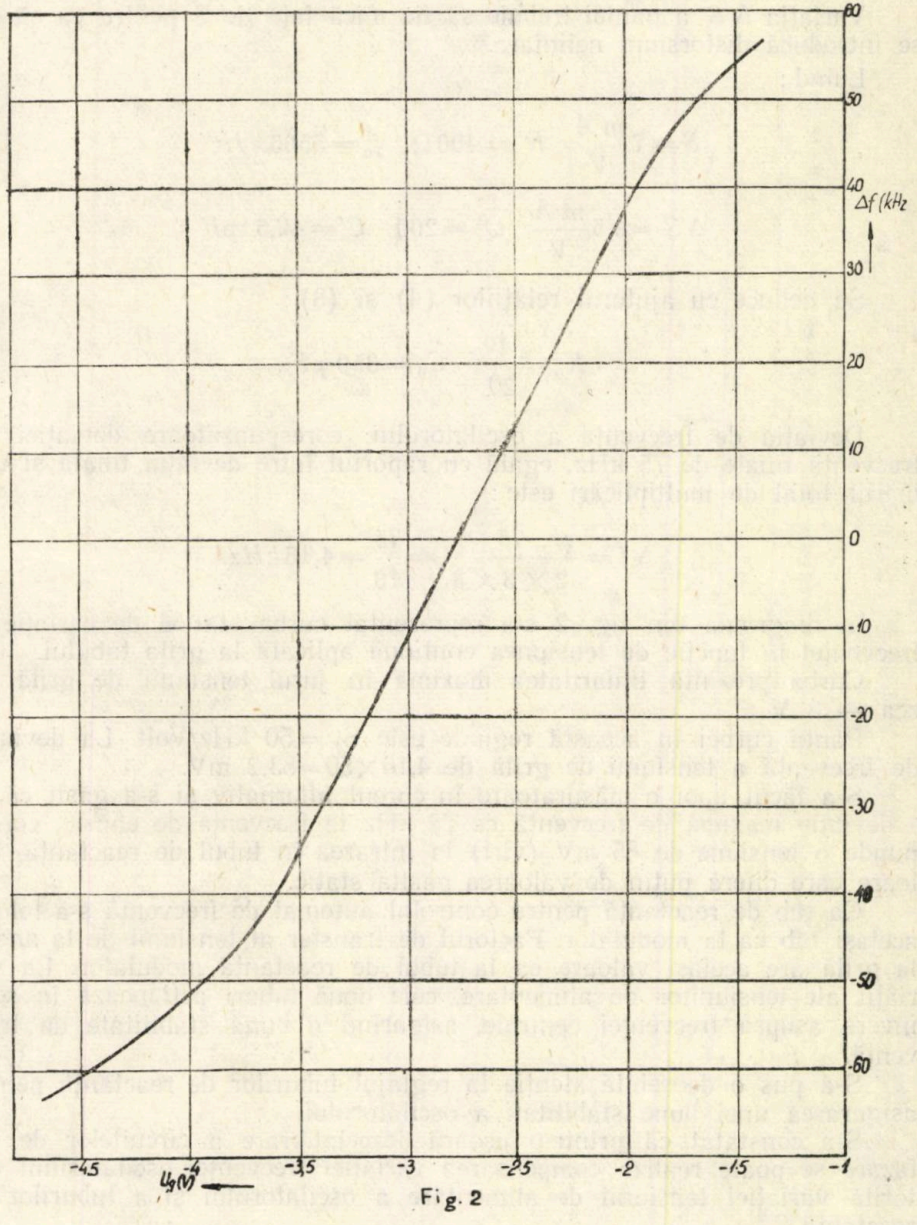



Fig. 2

Fig. 2 — Curba statică de variație a frecvenței oscilatorului în funcție de tensiunea continuă aplicată la grila tubului de reactanță.

Din relațiile (1), (2) și (3) se deduce:

$$\frac{1}{Q'} = 2\left(2K_0 S + \frac{K_0}{R''} + \omega C'\right)\frac{\Delta f}{f_0}\cdot\frac{1}{\Delta S}. \qquad (4)$$

Variația $\Delta S$ a pantei trebuie să fie mică față de S pentru ca să nu se introducă distorsiuni neliniare.

Luînd:

$$S = 7\frac{mA}{V} \quad R' = 400\,\Omega \quad f_0 = 5505\,kHz$$

$$\Delta S = 0{,}5\frac{mA}{V} \quad Q' = 200 \quad C' = 42{,}5\ pF$$

Se deduce cu ajutorul relațiilor (4) și (3):

$$K_0 = \frac{1}{20} \quad C_0 = 350\ pF.$$

Deviația de frecvență a oscilatorului, corespunzătoare deviației de frecvență finale de 75 kHz, egală cu raportul între deviația finală și numărul total de multiplicări este:

$$\Delta f = \frac{75}{2\times 3\times 3} = \frac{75}{18} = 4{,}16\,kHz$$

În diagrama din fig. 2 s-a reprezentat curba statică de cariație a frecvenței în funcție de tensiunea continuă aplicată la grila tubului.

Curba prezintă liniaritatea maximă în jurul tensiunii de grilă de cca — 3 V.

Panta curbei în această regiune este $S_r = 50$ kHz/Volt. La deviația de frecvență a tensiunii de grilă de $4{,}16\times 50 = 83{,}2$ mV.

S-a făcut apoi o măsurătoare în curent alternativ și s-a găsit că la o deviație maximă de frecvență de 75 kHz la frecvența de emisie, corespunde o tensiune de 85 mV (vîrf) la intrarea în tubul de reactanță, valoare care diferă puțin de valoarea găsită static.

Ca tub de reactanță pentru controlul automat de frecvență s-a folosit același tub ca la modulator. Factorul de transfer al tensiunii de la anodă la grilă are aceiași valoare ca la tubul de reactanță modulator. La variații ale tensiunilor de alimentare, cele două tuburi acționează în sens invers asupra frecvenței centrale, asigurînd o bună stabilitate de frecvență.

S-a pus o deosebită atenție la reglajul tuburilor de reactanță pentru asigurarea unei bune stabilități a oscilatorului.

S-a constatat că printr-o ușoară dezechilibrare a circuitelor de defazare se poate realiza compensarea variației frecvenței oscilatorului datorită variației tensiunii de alimentare a oscilatorului și a tuburilor de reactanță.

Reglajul se efectuează în modul următor: se modifică tensiunea de alimentare a oscilatorului și a tuburilor de reactanță, pe partea de curent alternativ, cu un anumit procent, de ex. 5% și se observă variația frec-

venței oscilatorului cu ajutorul unui undametru heterodină, prin apariția în cască a unui sunet de bătaie.

Se ajustează capacitatea C" pînă cînd la o variație a tensiunii de alimentare bătaia rămîne zero.

Se poate obține astfel o stabilitate foarte bună cu variația tensiunilor de alimentare.

Reglajul este însă dificil și trebuie făcut cu multă atenție.

Deși stabilitatea obținută pe această cale este de ordinul celei cerute emițătorilor cu M.F., totuși pentru a se preveni instabilitatea provocată de un eventual dereglaj sau de modificarea caracteristicilor tubului s-a prevăzut și un sistem de control automat al frecvenței.

Circuitele oscilatorului și ale tubului modulator sînt ecranate cu grijă pentru a se evita inducerea unor tensiuni perturbatoare direct pe grila tubului modulator, aceasta mai ales avînd în vedere nivelul relativ mic al tensiunii utile.

Deasemenea s-a avut o deosebită grijă la punerea la pămînt a filamentelor și pentru o bună decuplare a grilelor ecran, și a catodelor atît pentru radiofrecvență cît și pentru audiofrecvență.

*Amplificatorul de audiofrecvență* (panoul 3, schema pl. I).

La intrarea în amplificator se aplică tensiunea de modulație la nivelul zero (0,775 volt ef.).

Amplificatorul de A.F. este format din două secțiuni ale dublei triode 6N8.

Prima secțiune lucrează ca amplificator RC cu reacție de curent, iar a doua ca amplificator cu cuplaj catodic cu un factor de contrareacție mare pentru reducerea factorului de distorsiune. Rezistența Rs=20 K din circuitul catodic al secțiunii a doua a tubului, este rezistența de sarcină, iar rezistența $R_4$=2 K Ω decuplată servește la negativarea grilei.

S-a adoptat soluția cu acentuatorul la ieșirea etajului de joasă frecvență pentru a se menține tensiunea utilă la un nivel ridicat (0,3V—1,8V) în porțiunea lanțului de A.F. în care pot apărea tensiuni importante de brum. Cu montajul folosit s-a obținut distorsiuni mici și o impedanță de ieșire mică, ceeace este cerut de circuitul de accentuare.

În diagrama din fig. 3 s-a reprezentat curbele de răspuns ale sistemului amplificator de A. F. cu accentuator, în comparație cu curba ideală de răspuns a deaccentuatorului în două cazuri: măsurînd tensiunea după accentuator direct la grila tubului de reactanță și înainte de bobina de șoc $L_1$.

Se vede că întreg lanțul de audiofrecvență nu modifică apreciabil curba de răspuns ideală.

Circuitele amplificatorului au fost ecranate cu grijă; s-au pus la pămînt filamentele și s-au făcut filtrări suplimentare la tensiunea anodică pentru a se reduce cît mai mult perturbațiile și tensiunea de brum care ar putea intra prin amplificatorul de *A. F.* Micșorarea nivelului de brum a cerut o muncă migăloasă, de încercări numeroase făcute în lanțul de AF.

Oscilatorul, tuburile de reactanță și amplificatorul de *A.F.* sînt alimentate dintr-o sursă stabilizată pentru a se asigura o bună stabilitate a condițiilor de lucru.

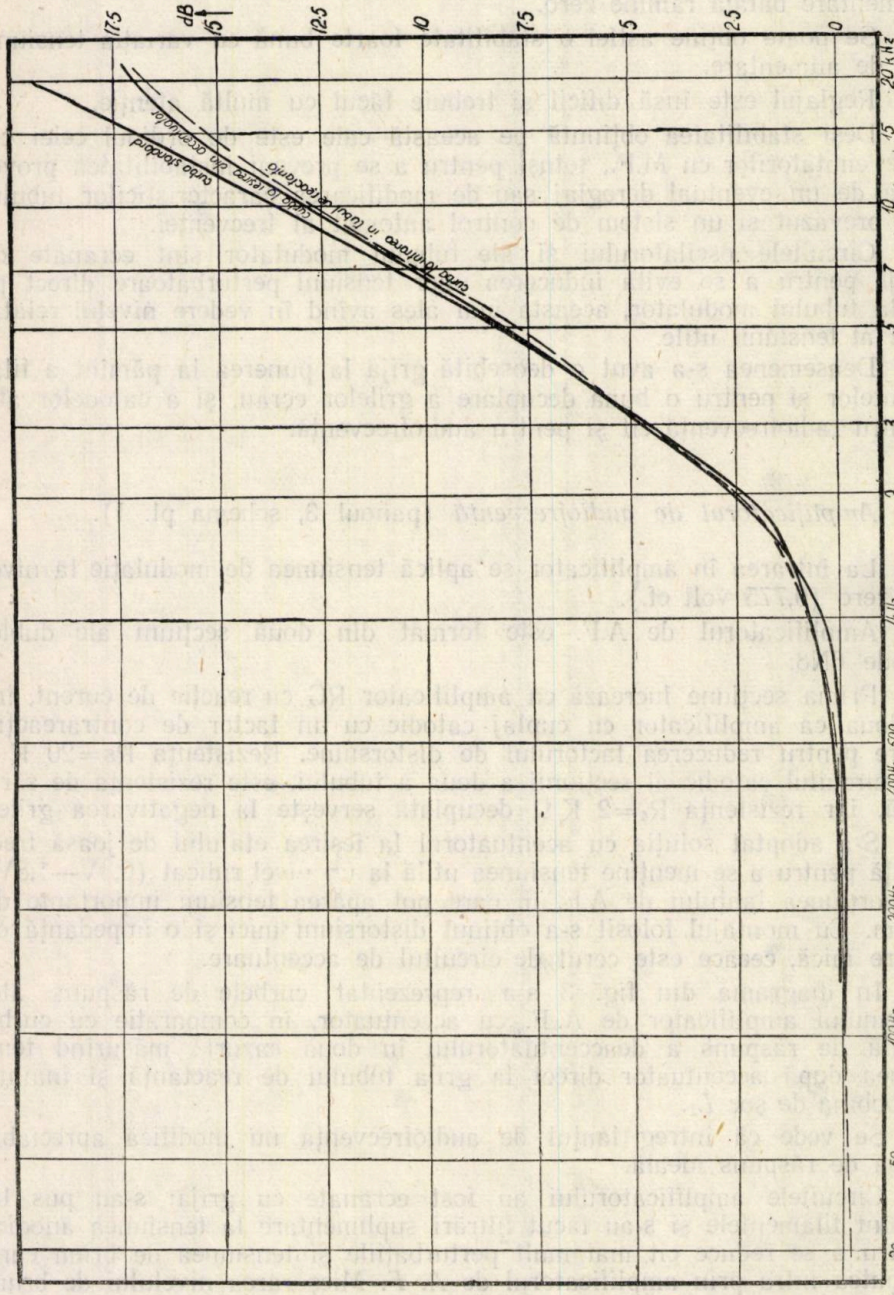



Fig. 3. — Curbele de răspuns ale sistemului amplificator de audiofrecvență cu accentuator, în comparație cu curba ideală de răspuns a accentuatorului.

*Etajul separator și etajele multiplicatoare de frecvență (panourile 2 și 3, schema pl. I)*

Tensiunea dată de oscilatorul modulat în frecvență este aplicată la grila separatorului, care folosește tubul 6 V 6, al cărui circuit anodic acordat este cuplat prin linc cu circuitul acordat de la intrarea primului dublor, în care se folosește deasemenea tubul 6 *V* 6.

Ieșirea din dublor se face simetric printr-un circuit acordat, cu punctul mediu al bobinei pus la pămînt, pentru excitarea simetrică a etajului triplor în contratimp care urmează. Trimerul $C_{15}$ servește la compensarea capacității de ișirea a tubului 6 *V* 6.

Circuitul anodic al dublorului este cuplat capacitiv cu intrarea în triplor.

Triplorul folosește două tuburi *EL* 6 montate în contratimp.

Separatorul, primul dublor și primul triplor sînt alimentate de la aceiași sursă de curent continuu de 300 V. Efectiv anodele sînt alimentate la 200 V. datorită căderii de tensiune în rezistențele de decuplaj respective $R_2$, $R_9$, (panoul 2), $R_{28}$ (panoul 3).

Tuburile acestor etaje sînt negativate automat prin rezistența de grilă și prin rezistența catodică. Negativarea prin rezistența catodică are rolul de a limita curentul anodic în cazul lipsei tensiunii de excitație.

Principalele probleme care au fost avute în vedere la proiectarea și la realizarea etajelor de radiofrecvență au fost:

a) Menținerea distorsiunile neliniare și a modulației parazite de amplitudine în limitele cerute.

b) Asigurarea stabilității în funcționare și a stabilității față de oscilații.

c) Asigurarea puterii de excitație cerute de fiecare etaj.

Pentru asigurarea stabilității s-au luat următoarele măsuri:

S-a lucrat cu capacități de acord relativ mări.

S-au amortizat circuitele de intrare prin rezistențe montate în paralel.

Circuitele anodice au fost decuplate prin rezistență și condensatori.

Conductele de alimentare al filamentelor au fost decuplate prin condensatori.

Bobinele de șoc din circuitele de alimentare a anodelor au fost amortizate prin rezistențe în paralel cu bobinele.

S-a observat că în anumite condițiuni capacitatea de decuplare a rezistenții de catod poate fi o cauză de oscilație.

Negativările tuburilor etajelor de multiplicare au fost alese astfel, încît unghiul de trecere a curentului anodic să corespundă condițiilor în care armonica utilizată a curentului este maximă.

*Etajul prefinal triplor și etajul final (panoul I, schema pl. I).*

În cele două etaje sînt folosite tuburile 829B cu cele două secțiuni montate în contratimp.

Circuitul anodic al triplorului cu 2 x *EL*6 este cuplat prin linc cu intrarea în etajul prefinal triplor, iar circuitul anodic al prefinalului este cuplat inductiv cu circuitul de grilă al tubului final.

Cele două tuburi sînt alimentate de la aceeași sursă de curent continu de 500 V.

Tensiunea anodică a primului tub este redusă printr-o rezistență la 350 V, fiind inutil să se lucreze cu o tensiune mai mare, iar tensiunile ecranelor sînt reduse prin rezistențe la 200 V.

Tuburile sînt negativate automat prin rezistență de grilă și printr-o tensiune fixă de negativare, dată de un un redresar. Negativarea fixă are rolul de a limita curentul catodic în cazul lipsei tensiunii de excitație.

Calculul etajului final ca amplificator clasa C a condus la o impedanță de sarcină anodă-anodă de 4000 ohmi. Luînd randamentul circuitului etajului de 0,9 și $Q$-ul circuitului neîncărcat de 150 rezultă: $Q$-ul circuitului încărcat = 15 și capacitatea de acord = 6 pF.

Spre diferență de celelalte etaje, la etajul final s-a luat o capacitate de acord mică, ceeace a fost necesar pentru ca tubul să poată da puterea de 80 Watt la frecvența de 100 MHz.

Ieșirea se face nesimetric, pe un cablu coaxial de impedanță caracteristică de 500 ohmi, printr-un circuit serie acordat, cuplat cu circuitul anodic al etajului final.

Problemele puse la proiectarea și realizarea acestor etaje sînt aceleași ca și la celelalte etaje.

Circuitele de înaltă frecvență au fost dimensionate pe baza condiției ca factorul de distorsiune introdus de circuite la deviația maximă de frecvență de 75 kHz. și la frecvența maximă de modulație de 15 kHz., să nu fie mai mare ca 1%, iar gradul de modulație de amplitudine parazită corespunzător deviației maxime de frecvență să fie mai mic ca 1%.

Această din urmă condiție a fost impusă din următoarele motive:

1. În regiunile depărtate de emițător, unde cîmpul electric datorit emițătorului este mic și limitatorul intră numai parțial în funcțiune, modulația parazită de amplitudine poate introduce distorsiuni.

2. Oscilațiile de înaltă frecvență, modulate în amplitudine pot fi detectate în etajul de audiofrecvență sau de tuburile de reactanță și astfel poate avea loc o remodulare, ceeace poate introduce distorsiuni în modulația de frecvență.

Pe baza condițiilor de mai sus s-au calculat $Q$-urile tuturor circuitelor afară de $Q$-*ul* circuitului final, care este suficient de amortizat de sarcină ca să nu influențeze apreciabil factorul de distorsiune și gradul de modulație. S-a găsit însă că modulația de amplitudine este determinantă la calculul $Q$-urilor circuitelor.

*Controlul automat de frecvență (panoul 4, schema pl. I).*

Pentru controlul automat al frecvenței s-a folosit un dispozitiv electronic. El se compune din următoarele etaje: un oscilator cu cristal de cuarț pe frecvența de 3465 kHz., folosind tubul 6*V*6 în montaj cu cuplaj electronic, cu circuitul anodic acordat pe armonica a 3-a, un schimbător de frecvență cu heptoda 6*A*7 la care pe grila 1 de comandă se aplică tensiunea dată de oscilatorul cu carț (armonica a 3-a), iar pe grila a 2-a de comandă se aplică tensiunea luată de la primul dublor al emițătorului; un aplificator limitator lucrînd pe frecvența intermediară: $f_i = 615$ kHz ($f_i = 2 \times 5505 - 3 \times 3465 = 615$ kHz), un descriminator de fază cu dublă diodă 6*H*6 și un amplificator de c.c. pentru indicatorul deviației de frecvență față de frecvența de centru.

Întreg dispozitivul de control automat al frecvenței este alimentat de la o sursă de tensiune stabilizată.

Folosind un oscilator cu cristal pe o frecvență de 3 ori mai mică decît frecvența care se introduce în schimbător, se realizează o stabilitate de frecvență mai bună ; pe de altă parte frecvența cuarțului se încadrează în valorile uzuale.

Aplificatorul limitator are rolul de a amplifica tensiunea dată de schimbătorul de frecvență și de a furniza o tensiune constantă discriminatorului.

Dacă frecvența de centru a oscilatorului în paralel cu tuburile de reactanță variază cu o cantitate $\Delta f'_0$ față de valoarea nominală, datorită instabilității oscilatorului, variația frecvenței la ieșirea din dublorul de frecvență este $2\,\Delta f'_0$. O variație de aceiași valoare a frecvenței de centru o regăsim în urma heterodinării, la oscilația de frecvență intermediară, care se aplică discriminatorului.

Datorită variației frecvenței, la ieșirea din discriminator rezultă o tensiune continuă proporțională cu $2\,\Delta f'_0$ care este transmisă la grila tubului de reactanță de control cu sensul potrivit și în felul acesta frecvența oscilatorului este readusă în apropiere de valoarea corectă.

Deviația frecvenței de centru care rezultă cu controlul automat de frecvență este dată de formula :

$$\Delta f_0 = \frac{\Delta f'_0 + nKS_r S_d \Delta f'_d}{1 + nKS_r S_d} \tag{5}$$

în care :

$\Delta f_0$ = deviația frecvenței de centru după reglaj
$\Delta f'_0$ = deviația frecvenței de centru a oscilatorului față de frecvența nominală
$\Delta f'_d$ = deviația de frecvență datorită oscilatorului cu cuarț și instabilității circuitului discriminator
$n$ = multiplicarea de frecvență a oscilațiilor înainte de heterodinare
$S_r (kHz/V)$ = panta caracteristicei tubului de reactanță
$S_d (V./kHz.)$ = panta caracteristicei descriminatorului
$K$ = factorul de transfer al tensiunii de la discriminator la grila tubului de reactanță de control
$1+nKS_r S_d$ = factorul de reglaj al sistemului

Din relația (5) rezultă că pentru asigurarea unei bune stabilități a frecvenței centrale prin ajutorul controlului automat de frecvență, este necesar ca deviația de frecvență $\Delta f'_d$ , introdusă în cea mai mare parte de circuitul discriminatorului, să fie cît mai mică. Aceasta cere în primul rînd o bună stabilitate mecanică și deci o construcție foarte îngrijită a circuitelor discriminatorului.

Controlul automat de frecvență este cu atît mai eficace cu cît factorul de reglaj $1+nKS_r S_d$ este mai mare.

Factorul de reglaj poate fi ușor mărit prin mărirea pantei $S_d$, ceeace este însă limitat din următoarele motive :

În timpul modulației, frecvența variază cu o deviație maximă de frecvență de $\pm 75$ kHz în ritmul semnalului de modulație.

La ieșirea din discriminator rezultă o tensiune care are o componentă alternativă datorită modulației și o componentă continuă reprezentînd valoarea medie a tensiunii. Componenta continuă este formată

dintr-o parte datorită deviației frecvenței de centru față de frecvența de acord a discriminatorului și altă parte datorită apariției distorsiunilor de ordin pur. Distorsiunile sînt cauzate de nesimetria caracteristicei discriminatorului în funcție de frecvență.

Aceasta este echivalent cu apariția unei deviații de frecvență $\Delta f'_d$ cu un important efect de destabilizare. Din această cauză poate rezulta o variație bruscă a frecvenței de centru la vîrfurile de modulație. Experimental s-a constatat că atunci cînd banda de trecere a circuitelor acordate și cînd regiunea caracteristicei discriminatorii echilibrat, cuprinsă între maxim și minim, este apropiată de deviația maximă de frecvență, aplicînd la intrarea în modulator o oscilație sinusoidală, oscilația la ieșirea din discriminator poate fi serios distorsionată și disimetrizată.

Experimental s-a constatat că în aceste condiții oscilația la ieșirea din discriminator prezintă deformările cele mai mari în regiunea frecvențelor medii de modulație. Aceasta este explicabil, deoarece la frecvențele joase de modulație, unde indicele de modulație este mare, componentele laterale sînt aproape uniform distribuite în banda de lucru a circuitelor selective, iar componentele din afara benzii sînt mult atenuate, de unde rezultă o reducere a deviației de frecvență, așa că descriminatorul poate răspunde liniar.

La frecvențele înalte componentele laterale cele mai importante se găsesc în apropierea purtătoarei, în banda de lucru.

La frecvențele medii de modulație (indice de modulație 1—3) componentele laterale cele mai importante se găsesc la limita benzii de trecere a circuitelor selective și a regiunii de lucru a descriminatorului unde neliniaritatea și disimetria caracteristicilor de răspuns este în general mare.

La o deviație de frecvență de 8,35 kHz, cu o bandă de lucru de cca 16 kHz, maximul componentei continue a oscilației la ieșirea din discriminator, rezultînd în urma deformării oscilației, a fost constatat în jurul frecvenței de 4 kHz.

Mai este de observat că la circuite cu o bandă îngustă de trecere, un dezacord poate avea un efect important de deformare a oscilației la ieșirea din discriminator și ca urmare apariția unei componente de curent continuu.

Aceste considerente au condus la adoptarea unei soluții cu o bandă mare de trecere (cca 45 kHz) la etajul de frecvență intermediară de 615 kHz și cu o bandă tot așa de întinsă între minimal și maximal caracteristicii discriminatorului (fig. 4). Pentru aceasta a fost necesar să se micșoreze Q-urile circuitelor din primar și secundar, ceeace a avut ca urmare o importantă scădere a pantei $S^{\sim}$ a caracteristicii discriminatorului și deci a factorului de reglaj; în schimb însă s-a eliminat complect efectul de destabilizare atît de supărător, cauzat de apariția unei componente medii de curent continuu.

În cazul de față, pe baza considerentelor de mai sus, s-a ajuns la următoarele valori ale parametrilor care intră în formula (5)
$n=2$, $S_r=50$ kHz/V (măsurat), $S_d=0{,}75$ V/kHz (măsurat).

Datorită faptului că tubul de reactanță modulator și tubul de reactanță de control au o rezistență catodică comună, $R_k = R_{12} = 400$ ohm

(fig. 5), factorul de transfer K are valoare:

$$\frac{U_g}{U_d} = K = \frac{1 + R_k S}{1 + 2R_k S} \tag{6}$$

în care S este panta tubului.

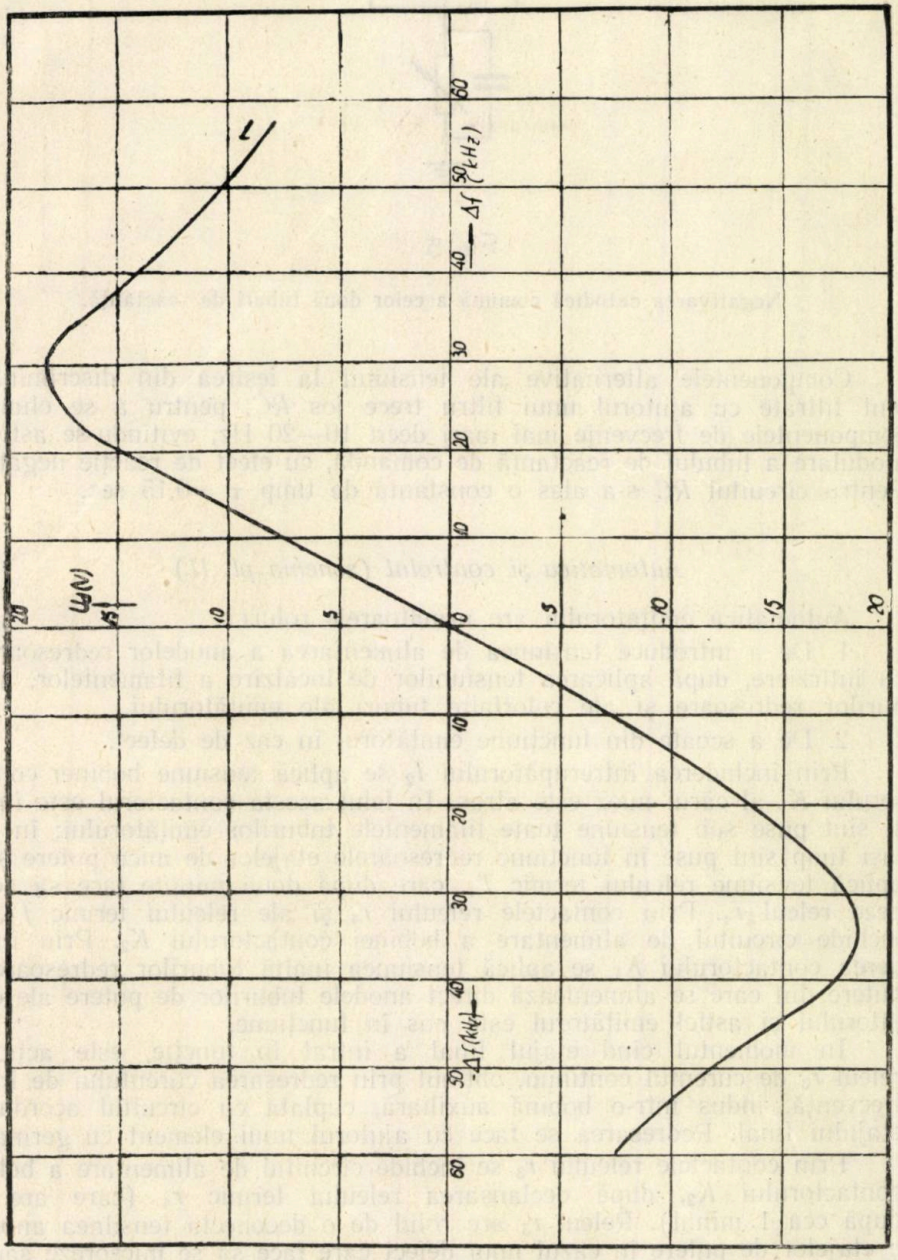



Fig. 4.—Caracteristica în funcție de frecvență a discriminatorului sistemului de control automat al frecvenței (cu 1 $V_{ef}$ aplicat la intrarea limitatorului).

În cazul de față $R_k = 400$ ohmi, $S = 7$ mA/V și $K = 0{,}57$; rezultă un factor de reglaj:

$$1 + nKS_r S_d = 44$$

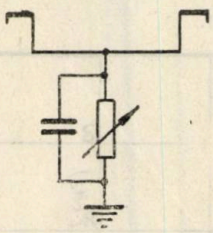


Fig. 5

Negativarea catodică comună a celor două tuburi de reactanță.

Componentele alternative ale tensiunii la ieșirea din discriminator sînt filtrate cu ajutorul unui filtru trece jos *RC*, pentru a se elimina componentele de frecvențe mai mari decît 10—20 Hz, evitîndu-se astfel o modulare a tubului de reactanță de comandă, cu efect de reacție negativă. Pentru circuitul *RC* s-a ales o constantă de timp $\tau = 0{,}15$ sec.

*Automatica și controlul (schema pl. II)*

Automatica emițătorului are următoarele roluri:

1. De a introduce tensiunea de alimentarea a anodelor redresoarelor cu întîrziere, după aplicarea tensiunilor de încălzire a filamentelor, a tuburilor redresoare și ale celorlalte tuburi ale emițătorului.

2. De a scoate din funcțiune emițătorul în caz de defect.

Prin închiderea întrerupătorului $I_2$ se aplică tensiune bobinei contactorului $K_1$ al cărui miez este atras. În felul acesta contactorul este închis și sînt puse sub tensiune toate filamentele tuburilor emițătorului; în același timp sînt puse în funcțiune redresoarele etajelor de mică putere și se aplică tensiune releului termic $T_1$, care după două minute face să acționeze releul $r_4$. Prin contactele releului $r_4$ și ale releului termic $T_2$, se închide circuitul de alimentare a bobinei contactorului $K_2$. Prin închiderea contactorului $K_1$ se aplică tensiunea înaltă tuburilor redresoare de putere din care se alimentează direct anodele tuburilor de putere ale emițătorului și astfel emițătorul este pus în funcțiune.

În momentul cînd etajul final a intrat în funcție, este acționat releul $r_3$ de curentul continuu, obținut prin redresarea curentului de înaltă frecvență, indus într-o bobină auxiliară, cuplată cu circuitul acordat al etajului final. Redresarea se face cu ajutorul unui element cu germaniu.

Prin contactele releului $r_3$ se închide circuitul de alimentare a bobinei contactorului $K_2$, după declanșarea releului termic $r_4$ (care are loc după cca 1 minut). Releul $r_3$ are rolul de o deconecta tensiunea anodică a etajelor de putere în cazul unui defect care face să se micșoreze sau să dispară complet oscilațiile de înaltă frecvență la ieșirea din emițător.

Pornirea și oprirea emițătorului se face de la un singur întrerupător. Pornirea și oprirea emițătorului se poate face și de la distanță. Emițătorul poate funcționa nesupravegheat.

Emițătorul este prevăzut cu lămpi de semnalizare pentru pornirea emițătorului, pentru intrarea în funcție a etajului final și pentru caz de defect. În caz de defect se face semnalizarea și prin ajutorul unei sonerii.

Pentru controlul bunei funcționări a emițătorului s-au prevăzut o serie de aparate de măsură a tensiunilor și a curenților și anume: un voltmetru pentru măsurarea tensiunii de alimentare a etajelor finale, un voltmetru cu element redresor cu germaniu pentru măsurarea tensiunii de înaltă frecvență la intrarea cablului coaxial de alimentare a antenei, un miliampermetru pentru curentul anodic al etajului final și un miliampermetru pentru indicarea curentului de grilă al etajului final.

Cu ajutorul unui miliampermetru cu cordon și fișă se poate măsura curenții anodici ai tuturor celorlalte tuburi.

Un aparat pe panoul de *C. A.F.* indică deviația frecvenței de centru a oscilatorului.

Modulația poate fi controlată la două borne pe panoul de *C. A.F.*

*Caracteristicile emițătorului.*

S-a măsurat principalele date caracteristice ale emițătorului și s-a găsit:

Puterea de înaltă frecvență la ieșirea din emițător 65 w.
Frecvența de lucru 99,1 MHz.
Deviația de frecvență la 100% modulație 75 kHz.
Stabilitatea de frecvență cca. $1.10^{-5}$
Banda de joasă frecvență 30—15.000 Hz cu atenuare mai mică de 2 dB față de frecvența de 1000 Hz.
Factor de distorsiune sub 1,5% la 60 Hz, și sub 1% între 100Hz. și 7.000Hz.
Zgomot în M. F. 56. db față de modulația de 100% fără filtru de ureche și 70 db cu filtru de ureche.
Accentuare 75 μ sec.
Gradul de modulație d amplitudine parazită 1%.

Puterea a fost măsurată cu ajutorul metodei fotometrice.

Caracteristica de frecvență (fig. 6) a fost ridicată măsurîndu-se deviațiile de frecvență la ieșirea din emițător, la diferite frecvențe de modulație, între 30 Hz și 15.000 Hz, atunci cînd la intrarea în amplificatorul AF se aplică o tensiune care este variată cu frecvența de modulație conform curbei de deacentuare. Tensiunea de modulație se ia astfel ca la frecvența de modulație de 1000 Hz. deviația de frecvență să fie de 75

kHz. Curba din fig. 6 reprezintă deviația de frecvență la o anumită frecvență de modulație, raportată la deviația de frecvență corespunzătoare frecvenței de 1000 Hz; raportul este dat în decibeli.

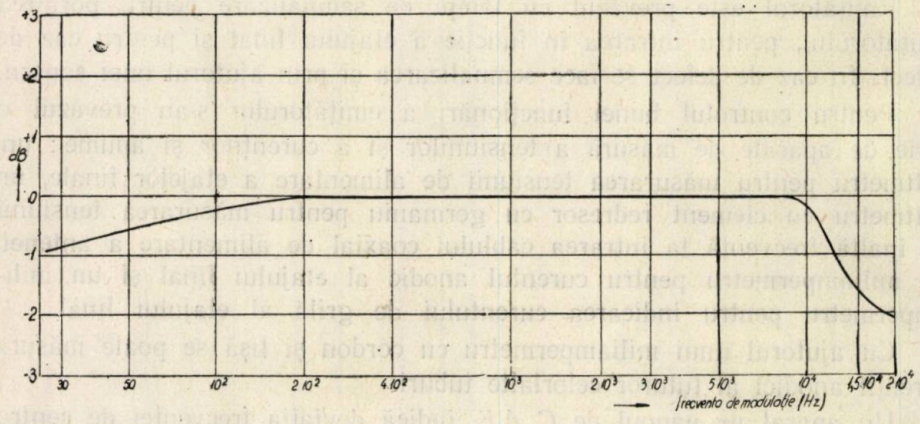



Fig. 6. — Curba de variație a deviației de frecvență în funcție de frecvența de modulație raportată la deviația de frecvență la 1000 Hz. Tensiunea de modulație a fost redusă cu creșterea frecvenței conform curbei standard de deaccentuare.

Etajele emițătorului sînt montate pe șasiuri metalice fixate pe un rac normal. Etajele de mică putere au o construcție cu tuburile așezate pe o placă frontală și cu piesele și cablajul pe partea din spate a plăcii frontale; în felul acesta toate piesele și cablajul sînt foarte ușor accesibile. În fig. 7 este dată fotografia emițătorului.

Antena de emisie este formată din 3 etaje de antene de tipul morișcă cu radiație omnidirecțională, cu un cîștig de antenă de cca 2 în planul vertical.

*Concluzii.*

Emițătorul construit urmează în general linia clasică a emițătorilor cu modulație de frecvență, totuși are o serie de particularități de proiectare și de construcție introduse cu scopul de a îmbunătăți cît mai mult performanțele, siguranța de funcționare și ușurința de reglaj.

Performanțele măsurate corespund calculelor teoretice și sînt la nivelul celor mai bune realizări obținute în străinătate.

Emițătorul a fost dat în exploatare curentă la Ministerul Poștelor și Telecomunicațiilor și funcționează de 1 an de zile. În această perioadă s-a putut verifica calitatea foarte bună a modulației, s-au putut trage concluzii foarte utile în ceeace privește propagarea undelor în cuprinsul orașului București și asupra razei de acțiune în diferite condiții de recepție. Emițătorul s-a comportat, foarte bine și în ceea ce privește siguranța de funcționare, neavînd decît o singură pană în toată această perioadă de timp.

S-au putut astfel strînge o serie de date foarte utile din punct de vedere al exploatării și al propagării care vor putea fi folosite la proiectarea și realizarea viitoarei rețele de radiodifuziune cu modulație de frecvență pe unde metrice în țara noastră.

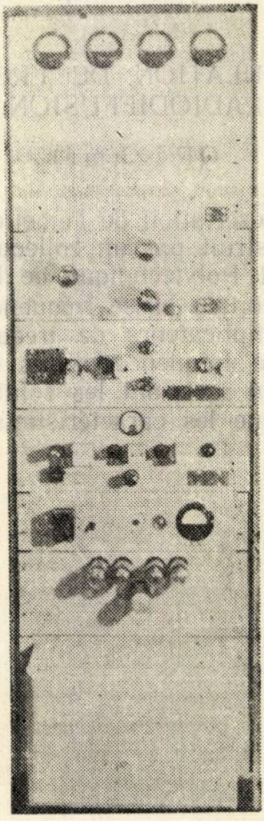


Fig. 7. — Fotografia emițătorului realizat.

Această lucrare a fost realizată de un colectiv de pe lîngă catedra de Radiocomunicații format din Prof. Gh. Cartianu, conf. M. Bubulac, lector A Preda, lector I. Teodorescu, lector Gh. Rulea, asistent C. Șerbu și cu concursul preparatorilor V. Cuzopol și A. Cengea.

*Catedra de Radiocomunicații — Inst. Pol. Buc.*

## РАДИОПЕРЕДАТЧИК С ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ДЛЯ РАДИОПЕРЕДАЧ

(Краткое содержание)

Статья содержит описание радиопередатчиков с частотной модуляцией, построеного коллективом лаборатории радиосвязи при Политехническом Институте гор. Вухареста.

Дано описание усилителя низкой частоты, модулятора с реактивной лампой, этажи умножители, усилитель мощности автоматический контроль частот, автоматических и контрольных аппаратов радиопередатчика—обосновывая при этом избранные технические решения.

В заключение даются общие характеристики радиопередатчка.

## ÉMETTEUR A MODULATION DE FRÉQUENCE POUR LA RADIODIFFUSION.

(Rézumé)

L'article renferme la description de l'émetteur de radiodiffusion à modulation de fréquence, construit par un collectif du laboratoire de Radiocommlnication de l'Institut Polytechnique de Bucarest.

Ou décrit l'amplificateur de basse fréquence, le modulateur à tube à réactance, les étages multiplicateurs de fréquence, l'amplificateur final, le contrôle automatique de fréquence et les dispositifs automatiques et de cntrôle de l'émetteur, en motivant les solutions adoptées.

En conclusion on donne les caractéristiques de la station.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

621.396.616

# O METODĂ DE CALCUL A DISTORSIUNILOR UNUI SEMNAL MODULAT ÎN FRECVENȚĂ, APLICAT AMPLIFICATORULUI DE BANDĂ LARGĂ CU CIRCUITE ACORDATE PE ACEIAȘI FRECVENȚĂ ȘI DECALAT ACORDATE

de A. SPĂTARU

Se calculează distorsiunile unui semnal modulat în frecvență aplicat unui amplificator de bandă largă cu circuite decalat acordate și cu circuite sincrone. Amplificarea este scrisă sub forma unei funcții de o variabilă complexă a cărei poli sînt repartizați ca să avem o curbă de răspuns maximum plată pentru a ne situa în ipoteza în care sînt valabile relațiile care ne dau distorsiunile.

Ținîndu-se seama de produsul amplificare × bandă se face o comparație între indicii tehnici ai celor doi amplificatori.

* *

Disorsiunile unui semnal modulat în frecvență aplicat unui amplificator de bandă largă sînt date de neliniaritățile fazei în funcție de frecvență ale circuitelor de cuplaj între etaje.

Teoretic se poate determina un cuadripol a cărui fază să varieze liniar cu frecvența [2]. Un astfel de cuadripol este arătat în fig. 1.

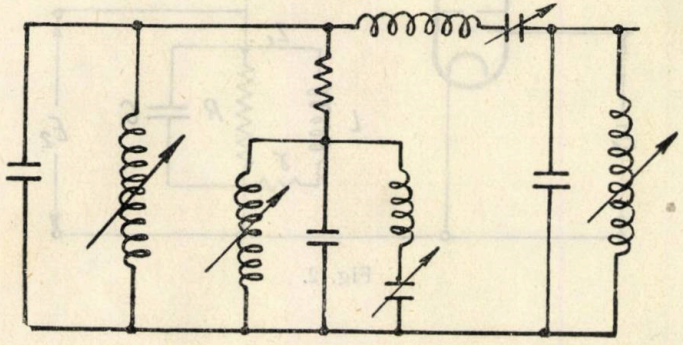


Fig. 1.

Fiecare din cele cinci grupuri de circuite L. C. (două în serie și trei în derivație) trebuiesc acordate pe frecvența din centrul benzii de trecere. Este evident că utilizarea unui astfel de cuadripol ca element de

cuplaj între etaje este cu totul nerațională. Aceasta atît din punct de vedere economic, numărul mare de elemente scumpind costul aparatajului, cît mai cu seamă din punct de vedere al reglajului care este deosebit de complicat.

Acest exemplu ne arată că este cazul să stabilim o soluție de compromis între cerințele teoretice de a avea o bandă cît mai largă (respectiv o variație liniară a fazei într-un domeniu cît mai întins) și anumite cerințe practice. Cerințele practice cele mai importante sînt următoarele: circuitele de cuplaj între etaje să fie cît mai simple; cu aceste circuite să se poată obține o amplificare cît mai mare; amplificatorul trebuie să fie stabil iar reglarea să nu fie critică. Diferitele circuite de cuplaj între etajele amplificatorului de bandă largă trebuiesc deci comparate din următoarele puncte de vedere:

1. Produsul amplificare bandă
2. Simplitatea construcției
3. Stabilitatea și ușurința reglajului.

Cele mai comune tipuri de circuite de cuplaj între etaje utilizate la instalațiile cu modulație de frecvență sînt:

1. Circuite acordate pe aceiași frecvență
2. Circuite decalat acordate
3. Circuite cuplate

În cele ce urmează ne vom ocupa de primele două categorii de circuite de cuplaj care sînt utilizate pe o scară foarte largă din cauza simplității lor. Vom studia în primul rînd cazul amplificatorului cu un singur etaj apoi al celui cu „n" etaje sincrone sau decalat acordate.

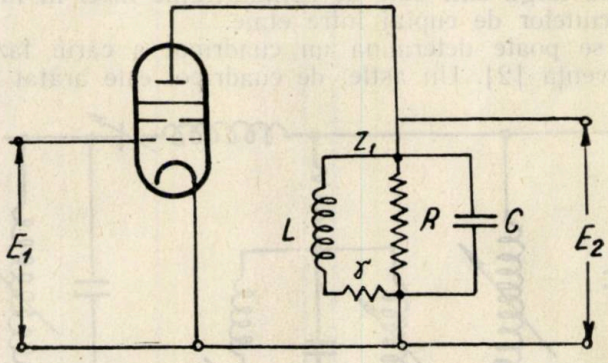



Fig. 2.

I. Cazul unui singur etaj de amplificare.

Impedanța $Z_1$ din circuitul anodic este formată dintr-un circuit derivație unde L este inductanța de acord, r rezistența de pierderi a bobinei, R rezistența cu care se amortizează circuitul ca să obținem factorul de calitate „Q" cerut, iar C este capacitatea de acord.

Dacă notăm cu $\lambda = \sigma + jw$ frecvența complexă, impedanța circuitului $Z_1$ poate fi pusă sub forma:

$$Z_1 = \frac{\lambda - \lambda_a}{C(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \bar{\lambda}_1)} \tag{1}$$

unde $\bar{\lambda}_1$, este conjugata lui $\lambda_1$.

Dacă calculăm valoarea impedanței $Z_1$ fără a face obișnuitele neglijări avem:

$$Z_1 = \frac{\frac{(r+jwL)R}{r+R+jwL} \cdot \frac{1}{jwC}}{\frac{rR+jwL}{r+R+jwL} + \frac{1}{jwC}} = \frac{rR+jwLR}{r+R+(jw)^2LCR+jw(rRC+L)} \tag{2}$$

prelungind analitic funcția (2) pentru tot planul complex putem să scriem:

$$Z_1 = \frac{rR+LR\lambda}{r+R+(rRC+L)\lambda+LCR\lambda^2} \tag{3}$$

Identificînd (3) cu (1) determinăm zeroul și polii funcțiunii (1). Astfel găsim:

$$\lambda_a = -\frac{r}{L} = \sigma_a \tag{4}$$

și polii

$$\lambda_1 = -\left(\frac{r}{2L} + \frac{1}{2CR}\right) + j\sqrt{\frac{r+R}{LcR} - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{L} + \frac{1}{CR}\right)^2} = \sigma_1 + jw_1 \tag{5}$$

$$\bar{\lambda}_1 = -\left(\frac{r}{2L} + \frac{1}{2CR}\right) - j\sqrt{\frac{r+R}{LCR} - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{L} + \frac{1}{CR}\right)^2} = \sigma_1 - jw_1 \tag{6}$$

În multe aplicații rezistența „r" a bobinei poate fi neglijată și în acest caz relațiile (4), (5) și (6) devin:

$$\lambda_a = 0 \tag{7}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2CR} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} \tag{8}$$

$$\bar{\lambda}_1 = -\frac{1}{2CR} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} \tag{9}$$

sau în unele cazuri din contra, amortizarea dorită se obține dînd o valoare corespunzătoare lui r, ne mai fiind nevoie de o amortizare suplimentară ($R \to \infty$). În acest caz avem:

$$\lambda_a = -\frac{r}{L} \tag{10}$$

$$\lambda_1 - \frac{r}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} \tag{11}$$

$$\bar{\lambda}_1 = -\frac{r}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} \tag{12}$$

Impedanța $Z_1$ fiind determinată rezultă amplificarea etajului:

$\alpha = \frac{E_2}{E_1} = S\ Z_1$ unde S este panta tubului, sau:

$$\alpha = S\frac{\lambda - \lambda_a}{C(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \bar{\lambda}_1)} \tag{13}$$

Pe noi însă nu ne interesează valorile funcției „α" în întreg planul „λ" ci numai cazul particular cînd λ variază de a lungl axei imaginare. În acest caz avem

$$\alpha = S\frac{jw - \lambda_a}{C(jw - \lambda_1)(jw - \bar{\lambda}_1)} \tag{14}$$

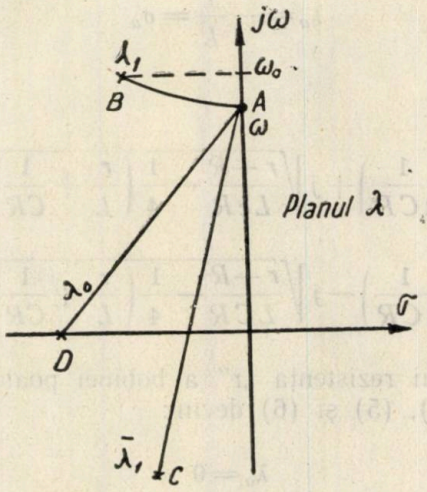



Fig. 3.

Mai mult, pe noi ne interesează variațiile lui „ω" numai într-un domeniu restrîns, în jurul polului $\lambda_1$. În acest caz ținînd seama că polul $\lambda_1$ este departe de axa reală putem considera că variațiile lui „α" sînt date numai de variațiile segmentului AB (fig. 3) segmentele AD și AC putînd fi considerate practic constatate.

Cu aceste aproximări funcția (14) poate fi scrisă:

$$\alpha = S \frac{jw - \lambda_a}{C(jw - \lambda_1)(jw - \bar{\lambda}_1)} \cong S \frac{jw_0 - \lambda_a}{C(jw - \lambda_1)(jw_0 - \bar{\lambda}_1)} \tag{15}$$

sau:

$$\alpha = K \frac{1}{jw - \lambda_1}$$

unde:

$$K = S \frac{jw_0 - \lambda_a}{C(jw_0 - \bar{\lambda}_1)} \tag{16}$$

Ar urma acuma să calculăm argumentul funcției (15) în vederea determinării distorsiunilor produse asupra unui semnal modulat în frecvență. Acest calul îl vom face însă pentru cazul general a „*n*" circuite care apoi poate fi particularizat cu ușurință.

II. Cazul a „n" etaje de amplificare.

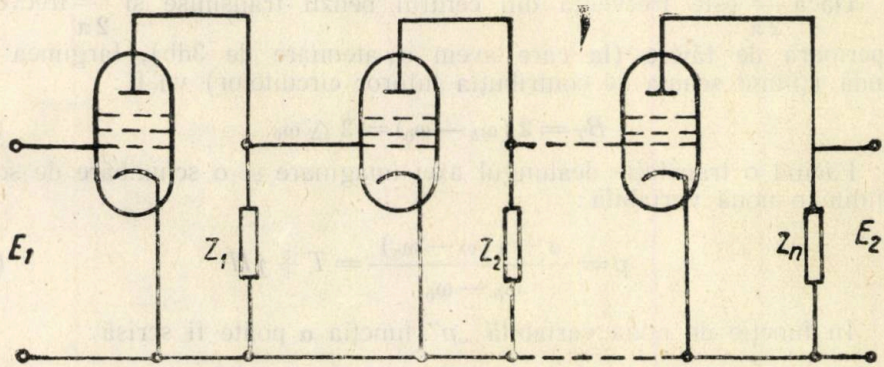



Fig. 4.

În acest caz amplificarea este:

$$\alpha = \frac{E_2}{E_1} = S^n Z_1 Z_2 \cdots Zn \tag{17}$$

unde:

$$Zn = \frac{\lambda - \lambda_r}{C_n(\lambda - \lambda_n)(\lambda - \bar{\lambda}_n)}$$

sau dealungul axei imaginare pozitive.

$$Z_n = \frac{jw - \lambda_r}{C_n(jw - \lambda_n)(jw - \bar{\lambda}_n)} \tag{18}$$

Polii funcțiiunii (17) se găsesc grupați, la distanță de axa reală astfel că dacă „ω" variază în jurul valorii fixe $\omega_0$ din vecinătatea polilor avem:

$$\alpha = S^n \frac{1}{C_1 C_2 \dots C_n} \frac{(j\omega - \lambda_a)(j\omega - \lambda_b) \cdots}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \bar{\lambda}_1)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \bar{\lambda}_2) \cdots} \tag{19}$$

sau aproximativ:

$$\alpha \cong S^n \frac{1}{C_1 C_2 \dots C_n} \frac{(j\omega_0 - \lambda_a)(j\omega_0 - \lambda_b) \cdots}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega_0 - \bar{\lambda}_1)(j\omega_0 - \lambda_2)(j\omega - \bar{\lambda}_2) \dots} \tag{20}$$

sau:

$$\alpha = K \frac{1}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \cdots (j\omega - \lambda_n)} \tag{21}$$

unde:

$$K = S^n \frac{1}{C_1 C_2 \dots C_n} \frac{(j\omega_0 - \lambda_a)(j\omega_0 - \lambda_b) \cdots}{(j\omega_0 - \bar{\lambda}_1)(j\omega_0 - \bar{\lambda}_2) \cdots} \tag{22}$$

Dacă $\frac{\omega_0}{2\pi}$ este frecvența din centrul benzii transmise și $\frac{\omega_b}{2\pi}$ frecvența superioară de tăiere (la care avem o atenuare de 3db), lărgimea de bandă (ținînd seama de contribuția tuturor circuitelor) va fi:

$$B_T = 2(\omega_b - \omega_0) = 2 \triangle \omega_0 \tag{23}$$

Făcînd o translație dealungul axei imaginare și o schimbare de scară definim o nouă variabilă:

$$p = \frac{\sigma + j(\omega - \omega_0)}{\omega_b - \omega_0} = T + jH \tag{24}$$

În funcție de noua variabilă „*p*" funcția α poate fi scrisă:

$$\alpha = \frac{1}{k(p - p_1)(p - p_2) \dots} = \frac{1}{A(p)} \tag{25}$$

sau ținînd seama de faptul că „ λ " variază dealungul axei imaginare, respectiv „*p*" dealungul axei *jH* avem:

$$\alpha = \frac{1}{A(jH)} \tag{26}$$

unde în conformitate cu (24):

$$H = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_b - \omega_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\triangle \omega_0} = 2 \frac{\omega - \omega_0}{B_T} \tag{27}$$

Pentru determinarea constantei *k* scriem:

$$p = \frac{\sigma + j(\omega - \omega_0)}{\triangle \omega_0} = \frac{\lambda}{\triangle \omega_0} - j \frac{\omega_0}{\triangle \omega_0}$$

sau:

$$\lambda = \triangle \omega_0 \, p + j\omega_0 \tag{28}$$

respectiv

$$\lambda_q = \triangle \omega_0 \, p_q + j\omega_0 \qquad \text{unde } q = 1,2 \cdots n$$

înlocuind această valoare în (21) avem:

$$\alpha = K \frac{1}{(j\omega - \triangle \omega_0 p_1 - j\omega_0)(j\omega - \triangle \omega_0 p_2 - j\omega_0) \cdots}$$

$$\alpha = K \frac{1}{\overline{\triangle \omega}^{n} \left(j \frac{\omega - \omega_0}{\triangle \omega_0} - p_1\right)\left(j \frac{\omega - \omega_0}{\triangle \omega_0} - p_2\right) \cdots}$$

$$\alpha = \frac{K}{\overline{\triangle \omega_0}^{n}} \frac{1}{(jH - p_1)(jH - p_2) \cdots} \tag{29}$$

deci

$$k = \frac{\overline{\triangle \omega_0}^{n}}{K} \tag{30}$$

La calculul distorsiunilor undei modulate în frecvență s-a făcut ipoteza că modulul funcției de transfer este constant referința [6⁰]. Pentru a fi valabile relațiile determinate pentru acest caz vom pune condiția ca modulul funcției de transfer „α" să fie maximum plat.

Pentru ca modulul lui „α" să fie maximlm plat va trebui ca $|A(jH)|$ să aibe forma:

$$|A(jH)| = |A(o)| \sqrt{1 + b^2 H^{2n}} \tag{31}$$

unde „b" este o constantă.

În acest caz relația (26) devine:

$$|\alpha| = \frac{1}{A(0)\sqrt{1 + b^2 H^{2n}}} \tag{32}$$

Banda de trecere este de $H = \pm 1$. Pentru aceste valori:

$$|\alpha|_{H=1} = \frac{1}{A(0)\sqrt{1 + b^2}} \tag{33}$$

Valoarea lui $|\alpha|$ în centrul benzii de trecere ($\omega = \omega_0$) cînd $H = 0$ este:

$$|\alpha| = \frac{1}{A(0)}$$

Ori conform definiției lărgimii de bandă avem:

$$\frac{|\alpha|_{H=1}}{|\alpha|_{H=0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} \tag{34}$$

de unde rezultă $b = 1$.

Dacă lărgimea de bandă $B_T$ era definită la altă atenuare decît aceea de 3 db, constanta „$b$" ar fi avut altă valoare. Pentru generalitate, în cele ce urmează nu vom preciza valoarea lui „$b$", însă o presupunem cunoscută. De asemenea presupunem cunoscut numărul „$n$" de etaje.

Pentr a determina polinomul $A(p)$ care să sastisfacă relația (31) cînd $p=jH$ vom considera funcția:

$$\left[A(0)\right]^2\left[1+b^2\left(\frac{p}{j}\right)^{2n}\right]=\left|A(jH)\right|^2 \tag{35}$$

caré poate fi scrisă sub formă factorială găsind zërourile.

Observînd că (-1) poate fi scris: $e^{j(2k-1)\pi}$
unde $k=1, 2, 3,...$ obținem zerourile:

$$b^2\left(\frac{p}{j}\right)^{2n}=e^{j(2k-1)\pi}$$

respectiv:

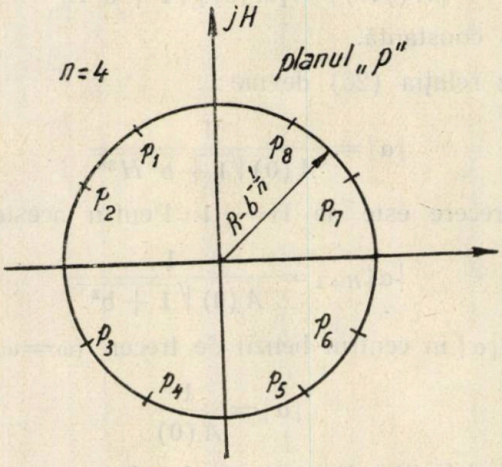
$$p_k=jb^{-\frac{1}{n}}e^{j(2k-1)\frac{\pi}{2n}}$$

sau

$$p_x=b^{-\frac{1}{n}}\left[j\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}-\sin(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right]$$

unde

$$1\leq k\leq 2n$$




Fip. 5.

Aceste zerouri sînt distribuite pe un cerc de rază egală cu $b^{-\frac{1}{n}}$ (fig. 5). Ele cad în două categorii, unele cu partea reală obținute cînd $1\leq k\leq n$ și altele avînd partea reală pozitivă obținute cînd $n+1\leq k\leq 2n$.

Fiecare din aceste categorii de zerouri pot defini un polinom după cum urmează:

$$A_1(p) = (p - p_1)(p - p_2) \cdots (p - p_n) \tag{36}$$

și

$$A_2(p) = (p - p_{n+1})(p - p_{n+2}) \cdots (p - p_{2n}) \tag{37}$$

deci putem scrie:

$$1 + b^2 \left(\frac{p}{j}\right)^{2n} = (-1)^n b^2 A_1(p) A_2(p) \tag{38}$$

însă $|A_1(jH)| = |A_2(jH)|$ fiindcă cele două categorii de zerouri sînt plasate simetrice față de axa imaginară.

Cu această observație avem:

$$|1 + b^2 H^{2n}| = b^2 |A_1(jH)|^2 \tag{39}$$

sau

$$b|A_1(jH)| = \sqrt{1 + b^2 H^{2n}}$$

De aici rezultă că $\left|\frac{A(jH)}{A(0)}\right|$ poate fi înlocuit cu $b|A_1(jH)|$

Din punct de vedere matematic $A_2(jH)$ ar fi putut servi același țel însă rețeaua cu poli în jumătatea dreaptă a planului nu este stabilă.

Din cele de mai sus rezultă:

$$A(p) = bA(0)(p - p_1)(p - p_2) \cdots (p - p_n) \tag{40}$$

unde

$$p_k = b^{-\frac{1}{n}} \left[ -\sin (2k-1)\frac{\pi}{2n} + j \cos (2k-1)\frac{\pi}{2n} \right] \tag{41}$$

cu

$$1 \leq k \leq n$$

sau separînd partea reală și imaginară avem:

$$T_1 = -b^{-\frac{1}{n}} \sin \frac{\pi}{2n} \qquad H_1 = b^{-\frac{1}{n}} \cos \frac{\pi}{2n}$$

$$T_2 = -b^{-\frac{1}{n}} \sin 3\frac{\pi}{2n} \qquad H_2 = b^{-\frac{1}{n}} \cos 3\frac{\pi}{2n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_n = -b^{-\frac{1}{n}} \sin (2n-1)\frac{\pi}{2n} \qquad H_n = b^{-\frac{1}{n}} \cos (2n-1)\frac{\pi}{2n}$$

Frecvența unghiulară pe care trebuiesc acordate cele „*n*" circuite este dată de (27) :

$$\omega_K = \frac{B_T \cdot H_K}{2} + \omega_0 \tag{43}$$

Din relația (24) avem :

$$\sigma_K = \frac{B_T \cdot T_K}{2} \tag{44}$$

Relațiile (43) și (44) determină polii în planul $\lambda$, situații pe un cerc cu raza $r = \omega - \omega_0 = \frac{B_T}{2} b^{-\frac{1}{n}}$ (fig. 6). Pentru a realiza amplificatorul a cărui funcție „$\alpha$" să aibă polii cu distribuția dată de (43) și (44), va trebui să determinăm elementele L.C.R.r ale circuitelor de cuplaj între etaje.

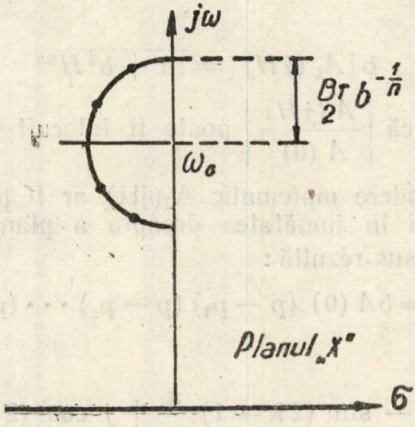



Fig. 6.

Pentru aceasta vom face apel la relația (5) sau (8) sau (11) după caz. Pentru majoritatea aplicațiilor relațiile aproximative (8) și (11) sînt suficiente. Ținînd seama de aceasta din urmă putem scrie aproximativ :

$$\omega_K = \sqrt{\frac{1}{L_K C_K}} \tag{45}$$

și

$$\sigma_K = -\frac{1}{2 C_K R_K} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_K}{Q} \tag{46}$$

sau

$$\sigma_K = -\frac{r}{2L} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_K}{Q}$$

de aici rezultă:

$$L_K = \frac{1}{\omega_K^2 C_K} \tag{47}$$

și

$$Q = -\frac{1}{2}\frac{\omega_K}{\sigma_K} \tag{48}$$

iar $C_k$ se alege pe considerente practice în funcție de capacitățile interne ale tuburilor, care shuntează circuitul.

Funcția de transfer „$\alpha$" fiind determinată astfel ca modulul ei să fie maximum plat, urmează să-i determinăm argumentul.

După cum am văzut (25), (40) amplificarea este:

$$\alpha = \frac{1}{b\,A\,(0)\,(jH - p_1)\,(jH - p_2)\cdots(jH - p_n)}$$

sau

$$\alpha = \frac{1}{b\,A\,(0)\,[-T_1 + j(H - H_1)]\,[-T_2 + j(H - H_2)]\cdots} \tag{49}$$

de unde argumentul $\theta$:

$$\theta = -\operatorname{tg}^{-1}\frac{H - H_1}{-T_1} - \operatorname{tg}^{-1}\frac{H - H_2}{-T_2}\cdots \tag{50}$$

fiindcă $b\ A\ (o)$ este real.

Pentru a calcula distorsiunile unui semnal modulat în frecvență ce trece prin amplificatorul de bandă largă vom considera un regim cuasistaționar și vom aplica relațiile referința [6⁰].

$$A_2 = \frac{1}{2}\omega_m\,\overline{\triangle\omega}^{2}\,\tau_0' \tag{51}$$

$$A_3 = \frac{1}{8}\omega_m\,\overline{\triangle\omega}^{3}\,\tau_0'' \tag{52}$$

unde $A_2$ este amplitudinea armonicei a doua
$A_3$ este amplitudinea armonicei a treia
$\tau_0$ este timpul de propagare
$\triangle\omega$ este deviația de frecvență unghiulară a semnalului aplicat
$\omega_m$ este frecvența unghiulară de modulație
(panta de conversiune a discriminatorului ideal este considerată egală cu unitatea).

Ținînd seama că $H = \frac{2}{B_T}(\omega - \omega_0)$ avem:

$$\tau_0' = \left[\frac{d^2\theta}{dH^2}\left(\frac{dH}{d\omega}\right)^2\right]_{H=0} = \sum_{K=1}^{n}\left[\frac{2}{T_K^2}\,\frac{\dfrac{H - H_K}{-T_K}}{\left[1 + \left(\dfrac{H - H_K}{-T_K}\right)^2\right]^2}\right]_{H=0} \tag{53}$$

Dată fiind distribuția simetrică a polilor în jurul axei reale „T" avem:

$$\tau_0' = \sum_{K=1}^{n} \frac{2}{T_K^2} \frac{\frac{H_K}{T_K}}{\left[1+\left(\frac{H_K}{T_K}\right)^2\right]^2} = 0 \tag{54}$$

fiindcă doi cîte doi termenii se anulează (iar dacă „n" este un număr impar unul din poli este situat pe axa reală deci $H_k$ respectiv este nul). $\tau_0'$ fiind nul rezultă că și armonica a doua $A_2$ este nulă.

Pentru a calcula armonica a treia avem:

$$\tau_0'' = \left[\frac{d^3\theta}{dH^3}\left(\frac{dH}{d\omega}\right)^3\right]_{H=0} = \sum_{K=1}^{n} \left\{ \frac{2}{T_K^3} \frac{3\left(\frac{H-H_K}{-T_K}\right)^2 - 1}{\left[1+\left(\frac{H-H_K}{-T_K}\right)^2\right]^3} \left(\frac{2}{B_T}\right)^3 \right\}_{H=0} \tag{55}$$

sau

$$\tau_0'' = \sum_{K=1}^{n} \frac{2}{T_K^3} \frac{3\left(\frac{H_K}{T_K}\right)^2 - 1}{\left[1+\left(\frac{H_K}{T_K}\right)^2\right]^3} \frac{8}{B_T^3} \tag{56}$$

Din relațiile (42) rezultă:

$$\frac{H_K}{T_K} = -\operatorname{ctg}\ (2k-1)\frac{\pi}{2n} \tag{57}$$

Înlocuind în (56) avem:

$$\tau_0'' = -\frac{16}{b^{-\frac{3}{n}} B_T^3} \sum_{K=1}^{n} \frac{3\ \operatorname{ctg}^2\ (2K-1)\frac{\pi}{2n} - 1}{\left[1+\operatorname{ctg}^2\ (2K-1)\frac{\pi}{2n}\right]^3} \frac{1}{\sin^3\ (2K-1)\frac{\pi}{2n}} \tag{58}$$

sau

$$\tau_0'' = -\frac{16}{b^{-\frac{3}{n}} B_T^3} \sum_{K=1}^{n} \frac{\left[3\ \operatorname{ctg}^2\ (2K-1)\frac{\pi}{2n} - 1\right] \sin^3\ (2K-1)\frac{\pi}{2n}}{\left[\sin^2\ (2K-1)\frac{\pi}{2n} + \cos^2\ (2K-1)\frac{\pi}{2n}\right]^3}$$

$$\tau_0'' = -\frac{16 b^{\frac{3}{n}}}{B_T^3} \sum \left[3 - 4\ \sin^2\ (2K-1)\frac{\pi}{2n}\right] \sin\ (2K-1)\frac{\pi}{2n} \tag{59}$$

Înlocuind această expresie în (52) avem:

$$A_3 = 2b^{\frac{3}{n}}\omega_m\left(\frac{\triangle\omega}{B_T}\right)^3\sum_{K=1}^{n}\left[4\sin^2(2K-1)\frac{\pi}{2n}-3\right]\sin(2K-1)\frac{\pi}{2n} \quad (60)$$

Din relația (60) se pot determina distorsiunile în două cazuri particulare interesante, acel al circuitelor sincrone și acel al unui singur ciruit.

În cele ce urmează vom nota cu „prim" toate valorile care se referă la circuite sincrone, iar cu „secund" valorile care se referă la circuite decalate.

În general lărgimea de bandă $B_T$ este astfel definită *(la 3* db) încît constanta b=1.

$$A_3'' = 2\omega_m\left(\frac{\triangle\omega}{B_T''}\right)^3\sum_{K=1}^{n}\left[4\sin^2(2K-1)\frac{\pi}{2n}-3\right]\sin(2K-1)\frac{\pi}{2n} \quad (61)$$

Dacă avem un singur circuit acordat $n=1$ relația (61) devine (notăm cu $B_0$ lărgimea de bandă a unui singur circuit):

$$A_3 = 2\omega_m\left(\frac{\triangle\omega}{B_0}\right)^3 \quad (62)$$

sau fiindcă

$$B_0 = \frac{\omega_0}{Q}$$

avem:

$$A_3 = 2\omega_m\left(Q\frac{\triangle\omega}{\omega_0}\right)^3 \quad (63)$$

Dacă avem „$n$" circuite acordate pe aceiași frecvență,

$$H_1 = H_2 \cdots = H_n = H = 0 \text{ iar } T_1 = T_2 = \cdots = T_n = T\,.$$

Ținînd seama de aceste relații din (57) rezultă că $(2K-1)\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$ și ca urmare relația (60) devine:

$$A_3' = 2\omega_m\left(\frac{\triangle\omega}{B_T'}\right)^3 n \quad (64)$$

Din relațiile precedente rezultă imediat factorul de distorsiune în cele trei cazuri.

Cazul 1. un singur circuit acordat $n=1$

Factorul de distorsiune este:

$$\delta_3 = \frac{A_3}{\triangle\omega} = 2\frac{\omega_m}{\triangle\omega}\left(\frac{\triangle\omega}{B_0}\right)^3 \quad (65)$$

Cazul II. „$n$" circuite sincrone.

Factorul de distorsiune este:

$$\delta_3' = \frac{A_3'}{\triangle\omega} = 2n\,\frac{\omega_m}{\triangle\omega}\left(\frac{\triangle\omega}{B_T'}\right)^3 \tag{66}$$

Cazul III. „*n*" circuite decalat acordate.

Factorul de distorsiune este:

$$\delta_3'' = \frac{A_3''}{\triangle\omega} = 2N\,\frac{\omega_m}{\triangle\omega}\left(\frac{\triangle\omega}{B_T''}\right)^3 \tag{67}$$

unde

$$N = \left|\sum_{K=1}^{n}\left[4\,\sin^2\,(2K-1)\,\frac{\pi}{2n} - 3\right]\sin\,(2K-1)\frac{\pi}{2n}\right| N - \left| \tag{68}$$

iar valoarea lui „*N*" pentru diferite valori ale lui „*n*" este dată în tabloul:

| *n* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *N* | 1 | 1,414 | 1 | 1,09 | 1,236 | 1,414 | 1,628 |

Pentru a putea face o comparație între cazurile de mai sus, va fi necesar să calculăm pentru fiecare caz în parte produsul amplificare x bandă.

Produsul amplificare x bandă *).

Cazul I — un singur circuit acordat n=1

$$\text{amplificare x bandă} = \alpha_0 B_0 = \frac{S}{2\pi C} = r \tag{69}$$

unde $S$ este panta tubului, iar $C$ capacitatea de acord a circuitului.

Cazul II — „*n*" circuite sincrone.

Lărgimea de bandă în acest caz este dată de:

$$(\sqrt{1+D^2Q^2}\,)^n = \sqrt{2}$$

în care

$$D = \frac{2\triangle\omega}{\omega_0}$$

de unde

$$B_T' = 2\triangle\omega = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{2^{\frac{1}{n}}-1}$$

notînd cu $B_1' = \frac{\omega_0}{Q}$ lărgimea de bandă a unui etaj avem:

$$B_T' = B_1'\sqrt{2^{\frac{1}{n}}-1} \cong \frac{B_1'}{1{,}2\sqrt{n}} \tag{70}$$

*) Toate etajele utilizează același tip de tub.

Dacă amplificarea unui etaj este $\alpha'_1$ amplificarea totală va fi:

$$\alpha'_T = (\alpha'_1)^n \tag{71}$$

iar produsul amplificare bandă

$$\alpha'_T B'_T = \alpha'^n_1 B'_1 \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1} \cong \frac{\alpha'^n_1 B'_1}{1{,}2\sqrt{n}} \tag{72}$$

sau fiindcă

$$\alpha'_1 = \alpha_0 \text{ şi } B'_1 = B_0$$

$$\alpha'_T B'_T \cong \frac{\alpha_0^n B_0}{1{,}2\sqrt{n}} \tag{73}$$

iar produsul amplificare pe etaj x bandă totală este

$$\alpha'_1 B'_T = \alpha_0 B_0 \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1} \cong \frac{\alpha_0 B_0}{1{,}2\sqrt{n}} = \frac{r}{1{,}2\sqrt{n}} \tag{74}$$

Cazul III — „$n$" circuite decalat acordate.

In acest caz amplificarea totală la mijlocul benzii $H = 0$ este:

$$\alpha''_T = \frac{1}{A(0)} \tag{75}$$

dar

$$A(0) = k = \frac{\overline{\triangle \omega_0}^{\,n}}{K} \tag{76}$$

iar din relaţia (22) avem:

$$K = S^n \frac{1}{C_1 C_2 \ldots C_n} \frac{(j\omega_0 - \lambda_a)(j\omega_0 - \lambda_b)\cdots}{(j\omega_0 - \bar{\lambda}_1)(j\omega^0 - \bar{\lambda}_2)\cdots} \tag{77}$$

Dacă facem acordul variind inductanţa, capacităţile de acord din toate circuitele pot fi egale:

$$C_1 = C_2 = \cdots = C$$

Dacă ne referim la fig. 3 se vede că putem scrie aproximativ:

$$\begin{aligned} j\omega_0 - \bar{\lambda}_1 &\cong j2\omega_0 \\ j\omega_0 - \bar{\lambda}_2 &\cong j2\omega_0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{78}$$

Cu aceste aproximații avem:

$$K \cong S^n \frac{1}{C^n} \frac{(j\omega_0 - \lambda_a)(j\omega_0 - \lambda_b)\cdots}{j2\omega_0 \quad j2\omega_0 \cdots} \tag{79}$$

$$K \cong S^n \frac{1}{2^n C^n} \left(1 - \frac{1}{jQ_1}\right)\left(1 - \frac{1}{jK_2}\right)\cdots \tag{80}$$

unde neglijînd $\frac{1}{jQ}$ pe lîngă 1 avem:

$$K = \frac{S^n}{2^n C^n} \tag{81}$$

Înlocuind această valoare în (76) și (75) obținem:

$$\alpha''_T = \frac{K}{\overline{\Delta\omega_0^n}} = \frac{S^n}{2^n C^n \overline{\Delta\omega_0^n}} = \frac{S^n}{(2\pi C)^n} \frac{1}{B''^n_T} \tag{82}$$

sau

$$\alpha''_T = \frac{r^n}{B''^n_T} \tag{83}$$

Amplificare medie pe etaj este:

$$\alpha''_1 = \sqrt[n]{\alpha''_T} = \frac{r}{B''_T} \tag{84}$$

iar produsul amplificare medie pe etaj x bandă totală este:

$$\alpha''_1 B''_T = r \tag{85}$$

Din aceste relații se vede că în cazul amplificatorului cu circuite decalate obținem același produs amplificare medie x bandă totală ca și cazul unui singur circuit, pe cînd în cazul amplificatorului cu circuite sincrone acest produs este de $1{,}2\sqrt{n}$ ori mai mic.

Pentru a compara distorsiunile obținute în cazul amplificatorului cu circuite sincrone și în cazul amplificatorului cu circuite decalate vom considera următoarele situații:

a. ambii amplificatori cu același număr de etaje

$$n' = n'' = n$$

ambii amplificatori au aceiași lărgime de bandă

$$B'_T = B''_T$$

b. ambii amplificatori au același număr de etaje $n' = n'' = n$ ambii amplificatori au aceiași amplificare $\alpha'_T = \alpha''_T$

c. ambii amplificatori au aceiași lărgime de bandă $B'_T = B''_T$ și aceiași amplificare $\alpha'_T = \alpha''_T$

Pentru fiecare din cazurile enumerate vom calcula raportul factorilor de distorsiuni $\varrho = \frac{\delta_3'}{\delta_3''}$ ținînd sema că în ambele cazuri semnalul modulat în frecvență aplicat are aceiași deviație de frecvență unghiulară $\Delta\omega$ și aceiași frecvență unghiulară de modulație $\omega_m$.

În aceste condiții în conformitate cu (66) și (67) avem:

$$\varrho = \frac{\delta_3'}{\delta_3''} = \frac{n}{N}\left(\frac{B_T''}{B_T'}\right)^3 \tag{86}$$

Cazul „a" $n' = n'' = n$

$$B_T' = B_T''$$

iar din relațiile (74) și (85) rezultă:

$$\alpha_1' = \frac{1}{1{,}2\sqrt{n}}\,\alpha_1'' \tag{87}$$

sau

$$\alpha_T' = \left(\frac{1}{1{,}2\sqrt{n}}\right)^n \alpha_T'' \tag{88}$$

iar

$$\varrho_a = \frac{n}{N} \tag{89}$$

În acest caz distorsiunile date de amplificatorul cu circuite sincrone sînt de $\left(\frac{n}{N}\right)$ ori mai mari ca cele date de amplificatorul cu circuite decalat acordate, iar amplificarea totală este de $(1{,}2\sqrt{n})^n$ ori mai mică.

Cazul „b" $n' = n'' = n$

$$\alpha_T' = \alpha_T''$$

iar din relațiile (74) și (85) rezultă:

$$B_T' = \frac{1}{1{,}2\sqrt{n}}\,B_T'' \tag{90}$$

iar

$$\varrho_b = \frac{n}{N}(1{,}2\sqrt{n})^3 \tag{91}$$

Din aceste relații se vede că dacă voim să avem aceiași amplificare totală cu același număr de etaje rezultă distorsiuni foarte importante, de $(1{,}2\sqrt{n})^3$ ori mai mari ca în cazul precedent.

Cazul „c" $n' \neq n'' = n$

$$\alpha_T' = \alpha_T'' = \alpha_T$$

$$B_T' = B_T''$$

Din relațiile (74) și (85) avem:

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_1''} = \frac{1}{1{,}2\sqrt{n'}} = \frac{\sqrt[n']{\alpha_T'}}{\sqrt[n'']{\alpha_T''}} = \alpha_T^{\frac{1}{n'}-\frac{1}{n''}} \tag{92}$$

de unde

$$n'' = n' \frac{\log \alpha_T}{\log \alpha_T + n' \log 1{,}2\sqrt{n'}} \tag{93}$$

deci numărul etajelor necesare pentru a avea aceiași amplificare și aceiași lărgime de bandă este mai mare la amplificatorul cu circuite sincrone.

În acest caz raportul factorilor de distorsiune va fi:

$$\varrho = \frac{n'}{N}$$

und $N$ este funcție de $n''=n$ avînd valorile date în tabloul de la pag. 358.

Relația de mai sus se poate scrie:

$$\varrho_c = \frac{n'}{n''} \cdot \frac{n}{N} = \frac{n'}{n''} \varrho_a$$

Dat fiindcă $n'>n''$ rezultă că distorsiunile în acest caz sînt mai mari ca cele obținute în cazul „a".

Din cele de mai sus se poate trage concluzia că amplificatorii cu circuite decalat acordate au indici tehnici superiori amplificatorilor cu circuite acordate pe aceiași frecvență și pentru acest motiv utilizați în toate instalațiile unde problema distorsiunilor primează.

*Laboratorul de Emițători*
*Institutul Politehnic București*

## BIBLIOGRAFIE

1. *Rizkin A. A.* — Osnovî teorii usilitelnîh shem.
2. *Wallman H.* — Vacuum tube amplifiers.
3. *Harmans J.* — Zur Dimensionierung von Breitbandverstärkern. Funk und Ton nr. 2 (1948).
4. *Goswin-Schaffstein* — Untersuchungen über Laufzeitverzerrungen in Trägerfrequenz-Verstärker. Frequenz nr. 5 (1949).
5. *Schienemann R.* — Trägerfrequenzverstärker grosser Bandbreite mit gegeneinander verstimmten Einzelereisen. T. F. T. nr. 1 (1939).
6. *Al. Spătaru* — Determinarea condițiilor de lucru în regim cuasistaționar și calculul distorsiunilor în cazul modulației de frecvență. Buletinul științific al Academiei R.P.R., Secțiunea Fizică, nr. 1 (1956).

## МЕТОД РАСЧЕТА ИСКАЖЕНИЙ ЧАСТОТНО МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА. ВНОСИМЫХ ШИРОКОПОЛОСНЫМ УСИЛИТЕЛЕМ С НАСТРОЕННЫМИ НА ОДИНАКОВУЮ ЧАСТОТУ А ТАКЖЕ РАССТРОСНЫМИ КОНТУРАМИ

(Краткое содержание)

Рассчитываются искажения частотно модулированного сигнала, вносимые широкополосным усилителем с расстроенными контурами и с синхронными контурами. Усиление выражается ввиде функции от комплексной, переченной, полюсы которой распределены таким образом, чтобы получить максимально ровную частотную характеристику; опследнее необходимо для удовлетворения условия, при котором действительны соотношения выражающие искажения.

Укитывая произведение усиление х повоса. делаетсь сравнение технических показателей указанных усилителей.

## UNE MÉTHODE DE CALCUL DES DISTORSIONS, D'UN SIGNAL MODULÉ EN FRÉQUENCE, APPLIQUÉ A UN AMPLIFICATEUR DE BANDE LARGE, AVEC DES CIRCUITS DÉCALÉ-ACCORDÉS ET AVEC DES CIRCUITS SYNCRONES

(Rézumé)

L'amplification est écrite sous la forme d'une fonction, d'une variable complexe dont les pôles sont repartis, de telle sorte que la courbe de réponse soit maximum plate, afin de nous nous situions dans l'hypotèse, en laquelle sont valables les rélations qui nous donnent les distorsions.

Tenant compte du produit (amplification x bande) on procède à une comparaison des indices tehniques des deux amplificateurs.

## МЕТОД РАСЧЕТА ИСКАЖЕНИЙ ЧАСТОТНО МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА. ВНОСИМЫХ ШИРОКОПОЛОСНЫМ УСИЛИТЕЛЕМ С НАСТРОЕННЫМИ НА ОДИНАКОВУЮ ЧАСТОТУ А ТАКЖЕ РАССТРОЕННЫМИ КОНТУРАМИ

(Краткое содержание)

Рассчитываются искажения частотно модулированного сигнала, вносимые широкополосным усилителем с расстроенными контурами и с синхронными контурами. Усиление выражается ввиде функции от комплексной, переченной, полюсы которой распределены таким образом, чтобы получить максимально ровную частотную характеристику; последнее необходимо для удовлетворения условия, при котором действительны соотношения выражающие искажения.

Учитывая произведение усиление x повоса, делаетсь сравнение технических показателей указанных усилителей.

## UNE MÉTHODE DE CALCUL DES DISTORSIONS, D'UN SIGNAL MODULÉ EN FRÉQUENCE, APPLIQUE A UN AMPLIFICATEUR DE BANDE LARGE, AVEC DES CIRCUITS DÉCALÉ-ACCORDÉS ET AVEC DES CIRCUITS SYNCRONES

(Résumé)

L'amplification est écrite sous la forme d'une fonction, d'une variable complexe dont les pôles sont repartis, de telle sorte que la courbe de réponse soit maximum plate, afin de nous nous situions dans l'hypotèse, en laquelle sont valables les rélations qui nous donnent les distorsions.

Tenant compte du produit (amplification x bande) on procède à une comparaison des indices tehniques des deux amplificateurs.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

621.396.616

# SPECTRUL DE FRECVENŢE AL OSCILAŢIILOR CU MODULAŢIE DE FRECVENŢĂ ŞI FAZĂ IN CAZUL SEMNALULUI DREPTUNGHIULAR

de A. VALERIU

*Introducere*

Problema spectrului de frecvenţe al unei oscilaţii modulate cu un semnal nesinusoidal se pune în mod diferit pentru oscilaţiile cu modulaţie de amplitudine şi cele cu modulaţie unghiulară (de frecvenţă sau de fază). În cazul modulaţiei de amplitudine, problema se rezolvă uşor prin descompunerea semnalului în oscilaţii sinusoidale, cu ajutorul seriei sau integralei Fourier. Fiecare din componentele sinusoidale ale semnalului contribuie la spectrul oscilaţiei modulate cu două componente laterale, simetrice faţă de purtătoare, aşa încît există o legătură directă între cele două spectre: al semnalului modulator şi al oscilaţiei modulate.

În cazul oscilaţiei cu modulaţie de fază sau frecvenţă, nu se poate deduce spectrul de frecvenţe al oscilaţiei modulate prin descompunerea semnalului modulator într-o sumă de componente sinusoidale, deoarece semnalului modulator nu intervine în expresia oscilaţiei modulate ca factor, ci ca argument al unei funcţii circulare. Este deci necesar să se calculeze separat spectrul de frecvenţe al oscilaţiei modulate pentru fiecare formă a semnalului modulator.

În cele ce urmează se deduc spectrele oscilaţiilor modulate în fază şi în frecvenţă cu semnale periodice dreptunghiulare sau cu impulsuri dreptunghiulare. Se arată că spectrul nu are o structură mai complicată decît în cazul semnalului sinusoidal, iar funcţia de distribuţie spectrală are o expresie matematică mai simplă, putînd fi explimată fără ajutorul funcţiilor Bessel.

## 1. *Spectrul oscilaţiei modulate în fază cu un semnal periodic dreptunghiular*

Oscilaţia este de forma:

$$a_1(t) = A \cos [\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t)]$$

în care $A, \omega_0, \varphi_0$ sînt constante iar $\varphi(t)$ reprezintă semnalul periodic dreptunghiular (figura 1).

Este mai simplu să se facă analiza spectrală a funcţiei sub forma complexă:

$$f_1(t) = A e^{j[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t)]} = A e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} f(t)$$

ţinîndu-se seama la sfîrşit că: $a_1(t) = Re[f_1(t)]$

Funcția $f_1(t)$ este în general neperiodică (cu excepția cazului cînd frecvența purtătoare și cea de modulație se găsesc într-un raport rațional), iar $f(t)=e^{j\varphi(t)}$ este o funcție periodică, de perioadă T care poate fi dezvoltată în seria Fourier:

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\Omega t} \quad ;\Omega=\frac{2\pi}{T}$$

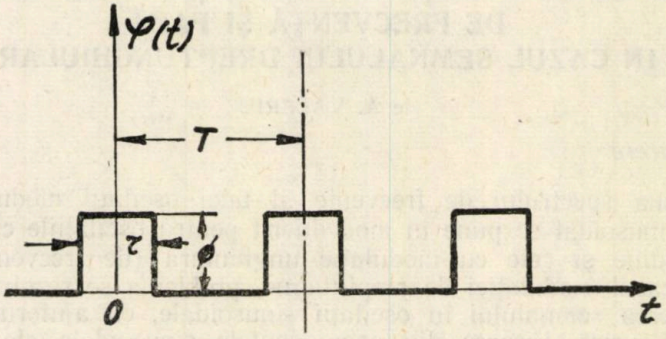



Fig. 1.

Calculînd termenii dezvoltării se obține (pentru $n\neq 0$):

$$C_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\,e^{-jn\Omega t}\,dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{j\Phi}e^{-jn\Omega t}\,dt+\frac{2}{T}\int_{\frac{\tau}{2}}^{T-\frac{\tau}{2}}e^{-jn\Omega t}\,dt=$$

de unde:

$$C_n=|C_n|\,\overline{|\varphi_n}=\frac{2\sin\pi n\frac{\tau}{T}}{\pi n}\left(e^{j\Phi}-1\right)=$$

în care $\Phi$ este înălțimea impulsului.

Pentru $n=0$ rezultă:

$$C_0=\frac{2\tau}{T}\left(e^{j\Phi}-1\right)+2$$

Dezvoltarea funcției $f(t)$ este deci:

$$f(t)=1+\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi n\frac{\tau}{T}}{\pi n}\left(e^{j\Phi}-1\right)e^{jn\Omega t}$$

Oscilația modulată $f_1(t)$ va avea următoarea dezvoltare:

$$f_1(t) = A e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + \sum_{-\infty}^{\infty} A \frac{\sin \pi n \frac{\tau}{T}}{\pi n} \left( e^{j\Phi} - 1 \right) e^{j[(\omega_0 + n\Omega)t + \varphi_0]} \quad (1.1)$$

În fig. 2 este reprezentat spectrul oscilației $f_1(t)$. Dacă se notează cu $\frac{C'(\omega)}{2}$ amplitudinea complexă a componentei de frecvență $\omega = \omega_0 + n\Omega$ se obține:

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} C'(\omega) e^{j\omega t}$$

în care:

$$\frac{C'(\omega)}{2} = A \frac{2}{T} \cdot \frac{\sin (\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{(\omega - \omega_0)} \left( e^{j\Phi} - 1 \right) e^{j\varphi_0} \text{ (pentru } \omega \neq \omega_0)$$

$$\frac{C'(\omega_0)}{2} = A \left[ 1 + \frac{\tau}{T} \left( e^{j\Phi} - 1 \right) \right] e^{j\varphi_0} \text{ (pentru } \omega = \omega_0)$$

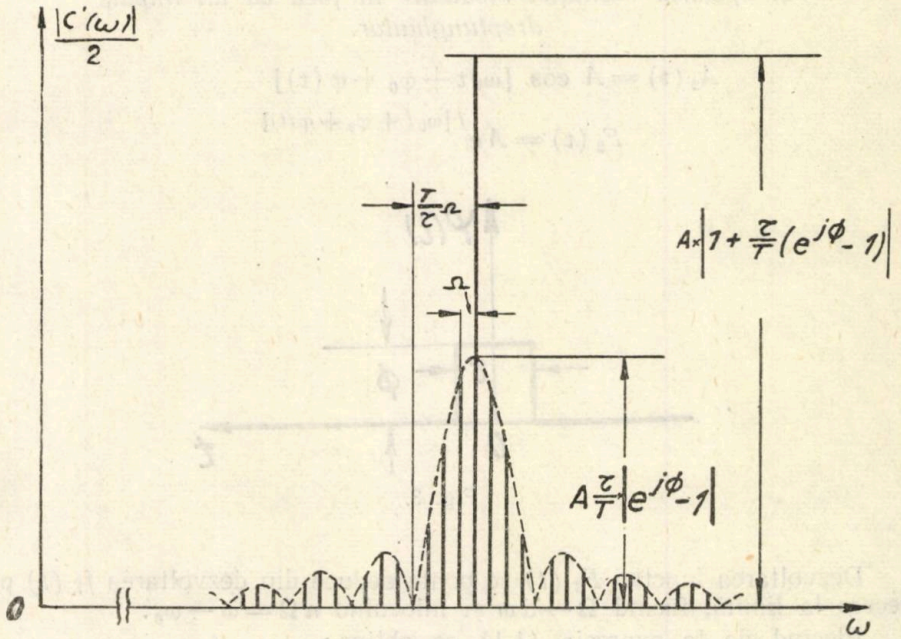



Fig. 2.

Spectrul de frecvențe este simetric în raport cu frecvența purtătoare. Se observă că, în cazul semnalului periodic dreptunghiular, spectrul oscilației modulate în fază este analog cu al oscilației modulate în am-

plitudine. În adevăr, dacă din oscilația modulată în fază $f_1(t)$ se scade purtătoarea nemodulată, se obține o oscilație care e nulă în pauza semnalului și egală cu:

$$A e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} \left( e^{j\Phi} - 1 \right)$$

în timpul semnalului, adică o oscilație modulată în amplitudine cu un semnal dreptunghiular.

În cazul particular $\Phi = 2k\pi$ spectrul se reduce la oscilația purtătoare. În adevăr, în acest caz, oscilația $a_1(t)$ se reduce la purtătoarea nemodulată, cu excepția punctelor de discontinuitate $t = \frac{\tau}{2} + mT$ și $t = -\frac{\tau}{2} + mT$

Se poate considera că în aceste puncte se efectuează un număr întreg $k$ de oscilații ale purtătoarei într-un timp infinit mic (la limită nul). Aceste oscilații, ocazionate de saltul fazei cu $2k\pi$, constituie impulsuri de amplitudine finită și de durată infinit mică, ceea ce explică faptul că ele nu contribuie cu nimic la spectrul oscilației. Deci un salt al fazei cu $2k\pi$ nu constituie o perturbație în sistemele cu modulație de fază, dacă acest salt are loc într-un timp foarte scurt în raport cu peioada semnalului util.

2. *Spectrul oscilației modulate în fază cu un impuls dreptunghiular.*

$$A_2(t) = A \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t) \right]$$

$$F_2(t) = A e^{j[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t)]}$$

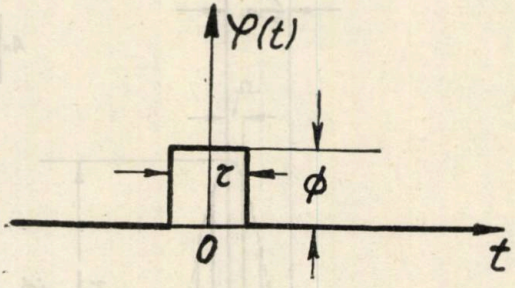



Fig. 3.

Dezvoltarea funcției $F_2(t)$ se poate deduce din dezvoltarea $f_1(t)$ prin trecere la limită, făcînd $\Omega \to d\omega$ și înlocuind $n\Omega = \omega - \omega_0$.

Plecînd de la expresia (1.1) se obține:

$$F_2(t) = A e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + \int_{-\infty}^{\infty} A \left( e^{j\Phi} - 1 \right) \frac{\sin (\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\pi (\omega - \omega_0)} e^{j(\omega t + \varphi_0)} d\omega \quad (2.1)$$

Deci funcția $F_2(t)$ se compune din purătoarea nemodulată la care se adaugă o funcție $F'_2(t)$ având funcția spectrală:

$$G'(\omega) = 2A\left(e^{j\Phi} - 1\right)\frac{\sin(\omega - \omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega - \omega_0)} \cdot e^{j\varphi_0} \qquad (2.2)$$

Funcția spectrală a oscilației date se poate calcula și direct, dar numai după ce s-a scăzut purtătoarea nemodulată, căci altfel funcția nu îndeplinește condiția ca $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|\,dt$ să fie finită. Pe această cale se regăsește expresia (2.2), care este de fapt funcția spectrală a oscilației $A\left(e^{j\Phi} - 1\right)e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)}$ modulată în amplitudine cu un impuls dreptunghiular.

În cazul particular $\Phi = 2k\pi$ oscilația se reduce la purtătoarea nemodulată. În figura 4 este reprezentat spectrul oscilației modulate în fază cu un impuls dreptunghiular.

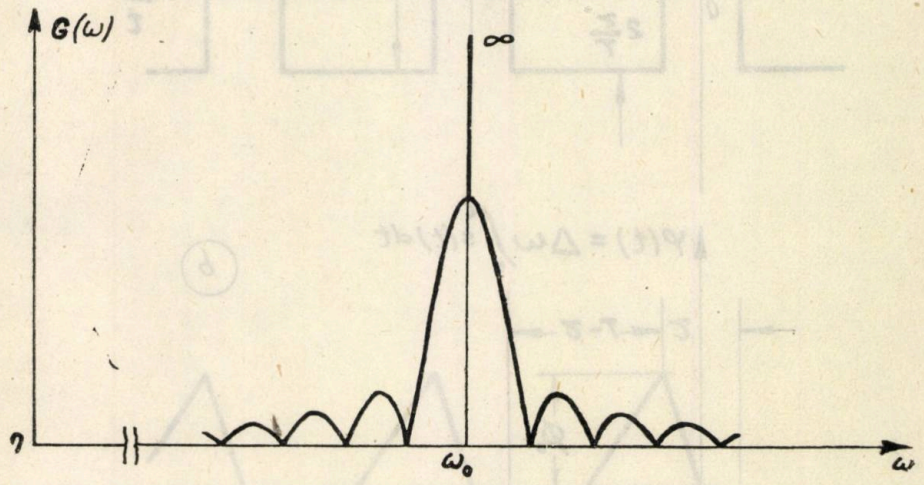



Fig. 4.

3. *Spectrul oscilației modulate în frecvență cu un semnal periodic dreptunghiular.*

Oscilația este de forma

$$a_3(t) = A\cos\left[\varphi_0 + \int_0^t \omega(t)\,dt\right]; \quad f_3(t) = Ae^{j\left[\varphi_0 + \int_0^t \omega(t)\,dt\right]}$$

frecvența instantanee este:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega\, s(t)$$

Semnalul dreptunghiular $s(t)$ a fost considerat cu valoare medie nulă (figura 5 a). Dacă $s(t)$ are o valoare medie $\frac{S_0}{2} \neq 0$ rezultatul final rămîne același cu observația că $\omega_0$ (frecvența de centru) nu mai corespunde cu frevența de repaos, ci are valoarea

$$\omega_0 = \omega_{rep} + \Delta\omega \frac{S_0}{2}$$

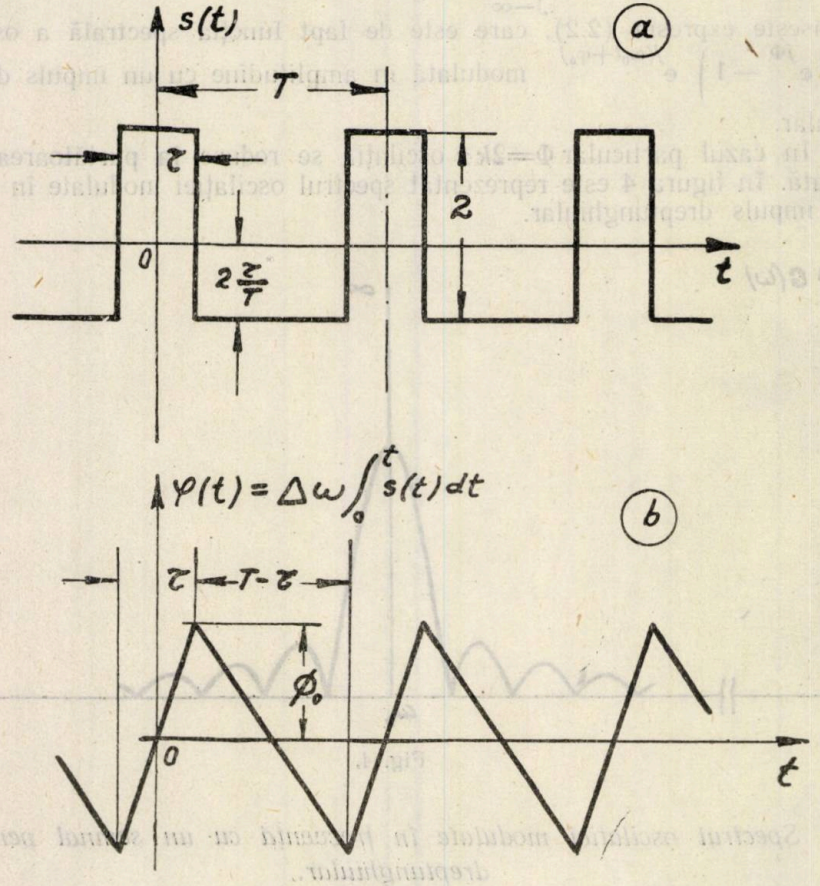



Fig. 5.

Valorile extreme ale frecvenței sînt:

$$\omega_1 = \omega_0 - 2\Delta\omega \frac{\tau}{T}; \quad \omega_2 = \omega_0 + 2\Delta\omega \frac{T-\tau}{T}$$

Oscilația *MF* se pune sub forma:

$$f_3(t) = A e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} e^{j\varphi(t)} = A e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} f(t).$$

$\varphi(t)$ reprezintă partea variabilă a defazajului și este reprezentat în figura 5 b.

Valoarea sa maximă este

$$\Phi_0 = \frac{\tau}{2}\left(\omega_2 - \omega_0\right) = \frac{T-\tau}{2}\left(\omega_0 - \omega_1\right)$$

Funcția $f(t) = e^{j\varphi(t)}$ este periodică, cu perioada T și poate fi dezvoltată în serie Fourier.

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega t}$$

$$C_n = \frac{2\Phi_0 \sin\left(\Phi_0 - \pi n \frac{\tau}{T}\right)}{\left[\Phi_0 - \pi n \frac{\tau}{T}\right]\left[\Phi_0 + \pi n \frac{T-\tau}{T}\right]} \quad \text{(valabil și pentru } n = 0\text{)}$$

De aci se poate obține descompunerea oscilației modulate $f_3(t)$ în componente armonice:

$$f_3(t) = \frac{A}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{j[(\omega_0 + n\Omega)t + \varphi_0]} \tag{3.1}$$

Deci componentele spectrului au frecvențe echidistante cu $\Omega$, începînd de la frecvența de centru $\omega_0$.

Nu apar componente cu frecvențele $\omega_1$ sau $\omega_2$ decît în cazul particular cînd $\omega_0 - \omega_1 = k_1\Omega$, adică $\tau\triangle\omega = k_1\pi$ respectiv cînd $\omega_2 - \omega_0 = k_2\Omega$, adică $(T-\tau)\triangle\omega = k_2\pi$.

Amplitudinea complexă a companentei cu frecvența $\omega = \omega_0 + n\Omega$ va fi

$$\frac{C'(\omega)}{2} = \frac{A\dot{C}n}{2} e = A\Phi_0 \frac{\sin\left(\Phi_0 - \pi n \frac{\tau}{T}\right)}{\left[\Phi_0 - \pi n \frac{\tau}{T}\right]\left[\Phi_0 + \pi n \frac{T-\tau}{T}\right]},$$

Expresia de mai sus poate fi pusă și sub forma

$$\boxed{\frac{C'(\omega)}{2} = 4A\frac{\triangle\omega}{T}\cdot\frac{\sin\frac{\tau}{2}(\omega-\omega_2)}{(\omega-\omega_2)(\omega-\omega_1)} e^{j\varphi_0}} \tag{3.2}$$

În cazul particular $\tau = \frac{T}{2}$ se obține expresia indicată în literatură [1]) :

$$\frac{C'(\omega)}{2} = \frac{2A}{\pi}\frac{\Delta\omega}{\Omega}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}-n\right)}{\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)^2-n^2}e^{j\varphi_0}$$

În cazul cînd există componente pe frecvențele $\omega_1$, sau $\omega_2$, ele au valori finite, ce se pot obține din expresia (32) prin trecere la limită :

$$\frac{C'(\omega_2)}{2} = A\frac{\tau}{T}e^{j\varphi_0}$$

$$\frac{C'(\omega_1)}{2} = A\frac{\tau}{T}e^{j(\varphi_0+k_1\pi)}$$

În figura 6 este reprezentat spectrul oscilației modulate în frecvență cu un semnal periodic dreptunghiular, pentru durata impulsului

$$\tau = 2\frac{1}{\Delta f}$$

și perioada de repetiție a impulsurilor

$$T = 5\tau$$

Se poate vedea că lărgimea spectrului este practic independentă de frecvența de repetiție a impulsurilor.

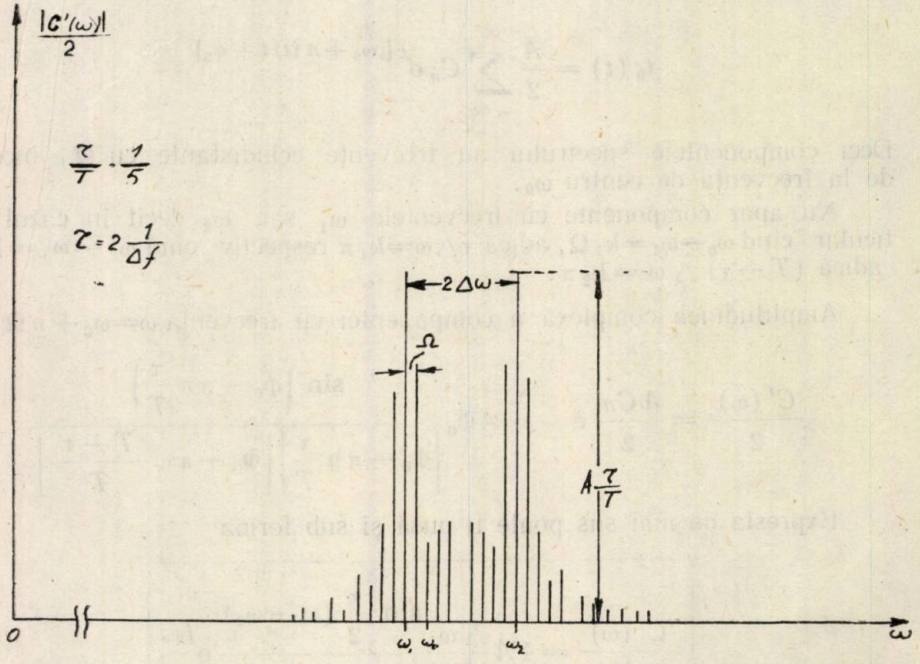



Fig. 6.

1) Manaev E. I., Radiotehnika nr. 5, 19'8, p. 54—61.

4. *Spectrul oscilației modulate în frecvență cu un impuls dreptunghiular*

$$A_4(t) = A \cos\left[\varphi_0 + \int_0^t \omega(t)\,dt\right]; \quad F_4(t) = A\, e^{j\left[\varphi_0 + \int_0^t \omega(t)\,dt\right]}$$

Dezvoltarea funcției $F_4(t)$ se poate deduce din dezvoltarea lui $f_3(t)$, prin trecere la limită.

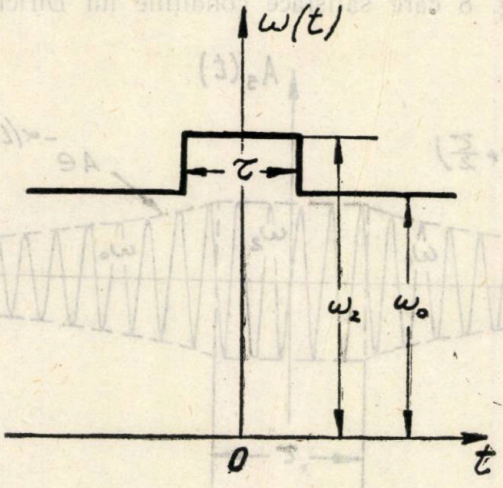



Fig. 7.

Cînd perioada semnalului tinde către $\infty$, mărimile care intră în relația (3.2) devin:

$$\omega_1 = \omega_0$$
$$\omega_2 = \omega_0 + 2\,\Delta\omega$$

Plecînd de la expresia (3.2) se obține:

$$F_4(t) = \frac{2A\,\Delta\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\frac{\tau}{2}(\omega_2 - \omega)}{(\omega_2 - \omega)(\omega - \omega_0)} e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)}\, d\omega$$

Deci funcția aperiodică de timp $F_4(t)$ are următoarea funcție spectrală:

$$G(\omega) = 4A\,\Delta\omega \frac{\sin\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_2)}{(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_0)} e^{j\varphi_0} \tag{4.1}$$

Funcția spectrală tinde către $\infty$ în jurul frecvenței $\omega_0$ (ceeace se explică fizic prin existența oscilației armonice de frecvență $\omega_0$ pe o durată infinită).

Funcția spectrală $G(\omega)$ nu se poate calcula direct, deoarece funcția $F_4(t)$ nu satisface condiția ca $\int_{-\infty}^{\infty} |F_4(t)|\,dt$ să aibă sens și nici nu poate fi adusă să satisfacă această condiție prin adăugirea sau scăderea de oscilații armonice.

Pentru a verifica totuși expresia (4.1) am pornit de la funcția $A_5(t)$, reprezentată în fig. 8 care satisface condițiile lui Dirichlet.

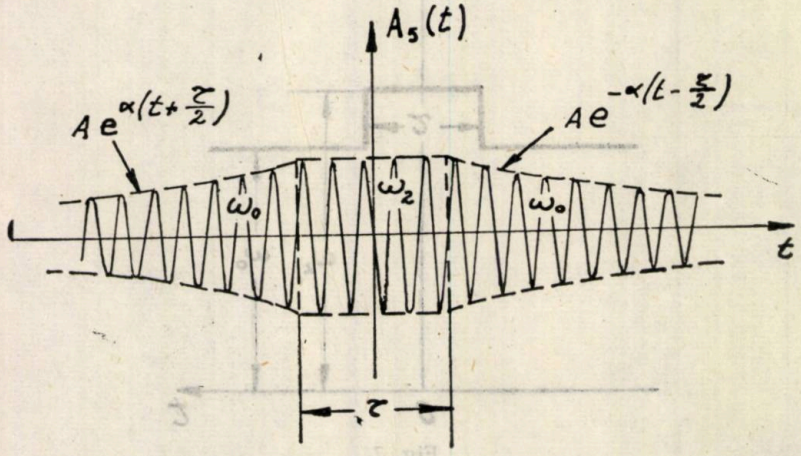



Fig. 8.

Calculînd funcția spectrală a acestei oscilații și făcînd apoi pe $\alpha$ să tindă către zero, se regăsește expresia (4.1).

Funcția spectrală a oscilației *MF* cu un impuls dreptunghiular trebuie calculată separat în cazul particular cînd

$$\tau \triangle \omega = k\pi$$

În acest caz oscilația poate fi pusă sub forma:

$$F_4(t) = A\,e^{j(\omega_0 t + \varphi_0 + k\pi)} + F_6(t)$$

funcția $F_6(t)$ este diferită de 0 numai în intervalul $-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$, unde are expresia $F_6(t) = A\,e^{j(\omega_2 t + \varphi_0)} - A\,e^{j(\omega_0 t + \varphi_0 + k\pi)}$

Întrucît funcția $F_6(t)$ îndeplinește condițiile lui Dirichlet, i se poate calcula direct funcția spectrală.

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_6(t)\,dt = 4A \triangle \omega \frac{\sin\,(\omega - \omega_2)\frac{\tau}{2}}{(\omega-\omega_2)(\omega-\omega_0)} e^{j\varphi_0} \qquad (4.2)$$

Deci, în cazul particular considerat, oscilația *MF* se compune dintr-o oscilație armonică nemodulată, la care se adaogă oscilația avînd funcția spectrală (4.2). Aceasta se deosebește de (4.1) prin aceea că este finită la toate frecvențele (inclusiv $\omega = \omega_0$).

În fig. 9 sînt reprezentate spectrele oscilației modulate în frecvență cu un impuls dreptunghiular, pentru diferite durate ale impulsului.

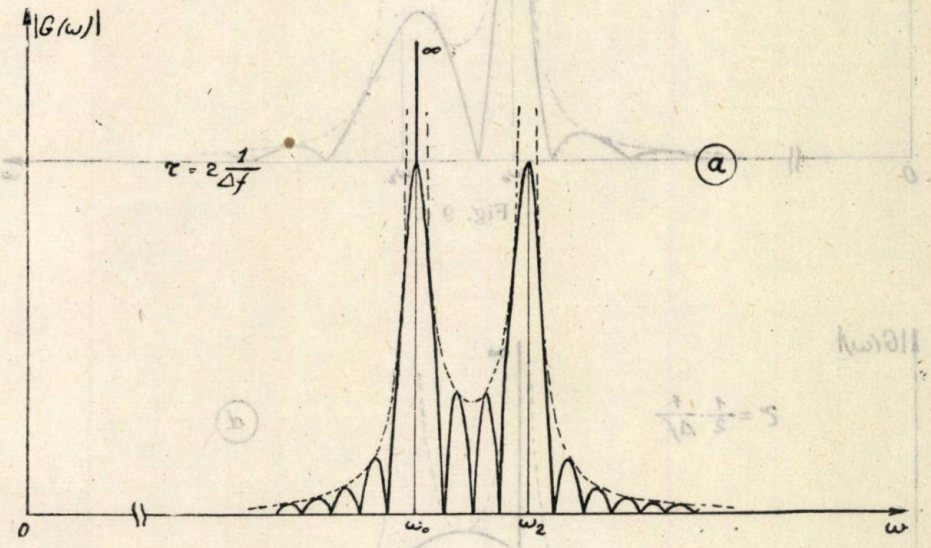



Fig. 9 a.

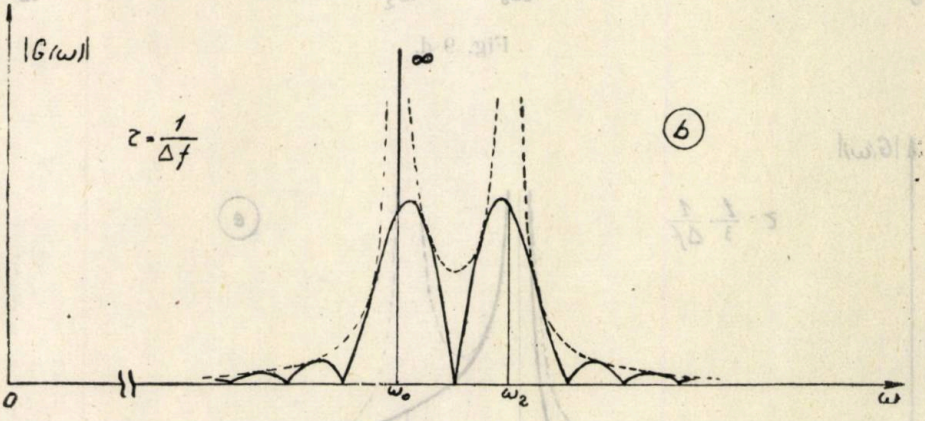



Fig. 9 b.

Se vede că lărgimea spectrului depinde în primul rînd de deviația de frecvență $\Delta\omega$ și în măsură mult mai mică de durata $\tau$ a impulsului.

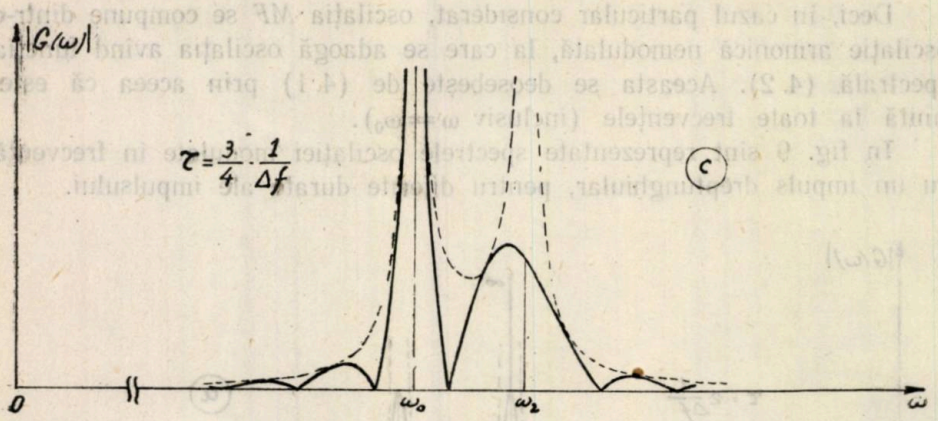



Fig. 9 c.

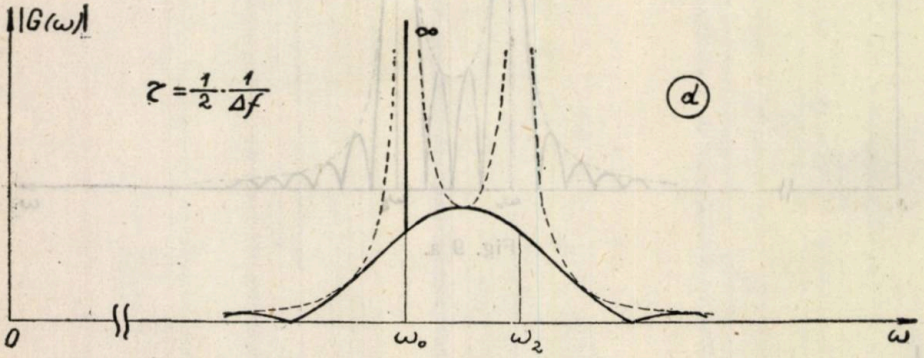



Fig. 9 d.

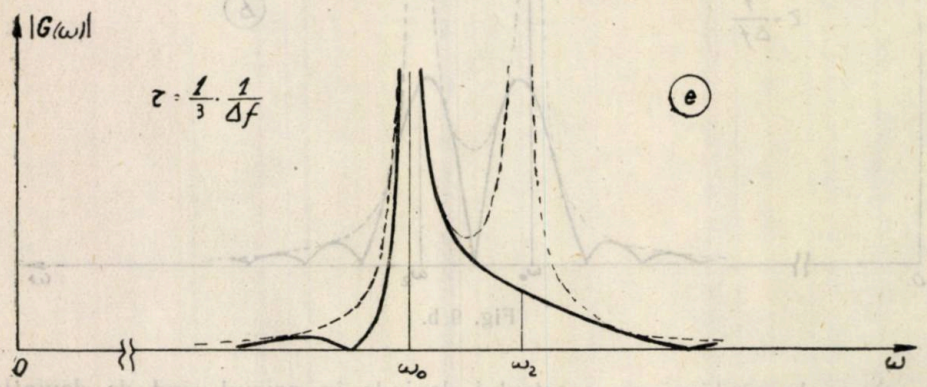



Fig. 9 e.

5. *Oscilația modulată în frecvență cu impulsul unitar.*

Acest caz prezintă analogie cu caracterul unor perturbații. Se poate deduce funcția spectrală a oscilației din expresia (4.1) ținînd seama că, la limită:

$$\tau \to 0; \quad \Delta\omega \to \infty; \quad \tau \Delta\omega = \Phi_0 = \text{const.}$$

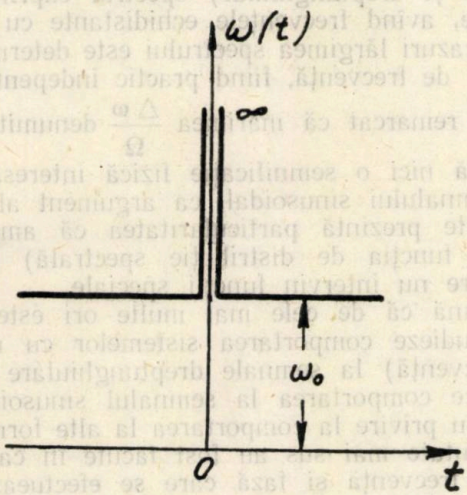



Fig. 10.

Se obține:

$$\boxed{G(\omega) = 2A \frac{\sin \Phi_0}{\omega - \omega_0} e^{j\varphi_0}} \tag{5.1}$$

Se vede că, spre deosebire de cazul modulației în amplitudine, funcția spectrală nu are ordonatele proporționale cu aria impulsului. Aici aria impulsului e reprezentată prin produsul $\Phi_0 = \tau\Delta\omega$ și pentru $\Phi_0 = k\pi$ efectul perturbației este nul.

6. *Relația între spectrele funcțiilor de timp complexe și reale*

Avînd funcția spectrală $G_F(\omega)$ a unei funcții complexe de timp $F(t)$, se poate obține funcția spectrală $G_A(\omega)$ a funcției reale $A(t) = \text{Re}[F(t)]$ în baza relației:

$$G_A(\omega) = \frac{G_F(\omega) + G_F^*(-\omega)}{2}$$

În cazurile oscilațiilor de înaltă frecvență modulate, $G_F(-\omega)$ poate neglijat pe lîngă $G_F(\omega)$, așa încît practic avem:

$$G_A(\omega) \cong \frac{G_F(\omega)}{2} \quad \text{pentru } \omega > 0$$

Relații analoage sînt valabile pentru oscilațiile cu spectru discret.

*Concluzii.*

În cazul modulației de amplitudine, spectrul datorit semnalului dreptunghiular este mai complicat și ocupă o bandă mult mai largă decît spectrul datorit unui semnal sinusodal. În cazul oscilațiilor modulate în fază sau frecvență, deosebirea nu este atît de marcată. Pentru ambele semnale (sinusoidal și dreptunghiular) spectrul cuprinde un număr infinit de componente, avînd frecvențele echidistante cu frecvența de modulație. În ambele cazuri lărgimea spectrului este determinată în principal de deviația maximă de frecvență, fiind practic indepentă de frecvența de modulație. Este de remarcat că mărimea $\frac{\Delta\omega}{\Omega}$ denumită „indice de modulație" nu prezintă nici o semnificație fizică interesantă, ea intervine numai în cazul semnalului sinusoidal, ca argument al funcțiilor Bessel.

Cazurile studiate prezintă particularitatea că amplitudinile componentelor (respectiv funcția de distribuție spectrală) au expresii algebrice simple, în care nu intervin funcții speciale.

Aceasta înseamnă că de cele mai multe ori este mai indicat (și mai comod) să studieze comportarea sistemelor cu modulație unghiulară (fază sau frecvență) la semnale dreptunghiulare decît la semnale sinusoidale, deoarece comportarea la semnalul sinusoidal nu dă nici o informație în plus cu privire la comportarea la alte forme de semnal.

Calculele prezentate mai sus au fost făcute în cadrul studiilor privind modulația de frecvență și fază care se efectuează la catedra de Radiocomunicații din Institutul Politehnic București, sub conducerea profesorului Gh. Cartianu.

*Catedra de Radiocomunicații*
*Institutul Politehnic București*

## BIBLIOGRAFÎE

1. *Cartianu Gh.* — Bazele radiotehnicei. Editura Institutului Politehnic București (1952).
2. *Harkevici A. A.* — Spektri i Analiz. Moscova—Leningrad (1952). Editura de stat pentru literatură tehnică teoretică.
3. *Manaev E. I.* — O șirine polosi pri priiome ciastotno—modulirovannîh signalov, neobhodimoi dlia otsutsviia nelineinîh iskajenii. Radiotehnika Nr. 5 (1948), 54—61.

## СПЕКТРЫ КОЛЕБАНИЙ С ЧАСТОТНОЙ И ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ПРИ ПРЯМОУГОЛЬНОМ СИГНАЛЕ

(Краткое содержание)

Исследуются спектры колебаний с частотной и фазовой модуляцией, при прямоугольном периодическом и импульсном сигнале.

Ширина спектра практически определяется значением максимального отклонения частоты. Длительность и частота повторения импульсов мало влияют на ширину спектра.

При рассматривании систем *ЧМ* и *ФМ*, автор предлагает применение прямоугольного сигнала вместо синусоидального, так как это приближается к реальным условиям работы системы и упрощает исследования (спектральное распределение быражается без специальных функций). Случай синусоидального сигнала не дает дополнительных указаний относительно работы системы при других формах сигнала.

## FREQUENCY SPECTRA FOR FREQUENCY-MODULATED AND PHASE-MODULATED WAVES WITH SQUARE WAVE SIGNALS AND SQUARE PULSES

*Summary*

The bandwidth of the spectrum depends practically only on the maximum frequency deviation. The pulse width and rate has only a slight influence on the spectrum bandwidth.

The author suggests thé use of the square wave signal instead of the sine wave signal in investigating the *FM* und *PM* systems. The square wave signal involves a simpler mathematical apparatus (no special functions) and comes nearer to the actual work of the system with phone or cw modulation. The sine wave signal does not furnish supplementary information, concerning the work of the *FM* system when other signal waveforms are present.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

621.396.616

# GENERATOR DE ÎNALTĂ FRECVENŢĂ PENTRU LIPIT TERMOPLASTE

de I. TEODORESCU, GH. RULEA, A. CENGEA

Utilizarea materialelor termoplaste în industrie şi în producerea bunurilor de larg consum ocupă un loc tot mai important în economia ţării noastre.

Odată cu aceasta, metodele de confecţionare a diferitelor obiecte din termoplase se perfecţionează.

Astfel în prima etapă, unele produse din aceste materiale, se executau prin cusătură; acum se trece la lipirea termoplastelor prin înaltă frecvenţă, prin care se elimină posibilitatea ruperii materialului slăbit prin cusătură.

Generatorii utilizaţi pentru lipirea termoplastelor, sînt generatori de înaltă frecvenţă cu tuburi electronice şi anume de tipul generatorilor de încălzit dielectrici, care produc un cîmp electric puternic în interiorul materialului ce trebue lipit.

Frecvenţa şi intensitatea cîmpului electric depind de calităţile electrice ale materialului. Valorile uzuale ale frecvenţei sunt cuprinse între 20 şi 80 MHz.

*Descrierea generatorului.* Aparatul este compus din generatorul de *oscilaţii* de înaltă frecvenţă, alimentat în curent continuu prin redresor, sistemul de automatizare şi sistemul de adaptare.

Oscilatorul este de tipul în trei puncte. Este echipat cu 2 tuburi *OT* 100, montate în paralel, pentru obţinerea curenţilor necesari.

Alimentarea oscilatorului se face în paralel printr-o bobină de şoc în valoare de 15 $\mu$ H, iar capacitatea de blocare de 100 p F. rezistă la tensiuni de aproximativ 3 KV.

Pentru controlul regimului de lucru, la prototip au fost prevăzute trei aparate de măsură pentru măsurarea tensiunii anodice continue $E_a$, a curentului anodic continuu $I_{a0}$ şi a curentului de grilă $I_{g0}$.

La tipul industrial acestea pot lipsi.

Alimentarea în curent continuu se face de la un redresor monofazic ce redresează ambele alternanţe, cu tuburile *D C G* 4/1000 cu ieşire de şoc.

Principalele date ale oscilatorului sînt:

Puterea utilă . . . . . 400 W.
Puterea absorbită . . . cca 700 VA.
Frecvența de lucru . . . . 25—30 MHZ.
Tensiune de alimentare (monofazic) 220 V.

*Adaptarea cu sarcina.* Datorită timpului scurt cît durează încălzirea materialului (în medie 2s) și a puterilor relativ reduse, nu a fost pusă problema adaptării în funcție de variația sarcinii în timpul încălzirii.

Într-o primă variantă s-a făcut adaptarea printr-un circuit serie. În acest caz se pleacă de la generator cu tensiune mică luată de pe priza circuitului oscilant printr-un cablu de impedantă de 70 Ω. În serie cu electrozii ce formează capacitatea circuitului, se montează o bobină, a cărei valoare se reglează pînă ce cîmpul între electrozi este cel convenabil.

Acest sistem are dezavantajul, că se poate lucra în bune condițiuni numai pentru materialul pentru care a fost reglat și este potrivit pentru lucrul în serie pe același material și electrod.

S-a trecut la analiza soluției cu circuit derivație cu factor de calitate ceva mai scăzut pentru a păstra regimul de lucru cînd sarcina variază; această soluție a fost adoptată.

Deoarece în timpul lucrului este posibil ca materialul să se tae și electrozii să vină în contact, s-a ales lungimea cablului astfel încît generatorul să lucreze în condiții bune, chiar în acest caz.

*Automatizare și protecție.* Pentru reglarea timpului de încălzire aparatul este prevăzut cu un releu de timp electronic.

Releul electronic lucrează cu un tub 6V6 și are în circuitul anodic un contact a cărui închidere și deschidere este comandată de tub în funcție de constanta de timp a circuitului *RC* din grilă.

Releul este alimentat în alternativ și nu necesită sursă specială de alimentare.

Spre deosebire de cazul normal de funcționare al unui tub electronic în regim de amplificare, la care tensiunile alternative de grilă și anodică sînt în antifază, aici tensiunile de grilă și pe placă sînt în fază. Acest fapt conduce la schimbarea dreptei dinamice de funcționare a tubului.

Cînd aparatul nu lucrează, tubul releului conduce datorită tensiunii alternative de grilă, care se suprapune peste negativarea dată de grupul RC și face să apară un curent pulsatoriu prin tub. Componenta continuă a curentului anodic trece prin înfășurarea releului, iar componentele alternative trec prin condensatorul montat în paralel cu înfășurarea releului.

Această situație corespunde caracteristicei dinamice I. (fig. 2).

Dacă se scurtcircuitează rezistența de grilă, tubul se blochează, datorită negativării de pe grupul *RC*; (Caracteristica dinamică II).

Releul se eliberează și comandă aplicarea tensiunii înalte.

Din acest moment condensatorul se descarcă prin *R*, caracteristica dinamică II se deplasează paralel cu ea însăși spre negativări mai mici,

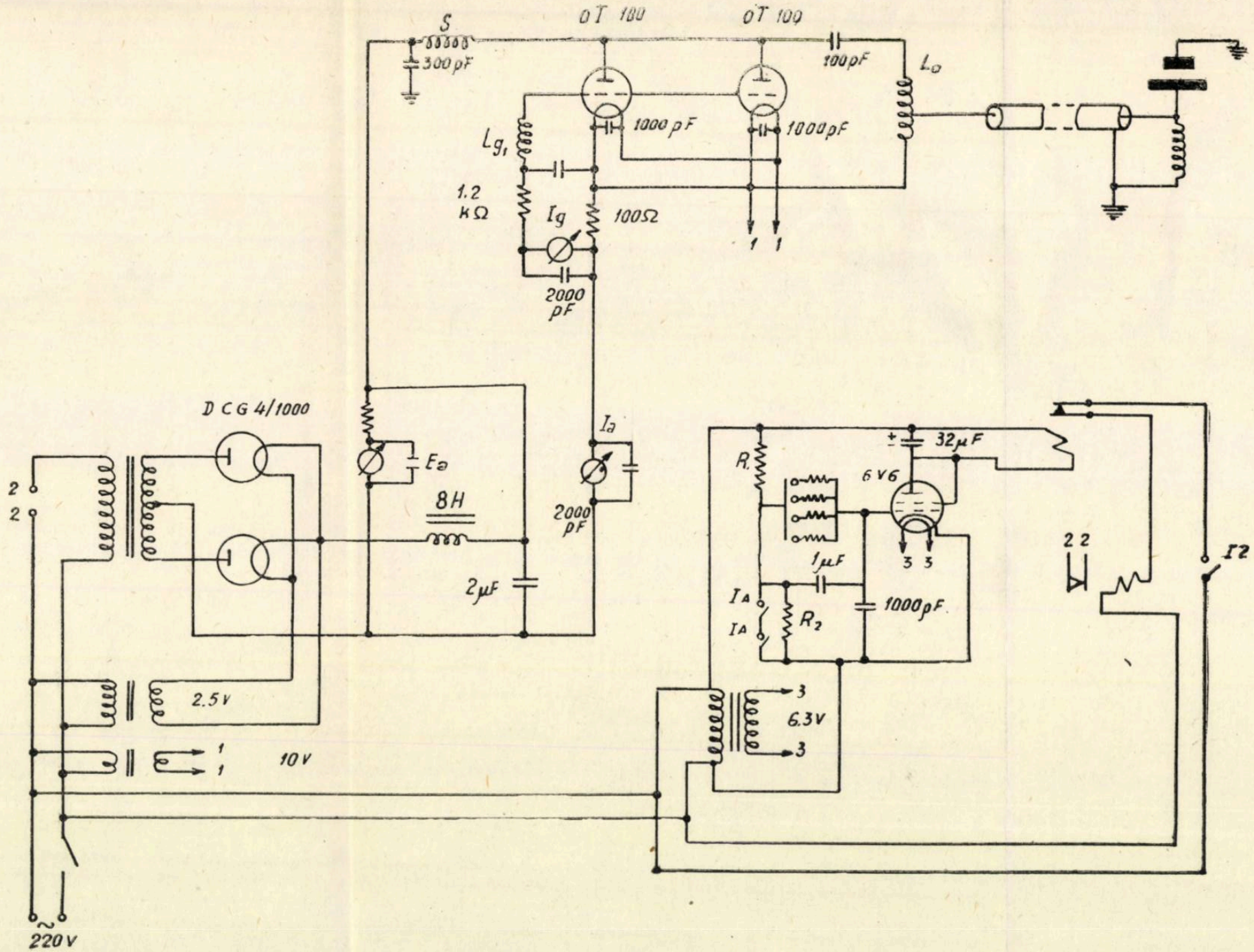
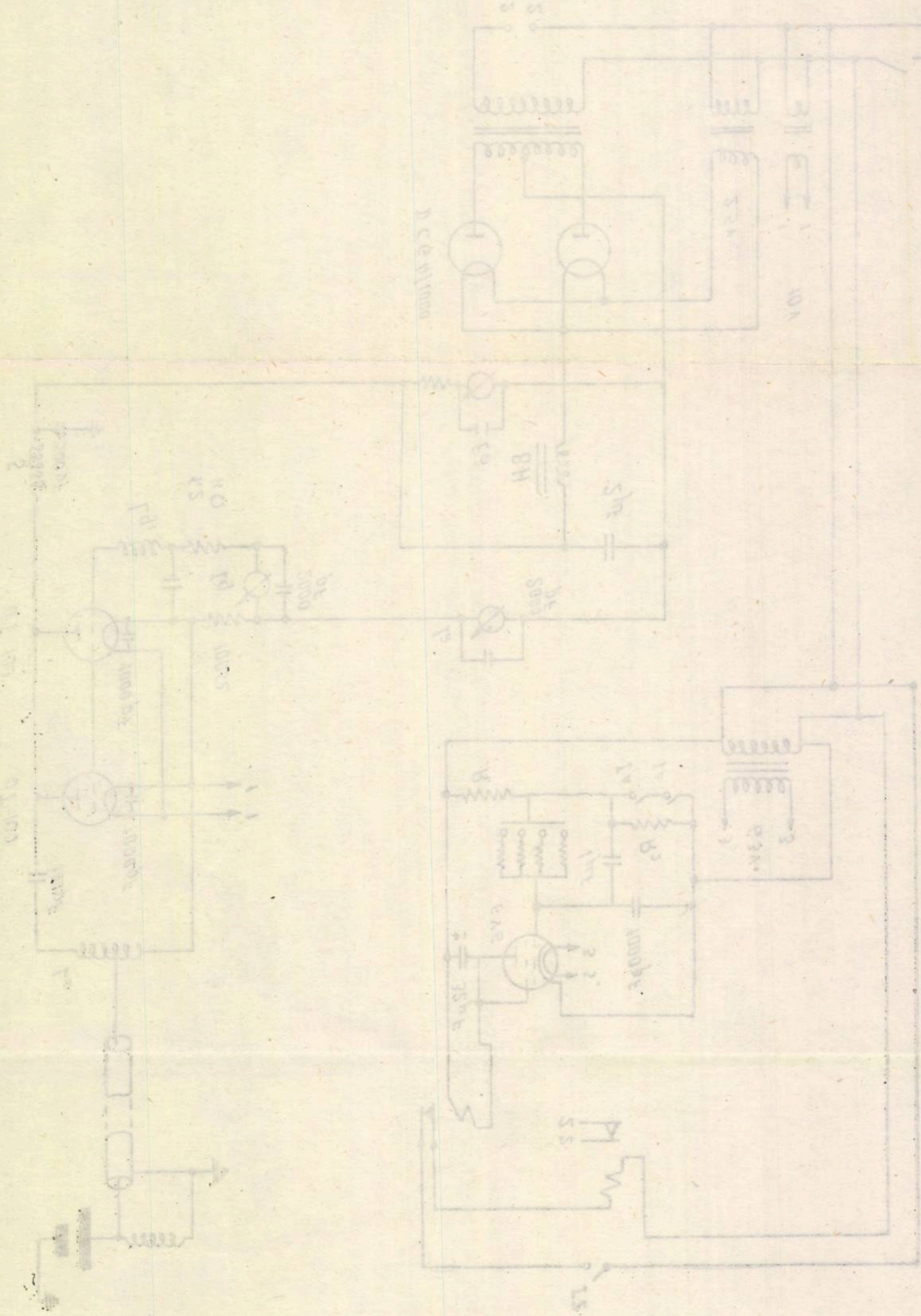

S
300 pF
OT 100
OT 100
100pF
$L_a$
1000 pF
1000pF
$L_{g_1}$
1.2 kΩ
$I_g$
100Ω
1 1
2000 pF
DCG 4/1000
$I_a$
$E_a$
8H
2000 pF
2μF
2 2
2.5V
1 1
10V
220V
32μF
$R_1$
6V6
1μF
3 3
$I_A$
$I_A$
$R_2$
1000pF
2 2
$I_2$
3
6.3V
3

Fig. 1



componenta continuă prin tub începe să crească și după un timp, caracteristica ajunge într-o poziție III, în care releul este din nou atras și comandă întreruperea tensiunii anodice; caracteristica continuă să urce pînă în poziția IV determinată de $E_g = 0$.

Cînd contactul *c* se deschide, caracteristica dinamică trece în poziția I cu o constantă de timp mai mică, fără a lucra asupra releului anodic.

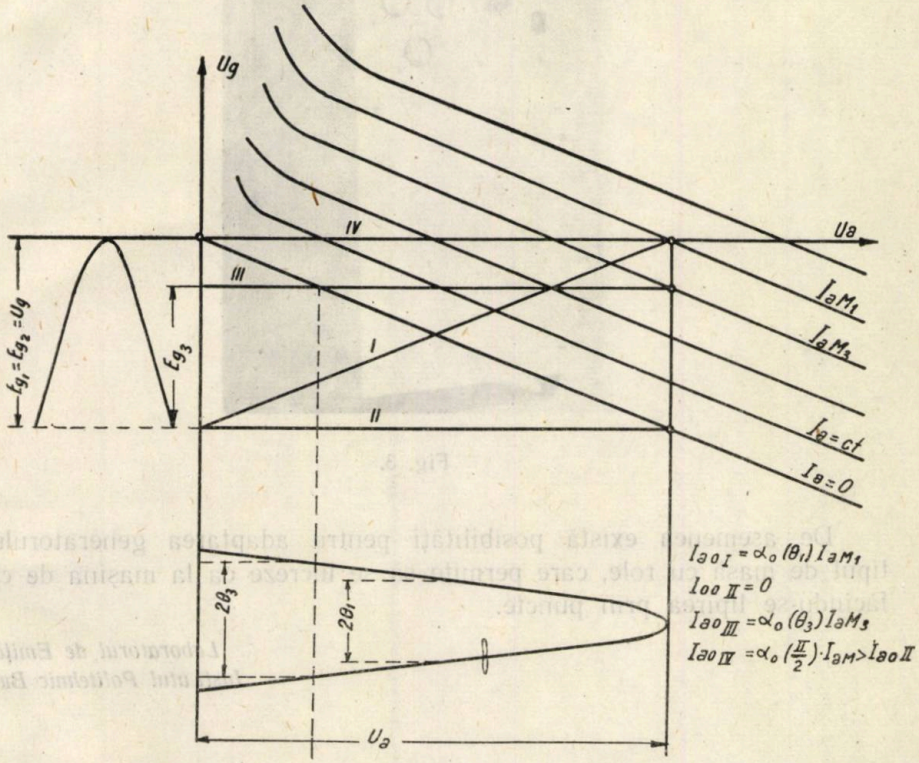



Fig. 2.

Dispozitivul este gata pentru un nou ciclu de funcționare.

Releul lucrează pe trepte de timp cuprinse între 0,5 și 5 secunde.

Contactul din circuitul anodic al tubului 6V6 comandă alimentarea generatorului prin intermediul unui întrerupător cu mercur care suportă curentul anodic.

Pentru a evita accidente de muncă sistemul intră în funcțiune numai dacă ambele butoane de pe masa de lucru sînt apăsate (dacă muncitorul are ocupate ambele mîini).

Aparatul este prevăzut cu întrerupător automat de protecție.

*Posibilități de aplicare.* Cu mașini de lipit temoplaste de tipul celei realizate pot fi organizate în întreprinderile chimice, care lucrează cu termoplaste, secții de confecționare a diferitelor produse de larg consum

În cazul utilizării pentru producție de mare serie este posibil să se regleze cîte o mașină pe tip de produs asigurîndu-se un bun coeficient de utilizare al mașinii.

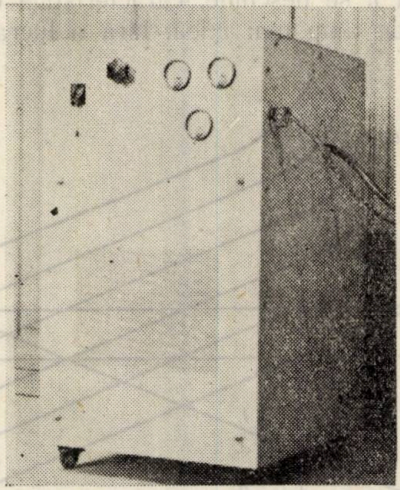


Fig. 3.

De asemenea există posibilități pentru adaptarea generatorului la tipul de masă cu role, care permite să se lucreze ca la mașina de cusut, făcîndu-se lipirea prin puncte.

*Laboratorul de Emițători*
*Institutul Politehnic București*

## ГЕНЕРАТОР ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

(Краткое содержание)

Краткое описание генератора высокочиастотных колебаний, предназначенного для обработки термопластических материалов

Автогенератор собран на двух лампах *OT*-100, которые получают питание от двухполупериодного выпрямителя с двумя газотронами *DCG* 4 | 1000.

Подача высокочастотной энергии на рабочие электроды осуществляется через коаксиальную пару, длина которой выбрана несколько меньше четверти длины волны, что не позволяет опасное нарастане анодного тока при коротком замыкании между электродами,

Время нагревания определяется электронным реле времени, постоянная которого может быть изменепа между 0,5 сек и 10 сек.

## GENERATEUR POUR LA SOUDURE DES THERMOPLASTIQUES, PAR LES PARTES DIELECTRIQUES

(Résumé)

On décrit le generateur a haute frequence destiné a souder des materiaux thérmoplastiques. C'est un oscillateur de puissance avec deux tubes *OT* 100, alimenté par un redresseur à double alternance, avec des gasotrons *DCG* 4/1000.

Le couplage avec les electrodes à souder, est realisé par une ligne coaxiale un peu plus courte que le quart d'onde, a fin que des court-circuits entre les electrodes, ne puissent pas déterminer une augmentation excessive du courant anodique. Le temp de chauffage peut être choisi a l'aide d'un relais electronique dont la constante de temps este réglable netre 0,5 et 10 sec.

## CESAR PARTENI ANTONI

**1900 — 1956**

*În ziua de 12 decembrie 1956 a încetat din viață Prof. Dr. Ing. CESAR PARTENI, după 35 de ani închinați carierei didactice și cercetărilor științifice, din care 30 de ani la Institutul Politehnic Iași.*

*Dotat cu un înalt spirit științific, cu aptitudini de foarte bun organizatori, așa cum din plin a dovedit-o prin activitatea desfășurată în cele trei institute de învățământ tehnic superior pe care le-a condus, Prof. CESAR PARTENI a continuat tradiția de muncă, cinste și largă omenie a înaintașilor săi.*

*Urmaș al unei vechi familii de cărturari moldoveni, originari din Șerbăuții Bucovinei, el a moștenit, de la strămoșii săi, alesele sale calități.*

*Bunicul său, Parteni Antoni, a fost colaborator al lui Gh. Asachi la prima litografie din Moldova, unde a întocmit cea dintîi hartă de ansamblu a Principatelor—Unite și apoi a fost profesor la Academia Mihăileană.*

*Fratele bunicului său, Ion Antoni Dirzeu, a fost şi el profesor la şcoala Trei Ierarhi şi la Academia Mihăileană.*

*Înalta tradiţie de cultură, dragoste de muncă şi calităţi didactice ale acestor vrednici intelectuali ai şcolii moldovene, Prof. Cezar Parteni Antoni a îmbogăţit-o printr-o rodnică activitate multilaterală şi printr-o adîncă omenie.*

*CESAR PARTENI ANTONI s-a născut la Iaşi, la 23 iunie 1900; a terminat Liceul Internat din Iaşi în 1918 şi a urmat cursurile Institutului Electrotehnic de pe lîngă Universitatea din Iaşi, devenind inginer electrotehnic în 1922.*

*Chiar din timpul studiilor s-a remarcat ca un element merituos, ceea ce a făcut ca în 1921 să fie numit asistent la Catedra de Electricitate. Din 1921 pînă în 1956 a funcţionat neîntrerupt în învăţămînt, trecînd prin toate gradele didactice.*

*În 1924, obţinînd o bursă, pleacă la Nancy în Franţa, unde în 1925, sub conducerea Prof. A. Mauduit îşi trece teza de doctorat cu una din cele mai dificile probleme ale maşinilor electrice: „Comutaţia maşinilor de curent continuu". După aceasta, în decursul anilor, îşi continuă specializarea la Politehnica din München, la fabricile Brown-Boweri, AEG, Siemens, Alsthom, etc.*

*În 1918—1922, ca student în Iaşi, a activat în grupul cu idei de stînga, găsindu-se tot timpul în luptă cu grupul cuzist, care se întărea pe atunci. A colaborat la ziarul „Îndrumarea", care a apărut în 1921 timp de cîteva luni, fiind apoi interzis de poliţie. A colaborat în acea epocă la cercurile studenţeşti conduse de Timotei Marin, fraţii Darevici, Cernăuţeanu, etc. Activitatea aceasta democratică din anii studenţiei, a rămas caracteristică pentru CESAR PARTENI, făcîndu-l să se găsească în fruntea tuturor mişcărilor progresiste, iniţiate în învăţămîntul superior din Iaşi.*

*Activitatea didactică şi ştiinţifică şi-a desfăşurat-o în domeniul maşinilor electrice, fiind numit în 1925 conferenţiar, iar în 1939 profesor. În 1944 a fost numit Rector al Institutului Politehnic din Iaşi, funcţionînd pînă în anul 1950. În această perioadă a organizat de trei ori laboratorul de Maşini electrice; o dată la Iaşi în 1939, a doua oară la Cernăuţi în 1942 şi a treia oară din nou la Iaşi, în 1945. În 1951 a trebuit să părăsească oraşul Iaşi, fiind desemnat să înfiinţeze şi să conducă Institutul de Maşini şi aparate electrice din Craiova, după care a trecut în conducerea Institutului Politehnic din Bucureşti, ca Prorector şi apoi ca Rector.*

*În această ultimă perioadă a funcţionat mai întîi ca profesor de Maşini electrice la Craiova, unde a organizat un nou laborator de maşini electrice, cu utilaj modern, şi apoi ca profesor de Maşini electrice speciale la Bucureşti, unde a organizat unicul laborator de maşini electrice speciale din ţară.*

*Dată fiind complexitatea formării sale ştiinţifice, Prof. CESAR PARTENI nu a fost desprins nici un moment de problemele practicii inginereşti, funcţionînd din 1925 pînă în anul 1944 ca inginer şi apoi consilier la Uzina Electrică din Iaşi.*

*În domeniul activităţii ştiinţifice a depus o muncă intensă, ilustrată prin aproximativ 90 publicaţii din aproape toate domeniile specialităţii electrotehnice. Dintre lucrările ştiinţifice mai însemnate citäm lucrarea de doctorat asupra comutaţiei maşinilor de curent continuu, în care se arată*

*pentru prima dată fenomenele reale ce se petrec în secțiunea scurtcircuitată de perii și rolul periilor formate din cărbuni moi. Rezultatele obținute sînt citate în tratatele scrise de A. Mauduit, De Pistoye, M. Liwschitz și elogiate de neumărați cercetători științifici în lucrările lor, ca R. Mayeur, Th. Łehman, Lamboeuf, etc.*

*În domeniul proiectării mașinilor de curent continuu a publicat lucrări privitoare la calculul polilor auxiliari, alegerea numărului de poli, alegerea întrefierului, precum și la proiectarea mașinilor de curent continuu cu orice număr de înfășurări de excitație.*

*În domeniul mașinilor asincrone a adus contribuții importante în aplicarea teoriei cuadripolului, calculului întrefierului, asupra alegerii tensiunii și frecvenței de alimentare precum și în explicarea fenomenului Georges la unele aplicații practice din exploatarea mașinilor asincrone.*

*La mașinile sincrone a studiat funcționarea lor la încărcări nesimetrice, iar în privința redresoarelor cu vapori de mercur a dat o formulă generală ce leagă căderile de tensiune de partea alternativă și partea redresată.*

*O parte din lucrările scrise de Prof. CESAR PARTENI se adresează protecției contra supraintensităților și supratensiunilor, a tehnicii securității, a transformatoarelor de curent și a măsurii puterilor în curent alternativ. L-a preocupat mult problema transformatoarelor antirezonante și a ameliorării factorului de putere.*

*De curînd a apărut cursul său de Mașini electrice speciale, cea dintîi lucrare de sinteză de acest gen din literatura tehnică și didactică de specialitate a țării noastre și după cît se pare, și de peste hotare.*

*Din lucrările cu caracter general se remarcă acelea ce tratează problema organizării învățămîntului superior, unde se dau soluții valabile pînă în prezent.*

*În cadrul Academiei R.P.R., la filiala din Iași, a organizat primul colectiv de cercetări din domeniul electrotehnicii și energeticii, iar apoi la București a colaborat activ la Institutul de Energetică al Academiei.*

*Prof. CESAR PARTENI a avut ca o preocupare deosebită ridicarea elementelor noi în domeniul activității științifice, reușind să formeze numeroase cadre apte de a duce o serioasă muncă de cercetare în domeniul electrotehnicii, conducînd printre altele trei lucrări de doctorat. Prin numărul și profunzimea problemelor științifice cercetate a reușit să creeze o școală de mașini electrice.*

*În activitatea didactică avea o grijă deosebită atît în predarea cursurilor, care erau ținute la un nivel ridicat și direct legate de tehnică, cît și în grija ca studenții să aibă la dispoziție cursuri litografiate. În prezent cea mai mare parte a cadrelor didactice de la Facultatea de Electrotehnică și Mecanică din Iași sau de la Institutul de Mașini și aparate din Craiova sînt foști elevi ai săi, care au împrumutat cîte ceva din bogata sa experiență.*

*Ca organizator, cine poate uita faptul că laboratorul de Mașini electrice din Iași este unul din cele mai bune din țară, sau faptul că în împrejurări grele determinate de ultimul război mondial, printr-o muncă deosebită a reușit să pună pe picioare Institutul Politehnic din Iași. În anul 1951—1954 a reușit să înființeze și să doteze un institut nou electrotehnic la Craiova, iar în ultimii ani la București să conducă cu succes Institutul Politehnic.*

*Deşi timpul pe care l-a petrecut în fruntea celui mai de seamă Institut tehnic de învăţămînt superior din ţară a fost destul de scurt, totuşi el a reuşit să-şi lege numele şi aici de o serie de realizări frumoase, cum este de pildă reapariţia Buletinului acestui Institut, organizarea pe baze noi a practicii în producţie, organizarea sesiunii ştiinţifice comemorative a cadrelor didactice din iunie 1956, extinderea unor serii de laboratoare, activizarea cercurilor ştiinţifice studenţeşti. Activitatea sa rodnică dusă pînă în clipa în care moartea i-a întunecat conştiinţa, a fost întreruptă brusc, în plină desfăşurare.*

*Prof. CESAR PARTENI, prin munca sa neobosită şi grija deosebită faţă de om, a ştiut să se facă pretutindeni iubit şi respectat ca unul din cele mai bune exemple de urmat în munca didactică, ştiinţifică şi de organizare în institutele de învăţămînt superior.*

*Institutul Politehinc din Iaşi a pierdut un coleg şi un mare sfătuitor, care niciodată nu a uitat că din cei 36 ani de activitate în învăţămînt, 30 i-a petrecut muncind şi sprijinind năzuinţele spre mai bine ale acestui institut. Facultatea de Electrotehnică a pierdut pe omul care a ştiut să ridice prestigiul electrotehnicii româneşti şi în special a celei din Iaşi.*

*Cei de la Catedra de Maşini electrice din Iaşi, au pierdut pe părintele lor spiritual, căruia îi datorează totul.*

*Acelaşi lucru pot să-l spună şi cei de la fosta Catedră de Maşini şi acţionări electrice din Bucureşti, mai ales aceia care au avut norocul să se bucure de îndrumarea sa nemijlocită.*

*Tuturor le rămîne ca amintire vie, exemplul său, modul cum a înţeles să ducă munca didactică şi ştiinţifică, marea lui dragoste pentru oameni.*

Prof. V. CORLĂŢEANU
Catedra de Maşini Electrice
Institutul Politehnic Iaşi

Asistent SOFAN EUGEN
Catedra de Maşini Electrice
Institutul Politehnic Bucureşti

## LISTA LUCRĂRILOR ŞTIINŢIFICE PUBLICATE DE CESAR PARTENI ANTONI

1. *Cărbunele albastru,* Rev. ştiinţifică V.Adamachi — 1922, vol. VIII, pag. 82—89.
2. *Ampère,* Rev. şt. V. Adamachi, 1923, vol. IX, pag. 66.
3. *Tensiunile foarte înalte,* Rev. şt. V. Adamachi, vol. IX, pag. 133.
4. *O vizită la laboratorul Ampère,* Rev. şt. V. Adamachi, 1924, vol. X, pag. 300—303.
5. *Influence de l'excitation sur la forme de la courbe d'une tension alternative dans une commutatrice.* Ann. sc. Univ. Iassy, 1927, t. XIII, fasc. 1—2, pag. 38—44.
6. *Contribution à l'étude expérimentale et théorique de la commutation dans les machines à courant continu.* 60 pag, 48 fig., R.G.E., Paris 1925. O parte din această lucrare a apărut în Revue Générale de l'Electricité, 29 aug., 5 şi 11 sept. 1925, t. XVIII, p. 34—3359, 393—406 şi 439—445. Lucrare de doctorat.
7. *Sur la protection contre les surintensités d'un réseau composé de trois centrales par des lignes de jonction, comportant ou non des dérivations.* Ann. Sc. Univ. Iassy, 1925, t. XIV, fasc. 1—2, pag. 28—36.
8. *Locomotiva cu turbină de vapori,* Rev. şt. V. Adamachi, 1925, vol. XI, pag. 40—42.
9. *Sur la distribution du champ de l'induit dans une machine à courant continu.* Ann. Sc. Univ. Iassy, 1925, t. XIV, fasc. 1—2, pag. 36—46.
10. *Din progresele electrotehnicei,* Rev. şt. V. Adamachi, 1926, vol. XII, pag. 56—62.
11. *Sur la forme des pôles auxiliaires dans une machine à courant continu.* Ann. Sc. Univ. Iassy, 1926, t. XIV, fasc. 3—4, pag. 274—279.
12. *Organizarea învăţământului tehnic superior,* Revista Critică, 1927, pag. 189—208.
13. *Selecţiunea în protecţia reţelelor contra supraintensităţilor,* 44 pag., publicaţia nr. 3 a Inst. Romîn de Energie (I.R.E.), Buc. 1927.
14. *Unificarea motoarelor de tracţiune,* 49 pag. publicaţia I.R.E. nr. 22, Bucureşti, 1927.
15. *Contribution à l'étude de la commutation dans les machines à courant continu,* 26 pag. publicaţia I.R.E. nr. 10, Bucureşti 1928, lucrare de docenţă.
16. *La protection contre les surintensités d'un réseau composé de plusieures centrales,* 21 pag. publicaţia I.R.E. nr. 12, Bucureşti 1931.
17. *Un moyen d'utiliser en courant triphasé les compteurs pour courant monophasé sur deux ponts,* Ann. Sc. Univ. Iassy, 1931, t. XVII, fasc. 1—2, pag. 118—129.

18. *Viaţa şi opera lui Edison,* Rev. şt. V. Adamachi, 1932, vol. XVIII, pag. 4—13.
19. *L'enseignement électrotehnique en Roumanie,* Raport nr. 19, prezentat Secţiei a 13-a Congresului Internaţional de Electricitate din Paris, 1932, vol. XII, pag. 559—566.
20. *L'influence du nombre de pôles sur le projet d'une machine à courant continu,* Revue Générale de l'Electricité, 1933, t. XXXIII, pag. 235—245.
21. *Sur la commutation d'une machine à courant continuu,* Ann. Sc. Univ. Iassy, 1933, t. CVIII, fasc. 3—4, pag. 290—296.
22. *Une relation générale entre les chutes de tension du circuit redressé et du circuit alternatif dans un rédresseur à vapeur de mercure.* Ann. Sc. Univ. Iassy, 1934, t. XX, fasc. 1—4, pag. 336—340.
23. *Tensiunile foarte joase,* Bul. I.R.E., 1934, An. II, nr. 1, pag. 71—78 şi Bul. Comitetului Electrotehnic Romîn (Bul. C.E.R.), vol. I, pag. 204—220.
24. *Accidents causés par les installations à basse tension,* Bul. I.R.E., 1935, An III, nr. 1, pag. 270—277.
25. *Un accident datorit curentului electric* (în colaborare cu Ing. S. Oprişor), Bul. I.R.E., 1935, An III, nr. 1, pag. 221—223.
26. *Un commutateur pour la mesure des puissances dans les systèmes polyphasés,* Bul. I.R.E., 1935, An III, nr. 4, pag. 962—969.
27. *Le nombre de pôles dans le projet d'une machine à courant continu,* (în colaborare cu ing. P. Ştiubei), Bul. I.R.E., 1936, An IV, nr. 1, pag. 60—92.
28. *Le nombre de pôles d'une machine à courant continu,* C. R. de l'Ac. de Sciences de Roumanie, 1936, vol. 1, nr. 3, pag. 153—157.
29. *Invăţămîntul tehnic superior la Iaşi,* (în colaborare cu Dr. C. Andreescu), Bul. A.G.I.R., 1936, pag. 210—300, Congresul A.G.I.R. oct. 1936, Iaşi.
30. *Les pertes dans un moteur asynchrone et la tension d'alimentation,* (în colaborare cu ing. V. Georgescu), C. R. de l'Ac. des Sciences de Roumanie, 1937, vol. II, nr. 1, pag. 37—49.
31. *Energiile naturale,* Revista Fundaţiilor Regale, ianuarie 1937, pag. 135—149.
32. *25 de ani de învăţămînt tehnic superior la Iaşi,* Însemnări ieşene, 1937, vol. I, pag. 145—147.
33. *Organizarea ştiinţelor aplicate la Academia Mihăileană,* în colaborare cu Dr. C. Andreescu; Însemnări ieşene, 1937, vol. I, pag. 530—534.
34. *Anul tehnic 1937,* Însemnări ieşene, 1937, vol. V, pag. 273—308.
35. *Contribution à l'étude du rendement d'un moteur asynchrone,* (în colaborare cu ing. V. Georgescu), Bul. I.R.E., 1938, An VI, nr. 2, pag. 442—462.
36. *Iluminatul oraşelor şi apărarea anti-aeriană,* Romînia Militară, 1938, pag. 103—110.
37. *Comanda la distanţă aplicată la iluminatul oraşelor în legătură cu apărarea anti-aeriană,* Bul. Soc. Politehnice din Romînia, 1938, An III, pag. 300—316.
38. *Sur le rendement d'un moteur asynchrone,* (în colaborare cu ing. V. Georgescu), publicat în volumul comemorativ tipărit cu ocazia Congresului al XX-lea Elektrotehnichysvaz cekoslovensy, Praga, 1938, pag. 3—10 şi în Bul. A.P.D.E., vol. VII, pag. 2—9, sub titlul: *Asupra randamentului unui motor asincron.*

39. *Les partes dans un moteur asyncrone et le fréquence de la tension d'alimentation,* (în colaborare cu ing. V. Georgescu), C. R. de l'Institut des Sciences de Roumanie, 1939, vol. II, nr. 1 (1939), pag. 116—118 și Bul. I.R.E., 1938, An VI, nr. 2, pag. 584—587.
40. *La commutation et le nombre de pôles dans une machine à courant continu,* Bul. I.R.E. ,An VI (1939), pag. 774—782.
41. *Aperçu sur le developpement de l'enseignement tehnique supérieur en Moldavie,* (în colaborare cu Dr. C. Andreescu), C. R. Inst. Sc. de Roumanie, nr. 3, 1939, pag. 703—708.
42. *Utilizarea gunoaielor drept combustibil,* I.R.E., 7, 1939, pag. 265—291.
43. *Cronica tehnică 1938—1939,* Însemnări ieșene, An V, pag. 21.
44. *Etica profesiunii de inginer,* Însemnări ieșene, An V, 1940, 21 pag.
45. *Transportul la distanță a energiei electrice sub curent continuu de înaltă tensiune,* Bul. I.R.E., An VIII, 1940, pag. 630—649.
46. *La théorie du quadripôle appliquée au moteur d'induction,* C. R. Ac. Sc. Roumanie, t. V, 1941.
47. *Serviciul de contoare al Soc. Comunale de electricitate din Iași* (15 ani de activitate), Bul. A.P.D.E., t. XI, 1942.
48. *Le fonctionnement d'une machine à courant continu quand la vitesse varie,* (în colaborare cu N. Popinceanu) ,Bul. Ec. Polyt. Bucarest, t. XIII, 1942, pag. 447—465.
49. *Sur les possibilités de changement de la vitesse d'une machine à courant continu,* (în colaborare cu G. d'Albon), Bul. I.R.E., t. X, 1942, pag. 883—900.
50. *La variation de l'entrefer dans une machine à courant continu,* (în colaborare cu N. V. Boțan), Bul. St. Ac. Roumaine, t. XXV, 1943, pag. 531—550.
51. *Contribution expérimentale à l'étude du randament d'un moteur asynchrone,* (în colaborare cu V. Corlățeanu), Bul. Sc. Ac. Roumaine, t. XXVII, 1944, pag. 8—17.
52. *La théorie du quadripôle appliquée au moteur d'induction en cascade avec un compensateur de phase,* (în colaborare cu N. Boțan), C. R. Ac. Roumaine, 1945, pag. 374—378 și Bul. Politehnicei Gh. Asachi, Iași, vol. I. fasc, II, pag. 352—362.
53. *Politica energetică a Romîniei,* Ethos, 1945, pag. 78—91.
54. *Electrificarea Moldovei,* Lucrările celui de al XVI-lea Congres A.G.I.R., 1946, vol. I, pag. 3, 36 — 3, 37.
55. *L'influence de la variation de l'entrefer sur le fonctionnement d'un moteur d'induction polyphasé,* (în colaborare cu V. Corlățeanu), Bul. Ec. Polyt. Iassy, vol. I, 1946, pag. 155—158.
56. *Dotarea politehnicilor cu domenii, laboratoare, ateliere, etc., pentru cercetări și practică.* Lucrările celui de al XVI-lea Congres A.G.I.R., 1946, vol. III, pag. 8, 1—8, 3.
57. *Étude expérimentale sur le fonctionnement d'un moteur asynchrone (en fonction de la frequence),* (în colaborare cu V. Corlățeanu), Bul. I.N.C.T.I., 1946, pag. 89—103.
58. *Ce este tehnica?,* Ethos, t. III, nr. 3—4, 1946.
59. *Lupta pentru viteze tot mai mari,* Natura, 35, 1946, pag. 168—172.
60. *Energia eoliană,* pag. 23—28, Rev. St. V. Adamachi, 33, 1947, (în colaborare cu N. V. Boțan).

61. *Tracţiunea electrică,* (în colaborare cu A. Popovici), Rev. şt. V. Adamachi, 33, 1947.
62. *Perturbation produite par le fonctionnement d'un groupe moteur asynchrone triphasé-compresseur à piston sur l'intensité du courant absorbé au réseau,* (în colaborare cu V. Corlăţeanu şi V. Hanganu), Bul. Ec. Polyt. Iassy, 2, 1947, pag. 166—173.
63. *La longueur de l'entrefer dans un moteur synchrone polyphasé,* (în colaborare cu V. Corlăţeanu), Bul. Ec. Polyt. Iassy, 2, 1947, pag. 150—165.
64. *Sur la possibilité d'augmenter la puissance d'une machine à courant continu,* (în colaborare cu V. Corlăţeanu), Bul. Ec. Polyt. Iassy, 1, 1948, pag. 169—217.
65. *Curent continuu sau curent alternativ la liniile de transport de energie electrică la mare distanţă,* Rev. A.G.I.R., Electricitate, nr. 6, 1948, 26 pag.
66. *Producerea curentului continuu de înaltă tensiune,* Rev. A.G.I.R., Electricitate, nr. 2, 1949, pag. 73—84.
67. *Protecţia reţelelor de înaltă tensiune,* Rev. A.G.I.R., Electricitate, nr. 3, 1949, pag. 176—184.
68. *Transformatori asincroni de frecvenţă,* Lucrările sesiunii generale ştiinţifice, (în colaborare cu V. Corlăţeanu şi V. Hanganu), Academia R.P.R., iunie 1950, pag. 11.
69. *Învăţământul maşinilor electrice în R.P.R.,* Buletinul Ministerului Energiei Electrice nr. 8 ,1951.
70. *Contribuţiuni la calculul unei maşini de curent continuu cu mai multe depănări de excitaţie,* Studii şi cercetări ştiinţifice, (în colaborare cu V. Corlăţeanu), Acad. R.P.R., Filiala Iaşi, vol. II, 1951, pag. 97—111.
71. *Institutul de Maşini şi Aparate Electrice Craiova,* Rev. M.E.E., august 1952, pag. 40—43.
72. *Consideraţii asupra problemei supratensiunilor la transformatori,* Electrotehnica, 1953, nr. 11, pag. 1—6.
73. *Studiu tehnico-economic pentru ameliorarea factorului de putere.* Studii şi cercetări de energetică, Acad. R.P.R., t. III, 1953, pag. 195—221 şi Revue des sciences tehniques, t. II, 1955, pag. 153—162.
74. *Alternatoare trifazate încărcate nesimetric,* Energetica, 1954, pag. 157—165.
75. *Compensarea transformatoarelor de curent,* (în colaborare cu C. Boaru şi T. Ciubotaru), Electrotehnica, 1955, pag. 1—13.
76. *Incărcări nesimetrice la generatoarele sincrone,* Studii şi cercetări de energetică, t. V, 1955, pag. 161—190.
77. *Izolaţia transformatorului,* Studii şi cercetări de energetică, t. V, nr. 1—2, 1955, pag. 229—231.
78. *Studiu comparativ pentru producerea curentului continuu de mare intensitate,* Studii şi cercetări de energetică, t. V, nr. 3—4, 1955, pag. 489—507.
79. *Comportarea motorului de curent continuu cu excitaţie independentă la alimentare cu o tensiune mărită,* Studii şi cercetări de energetică, t. V, nr. 3—4, 1955, pag. 507—531 (în colaborare cu N. Ştefănescu).

80. *Contribuțiuni la calculul unei mașini de curent continuu cu mai multe depănări de excitație* (nota II), (în colaborare cu V. Corlățeanu), Studii și cercetări științifice, Acad. R.P.R., Filiala Iași, An VI, 1955, nr. 3—4, pag. 27—35.
81. *Contribution au calcul d'une dynamo à courant continu ayant plusieurs enroulements d'excitation,* (în colaborare cu V. Corlățeanu), Revue d'éléctrotechnique et d'énergtique, 1956, t. I, pag. 57—73.

## CURSURI UNIVERSITARE

1. *Teoria, calculul și construcția mașinilor electrice cu curent continuu* (litografiat), 734 pag., Iași, 1926, 1946 și 1948.
2. *Mașini sincrone,* (idem), 440 pag., Iași 1927 și 1949.
3. *Motori asincroni,* (idem), 154 pag., Iași 1928, 1946 și 1950.
4. *Transformatori,* 376 pag., Iași 1928, 1946 și 1952.
5. *Electrotehnica* (cursuri exploatare), (idem), 394 pag., Iași 1951.
6. *Redresori cu vapori de mercur,* (idem), 170 pag., 1946.
7. *M.K.S.A.* (cu un colectiv), (idem), 154 pag., 1950.
8. *Mașini electrice speciale,* 750 pag., 1957.

*Notă.* — În afară de cele citate mai sus, au rămas unele lucrări, pe care foștii colaboratori vor căuta să le dea publicității.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XVIII—1956; Fascicola 3—4

# INFORMAŢII

## ASPIRANŢII CARE ŞI-AU SUSŢINUT LUCRAREA DE DIZERTAŢIE IN CADRUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

| Nr. crt. | Numele şi pronumele candidatului | Titlul lucrării de dizertaţie | Conducătorul ştiinţific |
|---|---|---|---|
| 1 | Dascălu Silvia | Contribuţii la studiul naturii incluziunilor nemetalice din oţelul carbon calmat, în funcţie de factorii fizico-chimici din cuptorul Martin-bazic, | Prof. Rău Alexandru |
| 2 | Tripşa Iosif | Contribuţii la studiul experimental al vîscozităţii zgurilor bazice. | Prof. Rău Alexandru |
| 3 | Firoiu Constantin | Contribuţii la studiul mecanismului cromării poroase. | Prof. Dr. Ion Atanasiu |

Publicarea lucrărilor din sesiunea științifică comemorativă a cadrelor didactice (20—22 iunie 1956) se continuă în fascicula următoare.

В следующих выпусках будут опубликованы и другие научные работы, представленные сотрудниками Вухарестского Политехнического Института на научной сессий от 20—22 июня 1956 г.

On trouvera dans le fascicule suivant la publication des autres travaux de la session scientifique commémorative des cadres didactiques (du 20 au 22 juin, 1956).

# E R A T Ă

| Pag. | rîndul | în loc de | se va citi |
|---|---|---|---|
| 55 | 10 | ENBLEMES | ENSEMBLES |
| 80 | 12 de jos | ЕВГЛИДОВЫХ | ЭФКЛИДОВЫХ |
| 80 | 6 de jos | ESPACE | ESPACES |
| 138 | 11 de jos | N-METHAARMO-NIQUE | N-METAHARMONIQUE |
| 150 | 4 | LICH D | LICHIDE |
| 175 | 4 | ACRIDNEI | ACRIDINEI |
| 201 | fig. 1 în ordonată | — | $\eta_a$ |
| 203 | fig. 2 în ordonată | — | $C$, $g/m^2h$ |
| 203 | fig. 2 | — | 1 — anod de oțel, 2 - anod de oțel nichelat $\delta\dot{N}i = 60\mu$, 3 — anod de oțel nichelat $\delta Ni = 80\mu$, 4 — anod de oțel nichelat $\delta Ni = 100\mu$, 5 — anod de oțel nichelat $\delta Ni = 200\mu$, 6 — anod de oțel nichelat $\delta Ni = 250\mu$, 7 — anod de oțel nichelat $\delta Ni = 300\mu$, 8 — anod de oțel nichelat tratat termic $\delta Ni = 200\mu$, 9 — anod de nichel, |
| 242 | 10 | ЦЕМЕН | ЦЕМЕНТ |
| 315 | 20 | DIRECTIONAL | DIRECTIONNEL |
| 325 | 5 | degend | depends |
| 325 | 2 de jos | ubrich | which |
| 341 | 8 de jos | d | de |

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

## INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

In continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, unul în limba rusă și celălalt în limba franceză, germană, sau engleză, la alegerea autorului. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de pronume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Intreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.